

力學振盪

一 目的:

利用滑車在空氣軌上作一維振盪，觀察阻尼振盪與強迫振盪的現象。

二、原理:

振盪是力學上常見的現象，有關振盪的觀念可以引用到物理學和工程學的其他部分，因此很值得加以研究。我們擬利用空氣軌來進行一維振盪運動的觀察。以下只簡述振盪的概念和觀察的方法，有關數學推演的詳細過程請參考文獻1。

(一)簡諧振盪 (SHM, simple harmonic oscillation)

假設有一物體在離開平衡點時，受到的恢復力與位移成正比，即

$$F = -\kappa x$$

按照牛頓的第二定律，其運動方程式為

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x \quad (1)$$

令 $k/m = \omega_0^2$ ，可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

這個方程式的解所具有的基本形式為

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (3)$$

x_0 和 δ 是由起始條件決定的常數，週期 $T = 2\pi / \omega_0$ 。這種運動稱為簡諧振盪。

(二)阻尼振盪 (damped oscillation)

如果物體除了彈簧的恢復力之外，同時還受到一個和速率成正比的阻滯力 $m\lambda dx/dt$ ，則其運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

此處 dx/dt 的係數中， m 是為了方便而加入的， λ 稱為阻尼係數。整理使得到

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

以(3)式 $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$ 代入(5)式，可以求出運動的角頻率 ω 。物體是否作振盪，視 λ 與 ω_0 的關係而定：

1. $\lambda > 2\omega_0$: 稱為過阻尼(overdamping)。
2. $\lambda = 2\omega_0$: 稱為臨界阻尼(critical damping)。

以上兩種情形下，物體並不作往復運動，而是漸漸趨向平衡點。其中臨界阻尼趨向平衡點較快，故一般儀表設計時都採用臨界阻尼條件，以縮短反應所需的時間。

3. $\lambda < 2\omega_0$: 稱為次阻尼(underdamping)。
- 這時(5)式的解可以寫成下面的形式

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t/2} \cos(\omega_d t + \delta) \quad (6a)$$

其中

$$\omega_d = \omega_0^2 - \lambda^2/4 \quad (6b)$$

這種運動顯然並不是一個週期性的運動，因為每重覆一次，物體不會回到原先的最大位移，所以只能稱為往復運動。但在 λ 不太大時，還是可以近似地當作一個振幅逐漸衰減的簡諧振盪，只是頻率比 ω_0 稍低一點。如果 $t = 0$ 時，位移是一個極大值 x_0 ，每經一個"週期" $T_d = 2\pi / \omega_d$ 之後，位移極大值依次為 $x(T_d) = x_0 e^{-\lambda T_d/2}$ ， $x(2T_d) = x_0 e^{-\lambda T_d}$ 等等，可見這種運動的最大位移是隨著時間呈指數函數的方式衰減的。在圖1中，經過各極大值可以畫出一條包跡的方程式為

$$x = x_0 e^{-\lambda t/2} \quad (7)$$

定義半生期 $T_{1/2}$ 為 x 降到 $(x_0/2)$ 所需的時間，則

$$T_{1/2} = 2 \ln 2 / \lambda \quad (8)$$

因此，由 $T_{1/2}$ 可以推算出阻尼係數 λ 。若在半對數紙上畫出 x 對 t 的關係，得到一條直線，由直線的斜率，亦可求出阻尼係數 λ 。

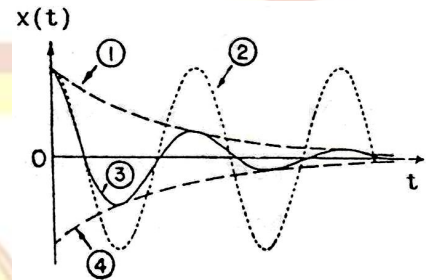


圖1 次阻尼振盪。

- ① $x_0 e^{-\lambda t/2}$
- ② $\lambda = 0$ 之振盪
- ③ $\lambda = 0.4 \omega_0$ 之振盪
- ④ $-x_0 e^{-\lambda t/2}$

實驗中利用兩塊大磁鐵以圖2所示方式吸附於滑車上，來產生阻止滑車運動所需的阻尼。由橫切面圖可以看出兩塊磁鐵的磁力線深入空氣軌，當滑車運動時，磁場跟著滑車一起移動，使得軌道面上產生局部磁通量變化。根據法拉第感應定律，為了彌補磁通量的變化，該局部會產生感應電動勢及渦流，以反抗磁鐵的運動。

磁通量變化 $d\Phi/dt$ 和滑車的速率 v 成正比，渦電流 i 與磁通量變化成正比，因此，渦電流對滑車所引起的阻滯力與滑車速率 v 成正比。阻尼係數的大小，可以利用磁鐵的位置來調整，磁鐵越靠近軌道面，阻尼係數越大。

(三) 強迫振盪：

如果物體除了恢復力和阻滯力之外，遭受到一個過期性的驅動力 $F_0 \cos \omega t$ ，則運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (9)$$

整理後，得到

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t / m \quad (10)$$

當時間長到起始狀態可以忽略時(文獻1)，這個方程式的穩定解的形式如下

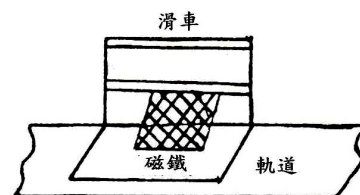
$$x = x_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (11)$$

這裡

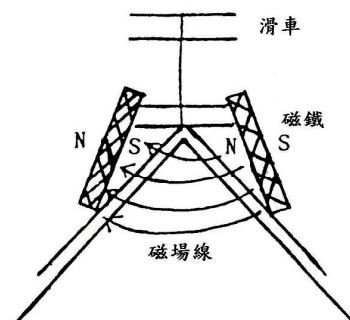
$$x_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \lambda^2}} \quad (12)$$

$$\delta = -\tan^{-1} \frac{\omega \lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (13)$$

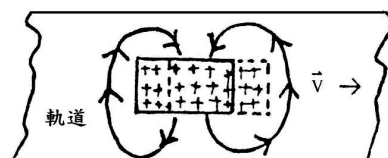
這是一個和驅動力頻率相同的簡諧振盪，它的振幅和驅動力的頻率有關(參看圖3)。頻率極低時，滑車加速度很小，此時，幾乎所有的力都用來拉彈簧，振幅約為 F_0/k 。頻率極高時，滑車來不及反應，振幅幾乎為零。當頻率為共振頻率 ω_R 時振幅最大。由(12)式可得^{#1}



(a) 阻尼振盪裝置圖

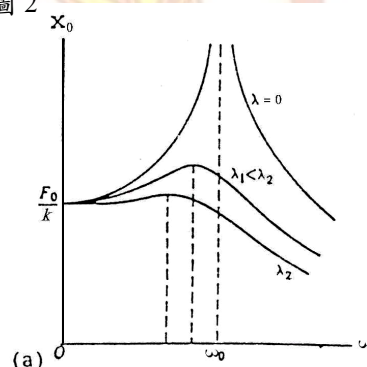


(b) 橫切面圖

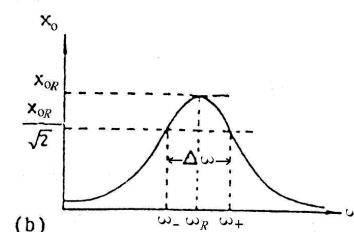


(c) 渦流方向

圖 2



(a)



(b)

圖 3

#1 做阻尼振盪時，由於加上磁鐵，因此系統的質量增加，自然頻率 ω_0 不再等於滑車未加磁鐵時的自然頻率，因此必須修正滑車質量 m ，找出正確的自然頻率 ω_0 ，進而決定正確的共振頻率 ω_{0R} 與共振振幅 x_{0R} 。

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} / 2 \quad (14)$$

當 $\lambda \ll \omega_0$ 時， $\omega_R \approx \omega_0$ ，共振振幅 x_{OR} 約為

$$x_{OR} = F_0 / m \omega_0 \lambda$$

振盪器的特性可用最大振幅和頻寬來表示。定義 ω_{\pm} 為振幅降至共振振幅的 $1/\sqrt{2}$ 倍處所對應的頻率，且 $\omega_- < \omega_R < \omega_+$ 。同時，定義振盪器的頻寬 $\Delta\omega$ 為

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$$

如果 $\Delta\omega$ 很小，在 ω_R 附近振幅隨頻率的改變很大，因此，振盪器對頻率的選擇性很高；反之， $\Delta\omega$ 很大者，振盪器對頻率的選擇性低。

由(12)式可知，當 λ 很小時， ω_{\pm} 滿足

$$(\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2)^2 + \omega_{\pm}^2 \lambda^2 \approx 2\omega_0^2 \lambda^2$$

λ 很小時，因 $\omega_{\pm} \approx \omega_0$ ，所以

$$\omega_{\pm} \approx \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_0 \lambda} \approx \omega_0 (1 \pm \lambda / 2\omega_0) \quad (17)$$

將(17)式代入(15)式，即得

$$\Delta\omega \approx \lambda \quad (18)$$

一般使用品質因數(Quality factor) Q 來表示振盪器對阻尼的反應情形。

$$Q \equiv \omega_R / \lambda \quad (19)$$

在阻尼係數 λ 很小時

$$Q \approx \omega_0 / \Delta\omega \approx 2\pi \times \frac{\text{振盪器總能量}}{\text{一個週期所消耗的能量}} \quad (20)$$

因此， Q 值越大時，振盪器對頻率的選擇性越高，經過每一週期所消耗能量的比例也越小。

本實驗中，將一條彈簧的一端掛在同步馬達上(參看圖4)，產生實驗所需之驅動力，馬達的轉速可以利用DC可變電壓源來調節。如果選擇平衡位置的座標為 $x=0$ 則滑車在 x 位置所受的力為

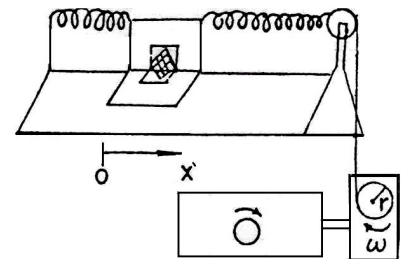


圖 4

$$F = -\kappa x - \kappa(x - r \cos \omega t) - m\lambda \frac{dx}{dt}$$

$$= -2\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} + \kappa r \cos \omega t \quad (21)$$

其中 $\kappa r \cos \omega t$ 即為週期性驅動力。

三、儀器與配件:

空氣軌一組，火花打點裝置，滑車兩部，彈簧數條，磁鐵若干個，馬表一隻，同步馬達及直流電源各一個。

四、步驟:

(一)決定彈簧特性

1. 以兩條彈簧^{#2}則與滑車連接系統，決定實驗當中所使用彈簧長度的範圍^{#3}。
2. 將裝置拆下，以圖5方式測量外力—伸長量函數關係，決定各個彈簧的 κ 值，並確定在欲使用長度範圍，外力與伸長量呈線性關係。
3. 以滑車—砝碼振盪方式決定彈簧的 κ 值。

#2 本實驗所用之細彈簧極為脆弱，補充不易，應多加珍惜，切勿過度拉長。放置時應每樣分開，平行放置，以避免糾纏。如有必要，可以藉振盪週期反推 κ 值。

#3 注意；如果彈簧長度不夠，可以用活動式的端點固定在空氣軌上的適當位置，以縮短固定點間的距離。

(二)阻尼振盪

1. 將兩片大磁鐵用膠帶貼在滑車上，必須確定貼牢以免滑動，位置如圖2所示。
2. 用兩條細彈簧把滑車連接到軌道的兩個端點，記錄靜止時的平衡位置。將滑車移離平衡位置約10cm後放手，以實驗室已有的電腦自動數據擷取系統紀錄滑車的位置和時間的關係，至滑車振幅小到在銀幕上無法分辨為止。
3. 由數據測量震盪週期並測量每一週期的最大位移。
4. 在半對數紙上畫出最大位移對時間的關係圖，是否接近一條直線？由此線的斜率求出 λ 。
5. 將數據載入數據分析軟體，以非線性函數 fit (見參考資料)，找出 x_0 ， ω_d ， δ 及 λ 等參數。
6. 比較步驟4、5所得的 λ 值，並討論之。

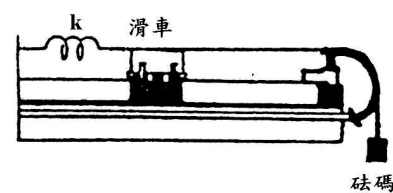


圖 5

(三)強迫振盪

1. 不要動滑車上的兩片磁鐵。如圖4所示，並在連到馬達的線中間插結一條橡皮筋，並調整線長，使滑車振盪時，線及橡皮筋不要彎曲。
2. 先調整DC可變電源的輸出電壓，找出自然頻率 f_0 的大約值。

3. 以數據擷取系統同時記錄滑車位置及滑輪的旋轉角度。(正比於驅動力)
4. 從慢轉速($f \leq 1/3f_0$)開始，逐漸增加 f 超過 f_0 ($f \geq 2f_0$)為止。每次改變轉速都要在滑車振動的最大位移已維持固定時為之。
5. 在穩定振動範圍內測量振幅，以及振動和驅動力間的相位差 δ 。
6. 畫出振幅對頻率的關係圖，看看是否類似圖3的響應曲線。由此曲線找出共振頻率 ω_R 和頻寬 $\Delta\omega$ 。
7. 畫出相位差 δ 對頻率的關係圖並與(13)式比較。
8. ω_R 和步驟(二)中的 ω_d 相近嗎? $\Delta\omega$ 和步驟(二)中的 λ 相近嗎? 試討論之。
9. 請解釋改變頻率時的振幅不穩定現象的原因(transient effect)，並以傅式分析證明你的解釋。

(四) 不同 λ / ω_0 值之比較

改用不同的阻尼條件或不同的彈簧組合，重覆阻尼振盪與強迫振盪，以作比較。

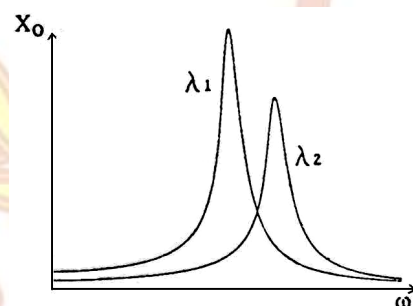


圖 6

五、問題:

1. 在做強迫振盪實驗時，滑車上所貼磁鐵的位置，常會造成實驗進行難易程度上相當大的差別，為什麼? 試詳加討論。
2. 作強迫振盪時，驅動馬達若不在空氣軌正下方，會造成什麼後果?
3. 如果在改變阻尼條件(步驟(四))時採用直接在滑車上加幾塊磁鐵的方式，所得到的兩條共振曲線可能會像圖6所示，試解釋之。
4. 因為有 Transient effect (文獻5)。強迫振盪的振幅可能忽大忽小，如何確定振盪已達平衡? 可不可以不等平衡，直接以最大振幅和最小振幅的平均值當作(11)式的 x_0 ? 為什麼?

六、參考文獻:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles & Systems 2nd ed. (歐亞書局，台灣版，1985)，3-2，p.93. §3-5, p.101, §4-2, p.118。(3rd ed., §3-5, p.106, §3-6, p. 114)
2. D. Halliday & R. Resnick : Fundamentals of Physics, extended 3rd ed. (John Wiley & Sons, Inc., 1988) §14-8, p.318 §14-9, p.320。

3. 李怡巖：大學物理學，十五版(東華書局，民國76年10月), §6-9, p.387, §6-10, p.392。
4. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics (Addison - Wesley Publishing Co., 1967), §12-12 ~ §12-13, p.374~p.380。
5. 施奇廷，徐志偉：振盪，清華物理第20期，(民國77年)，p. 88。

