電磁力是除重力外與吾人最密切的作用力，舉凡力學、化學與生物的作用力皆為電磁力。

(1) 電荷

- Electric charge 是電子與質子的一個 intrinsic property.
  藉由觀察帶電物体的交互作用瞭解電荷的知識：
  (i) 電荷分成 positive 及 negative 兩種、
  (ii) 同種電荷相斥，不同類則相吸、
  (iii) 物体的淨電荷 (net charge) 為兩种 charges 的代數總和 (algebraic sum)
- 每個 e^- 帶有相同多的 charge，每個 proton 亦有相同多但電性與 e^- 相反的 charge，此 charge 為基本電荷量 e，∴ e^- 的電量為 $-e$，proton 的為 $+e$.

  物体所帶的 charge 為 quantized，即為 e 的整數倍、
  $$e = 1.60 \times 10^{-19}\,C \ (\text{Coulomb 庫侖})$$
  有非整數 e 的基本粒子 quark (如 $\frac{1}{3}e$) 無法單独存在、

  ⇒ 電荷守恆：the net charge in a closed system remains constant.

(2) Coulomb's law

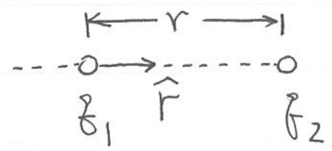
- 帶電体間交互作用之規則：
  (i) q_1 與 q_2 的作用力方向沿著兩者的連線（連心力）
  (ii) 作用力大小，正比於 $q_1 \times q_2$
  (iii) 作用力大小，與兩者距離平方成反比、

⇒ Coulomb's law：$\vec{F}_{12} = k\dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\hat{r}$

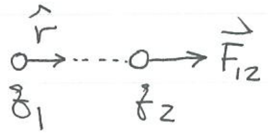
= q_1 施加在 q_2 的作用力

where $k = 9.0 \times 10^{9}\,\dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$. ∴ $\hat{r}$ = 由 q_1 指向 q_2 的單位向量

羅

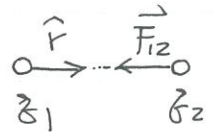


∵ When q_1、q_2 同号則 $(q_1 \times q_2 > 0)$



為斥力

When q_1、q_2 異号則 $(q_1 \times q_2 < 0)$



為吸力

○ Coulomb's law 只適用於 point charges，即無尺寸或尺寸大小與 r 相比可忽略，i.e.，q_1, q_2 的電荷分布体尺寸 ≪ 其間的距離 r.

For 數個 point charges $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_N$ 对 point charge q_a 的 Coulomb's force $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ia} = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{2a} + \vec{F}_{3a} + \cdots + \vec{F}_{Na}$

此即為 superposition principle.

point chargs 間的 Coulomb 作用力 $\propto r^{-2}$，但電荷分布体的 Coulomb 力則不一定是如此. see $\boxed{\text{Example 20.2}}$.

(3) 電場 (electric field, 用 $\vec{E}$ 表示)

$\sim \vec{g}$ = force per unit mass in ch 8 $= \vec{F}_g / m$

Similarly, 定義 $\vec{E}$ = force per unit charge $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_{test}}$

$$\vec{E} = k \frac{q \cdot q_{test}}{q_{test} \cdot r^2} \hat{r} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$ = charge q 在其周圍空間所建立的電場.

∴ $[E] = N/C$.

$\vec{E}$ 的方向與 q_{test} 的電性有關 (though q_{test} doesn't appear in $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$)

⇒ 限定 q_{test} 為正電荷 (positive test charge)

∴ 正 point charge 建立的 $\vec{E}$ 方向：輻射向外，負者為輻射向内。

⇒ $\vec{E}$：take positive point charge q_{test} 置於空間某點 P，量測其所受之 Coulomb 力，除以 q_{test} 即為 P 點的 $\vec{E}$。

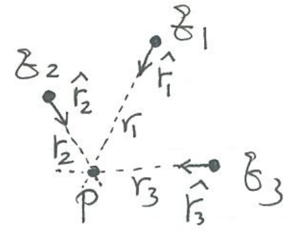
(4) 電荷分布的$\vec{E}$

○ superposition principle 適用於$\vec{E}$.

For 空間中有point charges $q_1, q_2, q_3, \cdots$，則在某一點P的$\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots = \sum \vec{E}_i$$

$$= \sum k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

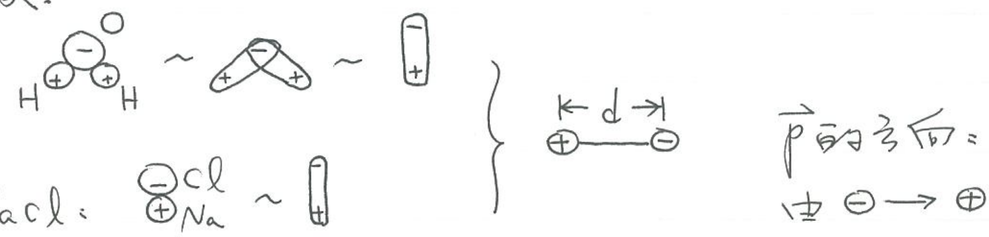


如右圖在 field point P點的

$$\vec{E} = k\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3\right)$$

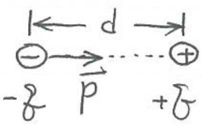
○ Electric dipole (電偶極，用$\vec{p}$表示)

為一重要的電荷分布，尤其是在分子尺寸時。其由同電量的正、負點電荷所構成.



Electric dipole 的$\vec{E}$ = ? ($\boxed{\text{Example 20.5}}$)

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right]$$ (Benson problem 25.14)，$\hat{r}$的~~參考~~點：dipole 中心.

where 

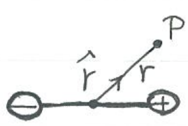
$p = qd$ = electric dipole moment.

(i) 在分子軸上的$\vec{E}$：$\vec{p} \parallel \hat{r}$ $\therefore 3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p} = 2\vec{p}$

$$\therefore \vec{E} = \frac{2k}{r^3}\vec{p}$$

(ii) ⊥分子軸的$\vec{E}$：$\vec{p} \perp \hat{r}$，$\therefore 3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p} = -\vec{p}$

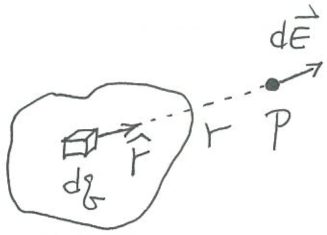
$$\therefore \vec{E} = -\frac{k}{r^3}\vec{p}$$



○ 電荷分布体的 $\vec{E}$

～ 質量連續体的作法，將連續体切割成很小的細塊 (dx, dA, dV)，再將其中的電荷 dq 產生的電場 $d\vec{E}$ 加起來，i.e.,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r}$$



dq 與 dx、dA、dV 間的連繫：charge density

1D: linear charge density λ (C/m), $dq = \lambda \cdot dx$

2D: surface charge density σ (C/m²), $dq = \sigma \cdot dA$

3D: volume charge density ρ (C/m³), $dq = \rho \cdot dV$

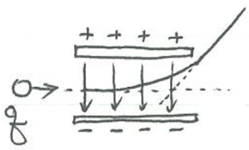
} Examples 20.6 and 20.7.

(5) 物質與 $\vec{E}$ 的交互作用

○ point charge

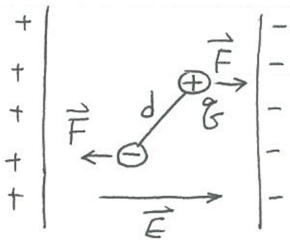
e^- 的 mass 比 proton 小 10^3 order，∴ 被 $\vec{E}$ 作用時，加速度遠比 proton 大。

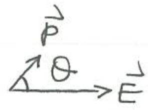
When q 經过均匀 $\vec{E}$ 時，其路徑為拋物線，利用此特性製造靜電場能量解析器 (electrostatic analyzer) i.e., 帶電粒子的速率選擇器。⇒ $\boxed{\text{Example 20.8}}$ (page 6)



○ dipole $\vec{p}$ in uniform field $\vec{E}$

如右图，dipole 在均匀 $\vec{E}$ 中的淨外力 $=0$，但 net torque $\neq 0$。以 dople 中心為參考點產生的 torque $\tau_+ = \tau_- = r \cdot F_\perp = \frac{d}{2} \cdot F\sin\theta$





$\therefore \tau = \tau_+ + \tau_- = d\sin\theta \cdot F = d\sin\theta \cdot qE$

$= pE\sin\theta$，方向：into the page.

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

∴ 當 $\vec{p} \parallel \vec{E}$ 時 $\vec{\tau} = 0$，作用在 $\vec{p}$ 的淨力與淨力矩皆為零，$\vec{p}$ 為最穩定狀態，i.e. 位能處於最低。

羅

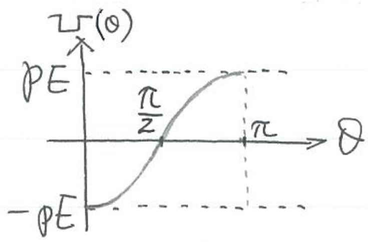
要改變dipole的方位時，外力必須作功，所作的功以位能U store在系統中。設外力旋轉dipole從$\theta_1 \to \theta_2$（dipole的KE不變）須作功W，則

$$W=\int dW=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau\, d\theta = pE\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = -pE\cos\theta_2-(-pE\cos\theta_1)$$

$$=U(\theta_2)-U(\theta_1) \Rightarrow U(\theta)=-pE\cos\theta+\text{constant}.$$

choose constant = 0

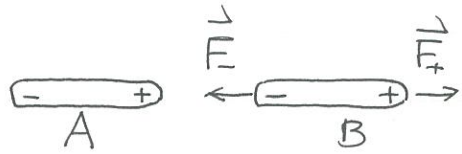
$$\therefore U(\theta)=-pE\cos\theta$$
$$=-\vec{p}\cdot\vec{E} \quad \Rightarrow$$



Note: $U(\theta=0)=-pE=$ 最低值.

When $\vec{E}$ is not uniform，則作用在dipole上的淨力也淨力矩皆不為零。一個重要的例子是不均勻的$\vec{E}$由另一個dipole所產生，如右圖.

$\because |\vec{E}_-|>|\vec{E}_+|$，$\therefore$ dipole B 為dipole A 所吸引，此為氣体分子間（如NO, CO, CO_2）van der Waals 力的由來。



○ 導体、絕緣体（insulators）及介電質（dielectrics）

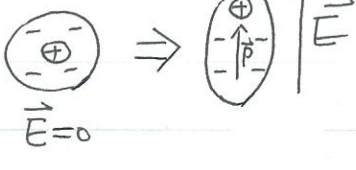
Conductors（如金屬、離子溶液、離子化氣体）：

帶電体（如e^-、p^+）可自由移動，∴在電場作用下，形成電流。

Insulators：雖有帶电体，卻無法自由移動，∴無法形成電流。

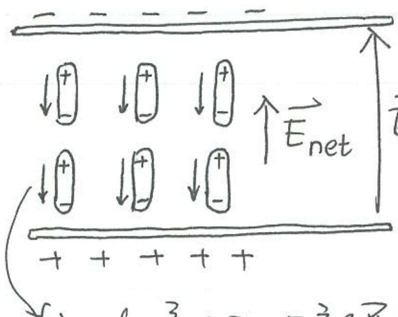
{ 極性分子（polar molecules）為具有永久的內在dipole moment 的分子，如水，HCl.
非極性分子可因外加$\vec{E}$而產生induced dipole moment、

由這兩類分子所構成的物質稱為介電質（dielectrics）、



：由外加電場（$\vec{E}$作用）所產生的induced dipole moment p.

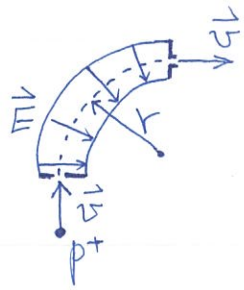
介電質在外電場$\vec{E}$中時，体內的淨電場比$\vec{E}$小，如右圖所示。
原因：排列整齊的dipole產生的內部電場抵消一部份的$\vec{E}$。
(在討論電容時，有定量描述)



dipole產生的內部電場。

if $\vec{E}$ 过大，则 dipole 的電荷被游離，形成類似conductor的狀態，此稱為 dielectric breakdown，对電子設備產生傷害。大自然中的 dielectric breakdown：lightning，对象為 air分子。

Example 20.8



如左圖的同心圓弧金屬板建立的電場 $E = E_0\left(\frac{b}{r}\right)$，
r是圓弧金屬板中心的半徑，proton由下方入口垂直入射，
if p^+要在右边出口中心逸出，则 v = ? (E_0, b為常數)

此為 p^+ 的 UCM，$\vec{E}$ 施加在 p^+ 的 Coulomb 力提供向心力，
∴ 在 r 處的 p^+ 所受的力

$$ma = \frac{mv^2}{r} = e \cdot E = e \cdot E_0 \cdot \frac{b}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ebE_0}{m}}$$

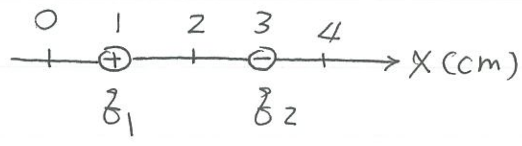
speed > v 的 p^+ 撞裏外板
speed < v 〃 內 〃
} 皆無法在右出口逸出。

∴ 是 speed 选擇器 —— 一種能量解析器。

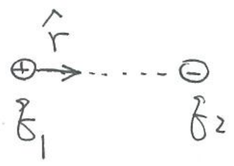
羅

$\boxed{\text{Example 20.1}}$: Coulomb's law

在數線上的兩個 point charges



$q_1 = 1.0\,\mu C$, $q_2 = -1.5\,\mu C$，則 $\vec{F}_{12} = ?$



$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \quad \text{where } \hat{r} = \hat{i}$$

$$= -k\frac{1.5\times10^{-12}}{(2\,\text{cm})^2}\hat{i} = -34\,\hat{i}\ \text{N}$$

$\boxed{\text{觀念例題 20.1}}$

e^- 和 p^+ 之間的電力作用和重力作用的比較．

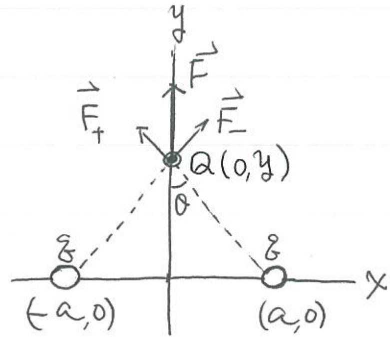
電力作用 $F_E = k\dfrac{e^2}{r^2}$，重力作用 $F_G = G\dfrac{m_e m_p}{r^2}$

$$\therefore \frac{F_E}{F_G} = \frac{ke^2}{G m_e m_p} = 2.3\times10^{39}!$$

(i) 計算基本粒子間的力作用時，可忽略重力作用、

(ii) 電力作用遠比重力大很多，why 日常生活中只有重力作用是最明顯？

Example 20.2



如右圖，則位於(0,y)的Q所受的力=?

$\vec{F}_+$：Q受到位於+a的q所施加之電力
$\vec{F}_-$：〃 −a 〃

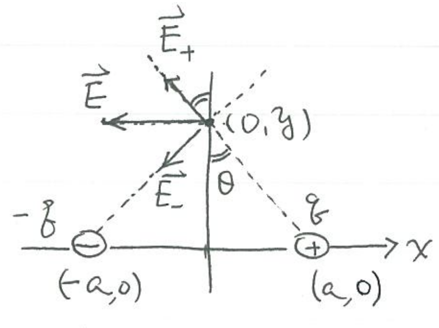
∴Q所受淨力 $\vec{F}=\vec{F}_+ + \vec{F}_- = |\vec{F}_+|\cdot 2\cos\theta\,\hat{j}$（x分量抵消）

$$= \frac{kqQ}{y^2+a^2}\cdot 2\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\cdot\hat{j}$$

$$= \frac{kQ\cdot(2q)\,y}{(y^2+a^2)^{3/2}}\hat{j}$$

Check: (i) near field at $y=0$, $\vec{F}=0 \Rightarrow$ Yes,
(ii) far field for $y \gg a \Rightarrow \vec{F} \cong k\frac{(2q)\cdot Q}{y^2}\hat{j}$
相當於 $(q+q)=2q$ 是 point charge

Example 20.5 一個極性分子的 $\vec{E}$



類似Example 20.2，如右圖的dipole分布，則在(0,y)的 $\vec{E}$=?

由圖可知 $\vec{E}=\vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$= |\vec{E}_+|\cdot 2\sin\theta\cdot(-\hat{i})$$

$$= \frac{kq}{y^2+a^2}\cdot\frac{2a}{(y^2+a^2)^{1/2}}(-\hat{i}) = -k\frac{(q\cdot 2a)}{(y^2+a^2)^{3/2}}\hat{i} = -\frac{kp}{(y^2+a^2)^{3/2}}\hat{i}$$

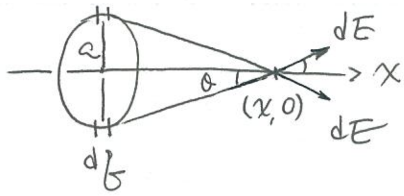
$$= -\frac{k\vec{p}}{(y^2+a^2)^{3/2}}$$

Far field: $y \gg a$, $\vec{E} \approx -\frac{k\vec{p}}{y^3}$

羅

Example 20.6 A charged ring

半径a，Q均匀分布其上的ring，中心轴上的$\vec{E}=$?

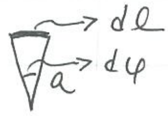


由右图可知$\vec{E}$只有x分量，y分量因抵消而为0.

$$\therefore dE = k\cdot\frac{dq}{r^2} = k\cdot\frac{dq}{x^2+a^2}$$

$$\therefore \vec{E} = \hat{i}\int dE\cdot\cos\theta = \hat{i}\int k\cdot\frac{dq\cdot x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{kx\,\hat{i}}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq = \frac{kQx\,\hat{i}}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$ (Compared with Example 20.2)



$$\left(dq = \lambda\cdot dl = \frac{Q}{2\pi a}\cdot a\cdot d\varphi \right.$$

$$\left. = \frac{Q}{2\pi}d\varphi,\ \text{and } \int dq = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi = Q \right)$$

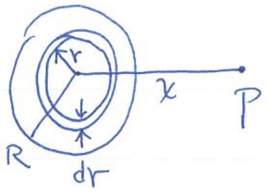
Check: (i) near field at $x=0$、$\vec{E}=0$

(ii) far field at $x \gg a \Rightarrow \vec{E} \cong \frac{kQ}{x^2}\hat{i}$,

the ring becomes a point charge.

此题Example重要，以此可以extend到charged disk (problem 71~73) 到charged shell及sphere，不过後两者因高度对称，所以用Gauss law。

Problem 71. charged disk of surface charge density σ (C/m^2)，则中心对称轴上的$\vec{E}=$?



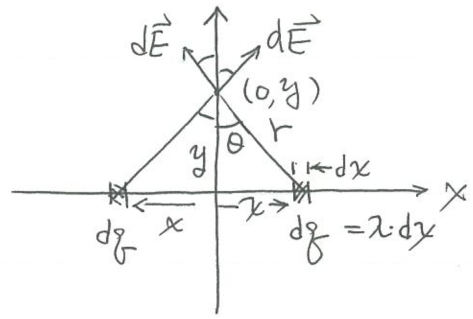
半徑r的ring中的charge $dq =$ ring的area·σ
$= 2\pi r\cdot dr\cdot\sigma$

dq產生的 $dE = \frac{kx}{(x^2+r^2)^{3/2}}\cdot dq = 2\pi k\sigma x\cdot\frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$

$$\therefore E = \int_{r=0}^{r=R} dE = 2\pi k\sigma x\int_0^R\frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

x軸上無限長的均勻帶電線, charge density $= \lambda$ (C/m), 則y軸上(0,y)的$\vec{E}=$?

由右圖可知$\vec{E}$只有y分量, x分量因抵消而為0.



$$\therefore E = \int dE \cdot \cos\theta$$

$$= \int \frac{k \cdot dq}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = k\lambda \int \frac{y \cdot dx}{r^3}$$

where $r^2 = x^2 + y^2$。

When dq 在 x-軸移動時, θ, x, r 皆隨之改變, ∴此三個變數都可成為積分變數. 它們的關係為 $\sin\theta = \frac{x}{r}$ and $x = y\tan\theta$.

(i) x為積分變數

$$E = k\lambda y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 2k\lambda y \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2k\lambda}{y}$$

(變數代換: $x = y\tan\varphi$, 則 $\frac{dx}{d\varphi} = y\sec^2\varphi$。 $1+\tan^2 A = \sec^2 A$。 When $x: 0 \to \infty$, $\varphi: 0 \to \frac{\pi}{2}$)

(ii) θ為積分變數

$$E = \int \frac{k \cdot dq}{r^2} \cdot \cos\theta = k\lambda \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{k\lambda}{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta = 2k\lambda/y.$$

$\left(\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{x^2} \text{ and } \frac{dx}{d\theta} = y\sec^2\theta\right)$

(iii) Try r為積分變數

Note: (i) 此題用 ch 21 的 Gauss's law 解時, 比較簡單.
(ii) $\vec{E}$的對稱性: 以線軸為中心輻射向外, 強度 $\propto r^{-1}$, r為距線軸的距離.
(iii) 無限長在實際情況下的意義: 距有限長帶電線非常近的地方。

羅