

平面運動

一.目的:

利用空氣桌設備進行各種平面運動的實驗。

二、原理:

(一)空氣桌基本結構:

本實驗裝置如圖1所示。在空氣桌上有兩個氣墊小圓盤，圓盤與空氣桌之間有一層很薄的空氣層，使兩者之間摩擦力幾乎為零。由吹風機⑦經橡皮管②送風到支架①，再由支架起橡皮管④接到圓盤⑤而使圓盤浮於空氣桌⑨上。圓盤運動的軌跡是利用火花打點記錄在預先鋪於桌面上的白紙。火花打點的路徑，是由火花計時器③的正極，利用導線接到支架上的接點，再以橡皮管④內部的鏈狀導線接到圓盤⑤，然後穿過空氣桌上的火花打點記錄紙，經由底下的碳紙，到另一個圓盤⑧，再經由

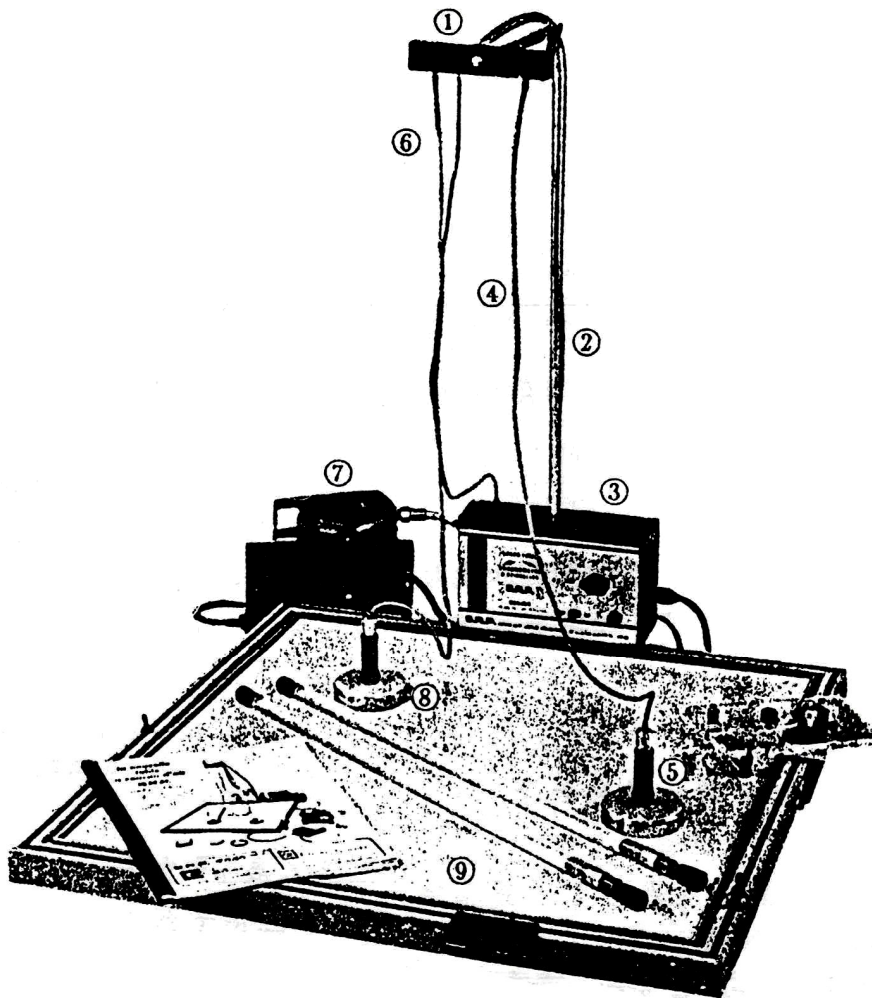


圖 1 平面空氣桌

橡皮管⑥內部的鏈狀導線回到火花計時器的負極。在電流由圓盤流向碳紙的同時，火花放電會在記錄紙上打出黑點，觀察這些黑點，便可以知道圓盤的運動軌跡。

(二)拋物線運動：

這部份要驗證物體在均勻力場中作二維拋射運動時，其軌跡為如圖2之拋物線。其次要驗證牛頓運動的重疊原理，即運動軌跡的x分量和y分量分別與物體在另一方向上所受的力無關。

假設在x-y平面上有一物體，受到一個與x-y平面平行的定加速度a。選擇x-y坐標軸使 $a = -a \hat{y}$ 。如果使物體以初速度 v_0 ，與x軸成 φ 角射出，則在時間為t時，物體的位置(x, y)為

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \varphi t \\ y &= v_0 \sin \varphi t - \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

由這兩式消去t，可以得到物體的運動軌跡為一拋物線：

$$y = \tan \varphi \cdot x - \frac{ax^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (1)$$

經簡單計算可以得知，當物體到達最高點 (x_m, y_m) 時

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2a} \quad (2)$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2a} \quad (3)$$

而物體的射程為 $2x_m$ 。

本實驗在傾斜的空氣桌面上，利用重力加速度g沿空氣桌面的分量a作為加速度，驗證拋物線軌路合乎(1)~(3)式。

(三)截面積(cross section)的測量：

圖3表示以粒子 m_1 射向靜止的靶粒子 m_2 ，發生碰撞之後，入射的粒子會被散射(scatter)。靶粒則會反彈(recoil)。圖3的散射角 Ψ 是指時間 $t \rightarrow \infty$ 時， m_1 粒子運動的方向與入射方向的夾角。 θ 則為質心系統內的散射角。對於彈性散射而言，在質量中心系統內的散射角 θ 與實驗室散射角 Ψ 之間的關係(文獻1)為

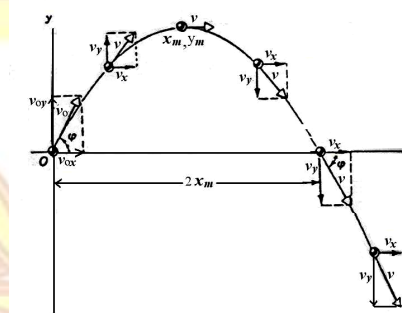


圖 2 拋物線運動

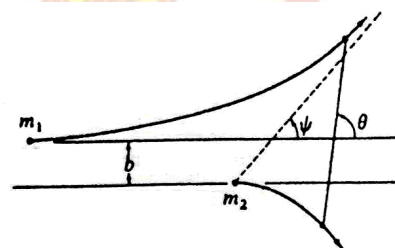


圖 3 m_1 與 m_2 的散射。 Ψ 為實驗室散射角， θ 為質心系統散射角。

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1 + m_2)}$$

撞擊參數 b (impact parameter) 定義為 m_1 與 m_2 入射線的垂直距離。一般來講 b 越小，散射角 ψ 就越大。散射截面積 (scattering cross section) 為

$$\sigma(\theta) = \frac{\text{入射粒子被散射到 } \theta \text{ 角內的數目}}{\text{單位面積內入射粒子數目}} \quad (4)$$

圖4顯示，當撞擊參數改變 db 時，散射角度會有 $d\theta$ 的變化。假設 dN 為單位時間內入射粒子散射到立體角 $d\Omega$ ($= 2\pi \sin \theta d\theta$) 內的數目，而 I 為入射強度，則

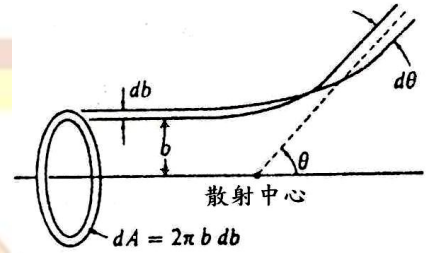


圖4 散射截面與撞擊參數關係圖。

$$\begin{aligned} dN &= I \sigma(\theta) d\Omega \\ &= I \sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

在 $2\pi b db$ 範圍內入射的粒子都散射到 θ 與 $\theta + d\theta$ 之間，因此

$$I \cdot 2\pi b db = I \sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta \quad (6)$$

與上式合併，得到

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (7)$$

在實驗室系統內的散射截面積則為

$$\sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\psi} \right| \quad (8)$$

以庫倫散射為例(其他類似的作用力，亦可用相同方法演算)，兩個粒子間的位能為 $U(r) = K/r$ ，如果 $m_1 = m_2$ ，則

$$\sigma(\psi) = \frac{K^2}{T_0^2} \frac{\cos \psi}{\sin^4 \psi} \quad (9)$$

上式中 T_0 為入射動能;位能公式中的 K 為常數，是兩粒子所構成系統的參數(文獻2)。本實驗所使用的圓盤有兩種，較輕型的內附有磁鐵，並可利用鉛片改變質量。可以提供接觸碰撞、磁性相斥、磁性相吸三種形式的力，

但因磁鐵的位置和方向不詳，作用力的形式並不清楚。

同學可以嘗試以各種方法找出作用力形式。

三、儀器與配件：

平面玻璃台、火花打點器、打氣機、磁性滑動小圓盤兩個、鉛片、重型滑動小圓盤兩個、三腳鐵架一個、吊杆一支、發射器。

四、步驟：

(一)拋物線運動：

- 1.將空氣桌的一邊墊高，與水平面成 θ 角(請注意:空氣桌較低一邊仍須保持水平)，並將圓盤之一置於空氣桌上破紙的一角。(為什麼?)
- 2.利用發射器依所需角度 φ 把另一圓盤由底線射出，同時接下火花打點器，記錄圓盤軌跡。
- 3.直接由火花打點記錄找出 v_0 與 a (θ 的大小會影響此步驟的結果嗎?為什麼?)
- 4.測量 φ 、 x_m 、 y_m 、 v_0 ，由(3)式決定 a 值。
- 5.以火花打點記錄作 $x-t$ 圖及 $y-t$ 圖，其圖形為何?這些圖形所表示的物理意義為何?
- 6.量取 θ ，由重力加速度計算 a 值，(本校所在位置之 g 值為 978.9239 cm/s^2)。
- 7.比較3~5步驟所得的 a 值，並討論之。
- 8.選取幾點，驗證能量守恆。
- 9.改用不同的 v_0 、 θ 或 φ ，重覆上述步驟。

(二)截面積的測量：

- 1.這一部份水平極為重要，可利用火花打點，由一個圓盤的速度是否均勻，來檢視空氣桌的水平。
- 2.由(8)式知，若要求 $\sigma(\psi)$ ，必須先作 ψ 對 b 的關係圖。然後，求 $db/d\psi$ 及 $\sigma(\psi)$ 。本實驗應先利用發射器找到適當的初速^{#1}，然後使圓盤2停止於適當位置，射出圓盤1，記錄兩個圓盤的運動軌跡，量取對應的 ψ 與 b 。
- 3.改變兩圓盤的位置關係(即改變 b)，至少取10組軌跡(注意避免軌跡重複)，每次均量取各組軌跡的 ψ 與 b ，作出 b 與 ψ 的函數關係圖，並由(8)式求出 $\sigma(\psi)$ 。

^{#1} 發射器利用充電原麗，因此每次發射之前須充電一分鐘以上，才能充電完全，使圓盤在射出時具有固定的初速率。

4. 作 $\sigma(\psi)$ 與 $\cos\psi/\sin^4\psi$ 的關係圖，是否為線性關係？如果是，作用力就是庫倫力形式。如果不是，試猜測兩圓盤間作用力的形式可能為何。
5. 任取一組軌跡，證明動量守恆，與角動量守恆。若是 $m_1 = m_2$ ，散射方向與反彈方向應夾成何種角度？

五、問題：

1. 如果加速度 a 的方向不是沿著 y 軸，而是與 y 軸夾 α 角，則圓盤之軌跡方程式是否還是拋物線？請解釋你的答案。
2. 實驗(一)的火花打點是由一個圓盤所得，為何仍需在空氣桌上放兩個圓盤？
3. 試估計空氣黏滯力的大小，並討論它對拋物線軌跡的影響。
4. 步驟(二)－4的結果是否表示作用力為庫倫力？請說明你的答案。

六、參考文獻：

1. H. Goldstein: Classical Mechanics, 2nd ed., (東南書報社，台灣版，1985.), p.114。
2. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles & Systems, 2nd ed., (歐亞書局，台灣版，1985), §9-4, §9-5, p.302。 3rd ed., §8-9、§8-10, p.322。
3. M. Alonso & E. J. Finn: Physics (美亞出版社，台灣版，1979), §7-11, p.122, §18-3, p.393。