實驗數據處理與作圖方法

台中一中
張宇靖

A、實驗數據處理

一、實驗數據與誤差

- **正確數字**～～正確計數時，無誤差。
  例如：人數
- **說明數字**～～純數學上的描述。
  例如：$\sqrt{2}$、π
- **測量數字**～～使用測量工具所得之數字，
  受工具的單位、測量方法影響，
  有誤差。
  常記為：(平均值)±(平均值的標準差)[單位]
  或 (平均值)±(平均值的標準差÷平均值×100%)[單位]

二、誤差的分類

- 系統誤差

(1)理論誤差：因理論不完備所引起的誤差。
例如：空氣阻力的影響。

(2)儀器誤差：測量儀器校準不良、不夠精密。

(3)環境系統誤差：外在環境影響，如氣溫。

- 人為誤差

實驗者的個性、習慣、偏見或疏忽所引起。

- 隨機誤差

隨機性產生的誤差。例如：熱擾動等。

三、有效數字

- **有效數字**：準確值＋估計值
- **估計值**：測量工具最小單位下一位

- 有效數字運算法則

(1) 加法：（取一位可疑數字）

（減法與加法類似）

例：

	10.235	±0.005cm
	20.2648	±0.0005cm
＋)	18.78	±0.05cm
	~~49.2798~~	±0.05cm
	49.28	

- 有效數字運算法則

(2)乘法：（取一位可疑數字）

例：

	1.2355	±0.005cm
×)	1.18	±0.05cm
	0.09880	
	0.12355	
＋)	1.2355	
	~~1.45730~~	±0.05cm
	1.46	

- 有效數字運算法則

(3)除法：（取最小位數）

例：

	6.345	±0.005cm
÷)	$\boxed{1.25}$	±0.05cm
	~~5.076~~	±0.05cm
	5.08	

四、統計分析（利用Excel計算）

- 四則運算（＋－＊／）
- 乘冪（2^3→2^3）
- 平方根（$\sqrt[x]{y}$ → y ^ (1/x) ）
  例：$\sqrt[3]{125}$ → 125 ^ (1/3)
- 科學記號
  （3.2500×10^{-3} →3.2500E-3）

- 總和： $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_N$

（＝sum(開始格：結束格)）

- 平均值： $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

（＝average (開始格：結束格)）

- 偏差：某一數據與平均值的差距

$$d_i = x_i - \overline{x}$$

- 平均偏差：偏差值的絕對直的平均

$$D = \frac{\left|x_1 - \overline{x}\right| + \left|x_2 - \overline{x}\right| + \mathbf{L}\ \mathbf{L} + \left|x_N - \overline{x}\right|}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \overline{x}\right| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|d_i\right|$$

（＝avedev (開始格：結束格) ）

- **標準偏差**：偏差值的方均根(root-mean-sqare)

$$\sigma = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d_i{}^2}$$

- **取樣標準偏差**：實驗時所用的標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}d_i{}^2}$$

（＝stdev (開始格：結束格)）

- 平均值的標準差：用來說明平均值可能的誤差範圍。

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2}}$$

（＝stdev (開始格：結束格)/sqrt(count(開始格：結束格) ）

◎物理量x的測量值：$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ [單位]

- **變異係數**：$C = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

  正常的實驗中，變異係數C≦5%。C＞5%的數據可捨去。

五、標準偏差的傳遞

- 加減法

兩物理量x、y（實驗數據），計算x ± y時，

平均值爲 $\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$

$$\because \sigma_x^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\Delta_x^2 \quad ; \quad \sigma_y^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\Delta_y^2$$

$$\sigma_{x+y}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\Delta_{x+y}^2 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\Delta_x\Delta_y = 0$$

而 $\sum\Delta_{x+y}^2 = \sum(\Delta_x^2 + \Delta_y^2)^2 = \sum\Delta_x^2 + 2\sum\Delta_x\Delta_y + \sum\Delta_y^2$

故標準差爲 $\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ ；同理 $\sigma_{x-y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

- 連加法
  三個物理量x、y、z （實驗數據），
  計算ax＋by＋cz時（a、b、c為常數無誤差），

  平均值：$\overline{ax+by+cz}=\overline{ax}+\overline{by}+\overline{cz}$

  標準差：$\sigma_{ax+by+cz}=\sqrt{a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2+c^2\sigma_z^2}$

- **乘法**

  兩物理量x、y（實驗數據），計算x‧y時，

  平均值爲 $\overline{x\cdot y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$

  變異係數爲 $\dfrac{\sigma_{xy}}{\overline{xy}}=\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2}+\dfrac{\sigma_y^2}{\bar{y}^2}}$

  故標準差爲 $\sigma_{xy}=\overline{xy}\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2}+\dfrac{\sigma_y^2}{\bar{y}^2}}$

- 除法

兩物理量x、y（實驗數據），計算x / y時，

平均值爲 $\overline{x/y} = \bar{x}/\bar{y}$

變異係數爲 $\dfrac{\sigma_{x/y}}{\overline{x/y}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2} + \dfrac{\sigma_y^2}{\bar{y}^2}}$

故標準差爲 $\sigma_{x/y} = \overline{x/y}\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2} + \dfrac{\sigma_y^2}{\bar{y}^2}}$

- 有幂次的乘除

$$\overline{x^{l}\cdot y^{m}} = \overline{x^{l}}\cdot\overline{y^{m}} = \bar{x}^{l}\cdot\bar{y}^{m}$$

$$\sigma_{x^{l}y^{m}} = \overline{x^{l}y^{m}}\sqrt{l^{2}\left(\frac{\sigma_{x}^{2}}{\bar{x}^{2}}\right)+m^{2}\left(\frac{\sigma_{y}^{2}}{\bar{y}^{2}}\right)}$$

$$\overline{x^{l}/y^{m}} = \overline{x^{l}}/\overline{y^{m}} = \bar{x}^{l}/\bar{y}^{m}$$

$$\sigma_{x^{l}/y^{m}} = \overline{x^{l}/y^{m}}\sqrt{l^{2}\left(\frac{\sigma_{x}^{2}}{\bar{x}^{2}}\right)+m^{2}\left(\frac{\sigma_{y}^{2}}{\bar{y}^{2}}\right)}$$

六、最小方差擬合（linear least squares fit）

- 處理實驗數據(xi , yi)時，欲精確求出最佳的直線關係y_{fit}＝ax＋b(a：斜率，b：截距)的方式。
- 最小方差擬合：
  調整a、b以得到 $\chi^2 = \sum_i (y_i - ax_i - b_i)^2$
  為最小值的狀況。
- 最適當的a、b需滿足 $\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0$ 及 $\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$

- 斜率：$a=\dfrac{N\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^{\,2}-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2}$

（＝slope(因變數開始格：因變數結束格，自變數開始格：自變數結束格)）

- 截距： $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i^{\,2}\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}x_iy_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^{\,2}-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2}$

（＝intercept(因變數開始格：因變數結束格，自變數開始格：自變數結束格)）

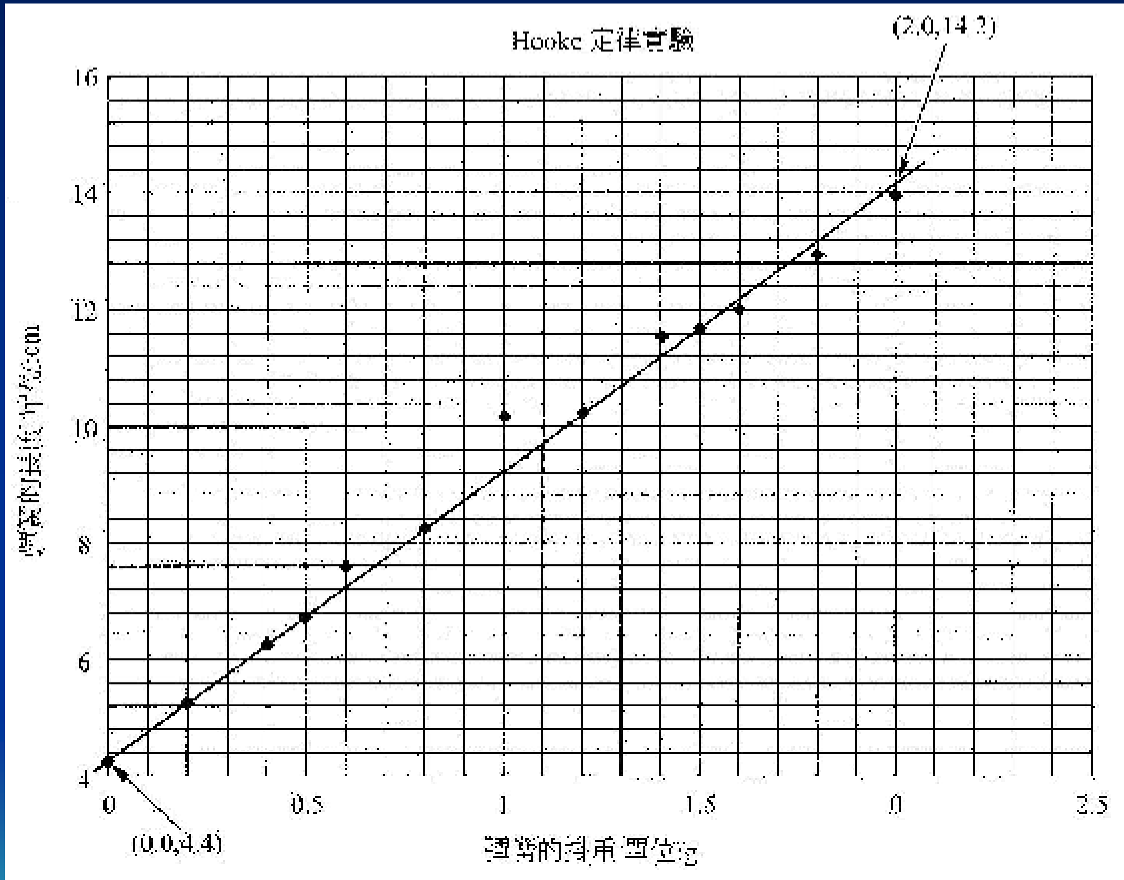
B、作圖方法

一、圖形繪製原則

- 呈現數據用的圖形必須繪製在方格紙上，或用電腦繪圖。
- 適當選取縱軸與橫軸的座標範圍及間格。
- 圖形的編號及標題寫在圖的下方。
- 書寫各軸名稱時，應與各軸平行，橫軸由左而右、縱軸由下而上，名稱之後加上單位。

二、線性關係與線性方格紙

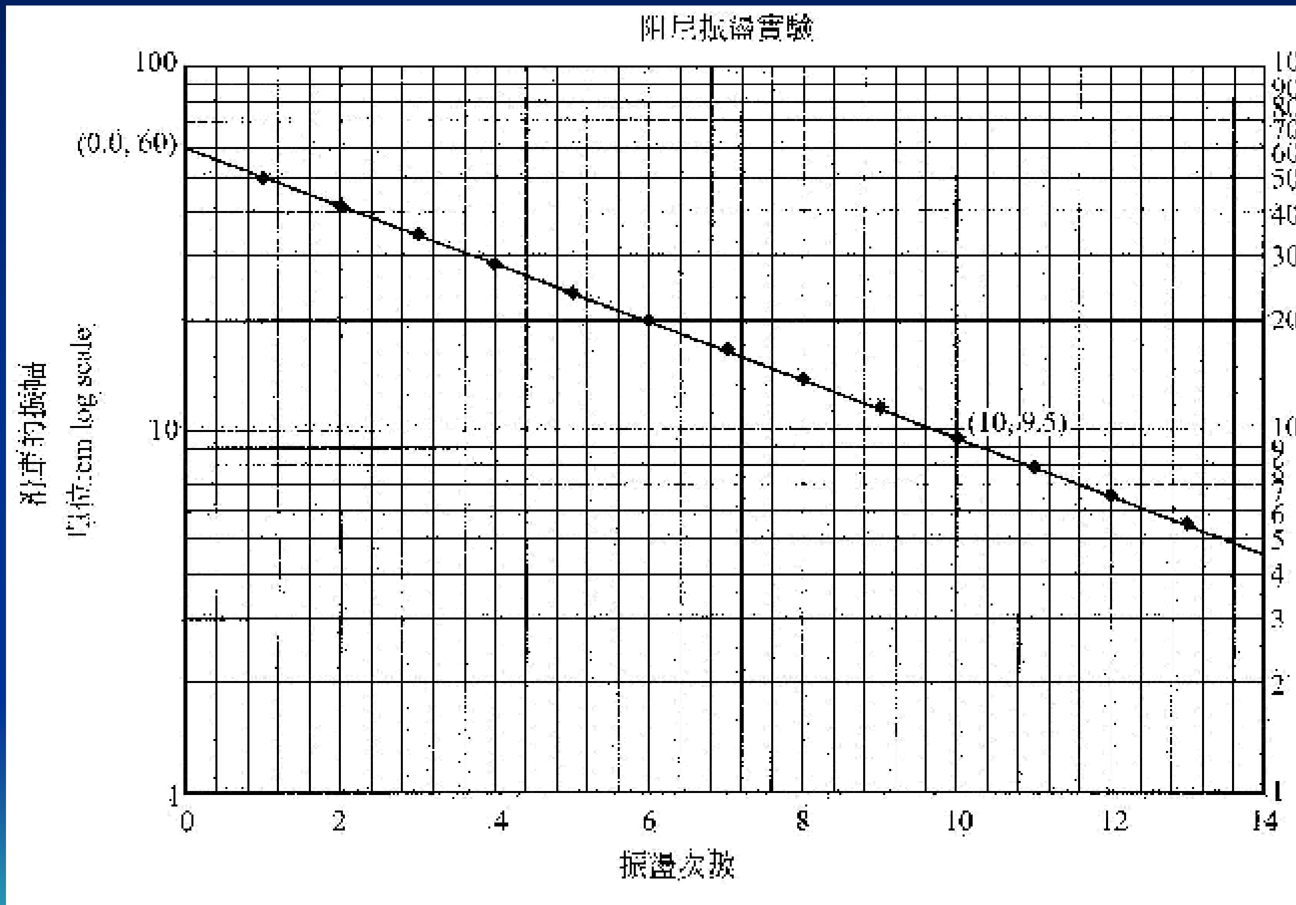
(y＝ax＋b)



Hooke 定律實驗結果中的線性關係

三、指數關係與半對數方格紙

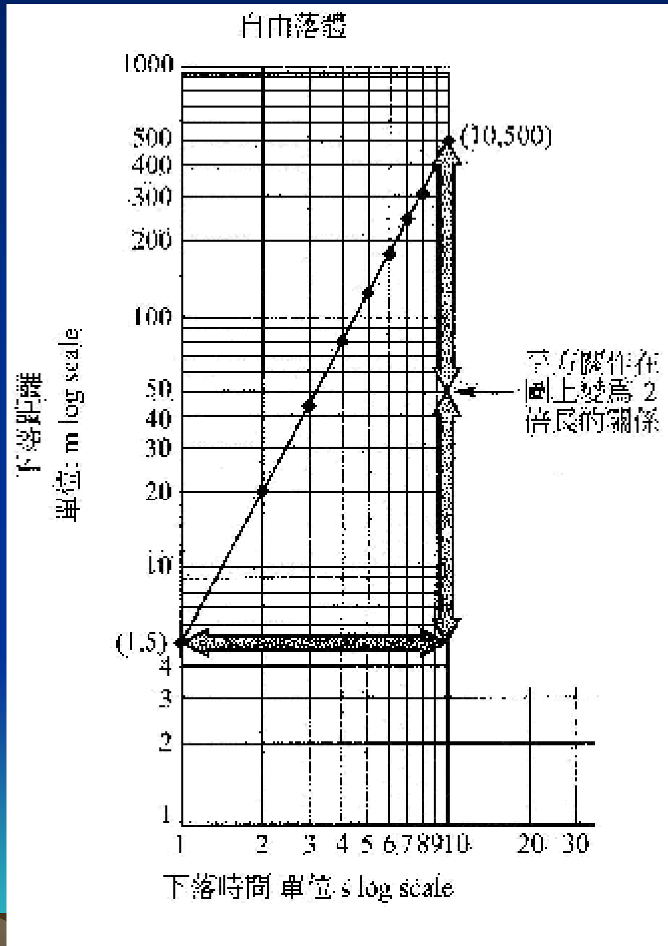
$(y = c\,e^{kx})$



阻尼振盪實驗結果中的指數關係

四、乘冪關係與全對數方格紙

$(y = ax^{b})$



自由落體實驗結果中的乘冪關係