

# Statistical Mechanics

Qualifying examination

Spring, 2012

1. (一般性的統計問題, 15 分)
  - (a) 隨意在長度為  $L$  的繩子上砍  $N$  刀, 請問當  $N$  遠大於 1 時, 在距離繩子左端  $\ell$  到  $\ell + d\ell$  距離的小繩段內, 剛好被切一刀的機率為何?
  - (b) 延續(a)小題, 如果我指定這一刀是從左邊數起的第  $n$  刀, 那(a)問的機率會變成什麼?
  - (c) 把這  $N+1$  條繩段的長度  $\ell$  和個數畫成柱狀圖表(histogram)後, fitting 出來的分佈機率函數  $P(\ell)$  為何?
2. (應用在生物物理的統計觀念, September 2010 考古題, 20 分)
  - (a) 如果忽略高分子(polymers)的每一小段 monomers 之間的作用力, 為了讓熵(entropy,  $S$ )達到最大, polymer 會捲曲成像顆蓬鬆的棉花球; 請證明在溫度  $T$  的環境裡, 包含  $N$  段(每段的長度為  $\ell$ ) monomers 的 polymer 直徑會和  $\sqrt{N} \ell$  成正比。當三維的 polymer 被壓扁成二維(或自行吸附在固體表面)時, 這個直徑會變大幾倍?(提示: 可以把這個題目轉化成醉漢走路(random walk),  $N$  變成步數,  $\ell$  則是步伐)
  - (b) 當小孩長得像鄰居叔叔時, 丈夫肯定會偷偷帶小孩去作親子鑑定, 最常使用的方法是電泳(electrophoresis)實驗, 檢驗師先用酶素把小孩唾液的 DNA 切成長短不一的線段, 然後利用電場誘使它們鑽進(孔洞直徑大於 DNA 截徑, 但是仍然小到限制它無法捲曲)孔洞結構的膠體裡, 一旦 DNA 的端點露出洞的另一個開口, 不再需要電場, 為了增大熵  $S$  (相較於還留在洞裡的線段只有一種組態(configuration), 露出洞口的 DNA 線段則海闊天空可以隨意捲曲), DNA 自己會像蚯蚓般地慢慢鑽出來。從自由能的觀念來解釋, 由於忽略 monomers 之間的位能, Helmholtz free energy 直接就等於  $-T \cdot S$ , 其中  $T$  代表環境溫度; 當  $S$  增加, 自由能便得以降低。用  $N$  和  $\ell$  分別代表 monomers 數目和每段 monomer 的長度, 請估計同樣從只露出一段 monomer 開始, 不同長短的 DNA 鑽出孔洞需要費的時間如何隨  $N$  改變。
3. (古典統計力學的 Gibbs paradox, 20 分)
  - (a) 把外面裹有鋁箔紙的密封箱子隔成等體積的兩半, 分別灌入相同顆數  $N$  和溫  $T$  的不同惰性氣體(原子量分別用  $m_1, m_2$  表示), 當我把隔板上的小孔打開, 讓兩邊的氣體得以緩慢、可逆地達到平衡, 請問最終箱子的總

熵(entropy)會增加多少？

- (b) 如果當初兩邊灌的根本是同一種氣體，那打開小孔的動作應該不會改變系統的狀態，也就是說熵必須保持定值，請問這個事實如何用你在(a)的推導方式得到？

4. (用到平均場近似的自旋問題，September 2009 維甫的考古題，25 分)

Consider a single electron in a magnetic field  $B$  along the  $z$ -axis. The Hamiltonian operator is  $\hat{H} = -\mu B \hat{\sigma}_z$ , where  $\mu$  is the magnetic moment and the  $\hat{\sigma}_z$  operator is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- (a) What is the density matrix of the system in the canonical ensemble?
- (b) Derive the partition function of this system (Feb. 2006)
- (c) Derive the average (per particle) magnetic moment,  $M$ , and calculate its asymptotic behavior in low and high temperature limit. (Feb. 2005)
- (d) Now, assuming the magnetic field  $B$  is not given by a source outside the spin system, but is generated by the local spin moment itself, i.e. let  $B = \alpha M$ , where  $\alpha$  is some constant coefficient. Then, derive the self-consistent equation of  $M$ , and calculate the critical temperature,  $T_c$ , of ferromagnetic transition, below which the self-consistent solution of  $M$ , defined by  $M_{MF}$ , is nonzero. This is so called mean-field solution.
- (e) Assuming  $T_c$  is very high and one can use the high temperature expansion to the leading order correction, calculate  $M_{MF}$  as a function of temperature  $\delta T$  within the ferromagnetic phase, where  $\delta T \equiv T_c - T$  is a small positive quantity. (hint:  $\tanh(x) \sim x - x^3/3$  for small  $x$ )
5. (Equipartition 定理，September 2010 林克瀛教授的考古題，15 分)
- Consider a classical ideal gas at temperature  $T$ . The energy of a molecule is

$$\epsilon = ax^2 + bx + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (1)$$

where  $a$  and  $b$  are constants. Determine the average energy of a molecule.

6. (觀念題，Fall 2007 秀豪的考古題，10 分)

- (a) Ergodic hypothesis  
(b) Grand canonical ensemble  
(c) Fermi pressure  
(d) Liouville's theorem