

扭擺

一、目的：

觀察扭擺的振盪、阻尼振盪和強迫振盪。

二、原理：

假設有一組質點，運動時所有質點都具有相同的角速度 $\omega_1 \equiv \omega$ ，那麼相對於任一固定點，這個系統的總角動量 L 可以寫成

$$L = \{I\} \omega$$

其中 $\{I\}$ 為轉動慣量張量， ω 為角速度。 $\{I\}$ 的元素 I_{ij} (i, j 代表 x, y 或 z) 為

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (2)$$

其中 m_{α} 是第 α 個質點的質量， $x_{\alpha,i}$ 是質點的 i 坐標。如果質點組為連續體，則

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dV \quad (3)$$

因此，角動量的 i 分量 L_i 為

$$L_i = \sum_j I_{i,j} \omega_j \quad j = x, y, z$$

轉動動能

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= 1/2 \omega \cdot L \\ &= 1/2 \omega \cdot \{I\} \omega \end{aligned}$$

選取適當的坐標系，可以使轉動慣量張量的非對角線項為零，在這個坐標系內，轉動慣量張量表示為

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

角動量和轉動動能就可以簡化成

$$L_i = I_{ii} \omega_i$$

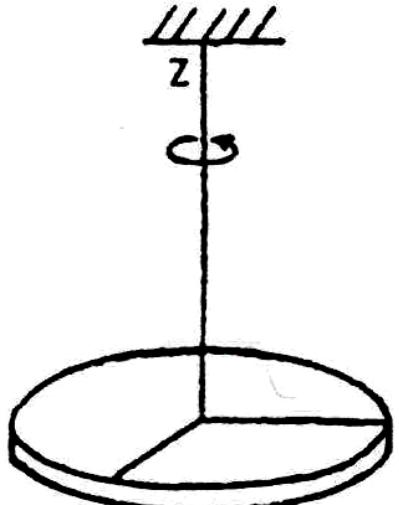


圖 1 物體繞對稱軸運動

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i I_{ii} \omega_i^2$$

這組座標軸稱為主軸。對於具有對稱性的物體而言，主軸也是它的對稱軸。物體在做轉動時，並不一定是繞著某一個主軸，因此在慣性座標系統內，主軸可能是隨時間而變的。

如果物體為分佈在x-y平面上的二維系統，可以把座標原點設定在物體上，所有質點的z均為零，因此 $I_{zz}=I_{yz}=0$ ，因為繞Z軸旋轉，

$$L = I_{zz} \omega_z \hat{z} \quad (5)$$

本實驗的扭擺是利用螺旋形彈簧對旋轉盤施一個沿角度方向的力，因為旋轉盤是一個二維系統，而且它的轉軸為通過質心的對稱軸。訂此軸為Z軸，則 $\omega=\omega_z \hat{z}$ ，角動量只有Z方向的分量 L_z ，施加外力的力矩 τ 與角動量之間的運動方程式為

$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad (6)$$

螺旋形彈簧對旋轉盤所施的力與角速度成正比，因此力矩 τ 也與角位移成正比，寫作

$$\tau = -\kappa \theta \quad (7)$$

其中 κ 為扭轉係數。將(5)、(6)、(7)式合併，得到

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = -\kappa\theta \quad (8)$$

這裡的 I 實際上是前面所述的 I_{zz} 。雖然 I_{xx} 、 I_{yy} 、 I_{xy} 均不為零，但是因為轉動沿著Z軸，這三個轉動慣量並不影響運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0 \quad (9)$$

這與前面所學過的簡諧運動方程式相似。轉動盤做 θ 方向的角簡諧運動。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (10)$$

如果我們在實驗系統中加入磁鐵，則構成阻尼振盪系統。如果加入驅動馬達，則構成強迫振盪系統。有關阻尼係數，強迫振盪的頻寬， θ 值等原理，在空氣軌的振盪實驗中已經探討過，因此不再贅述。

三、儀器：

空氣桌裝置、底座、旋轉盤、鏢形鋁片、大型鋁圓盤、馬達、彈簧中心柱、螺旋形彈簧圈、10N彈簧秤、三角架、直流電源供應器、吹風馬達。

[注意事項]

空氣桌的主要結構是兩個圓盤。上圓盤經由馬達帶動，可作固定頻率的轉動，稱為旋轉盤。下圓盤有許多小孔，可以由吹風馬達供應空氣，將上圓盤吹起，使它在不受摩擦的情況下轉動。使用空氣桌時，必須特別注意下列事項：

1. 實驗當中，必須先把風送入空氣桌內，才可以把旋轉盤放上去，而且要在旋轉盤拿掉後才可以關掉吹風馬達的電源。
2. 把儀器固定在旋轉盤上時，切記要運用適當長度的螺絲。儀器鎖緊後，一定要檢查螺絲不可以突出於轉盤的下方。
3. 旋轉盤取下後，放置時必須上下顛倒，也就是有白線的那一面朝下，以免損壞底面。
4. 驅動輪轉動後，旋轉盤會循順時針方向轉動，此時千萬不可施加逆時針方向的力，以免損壞馬達。

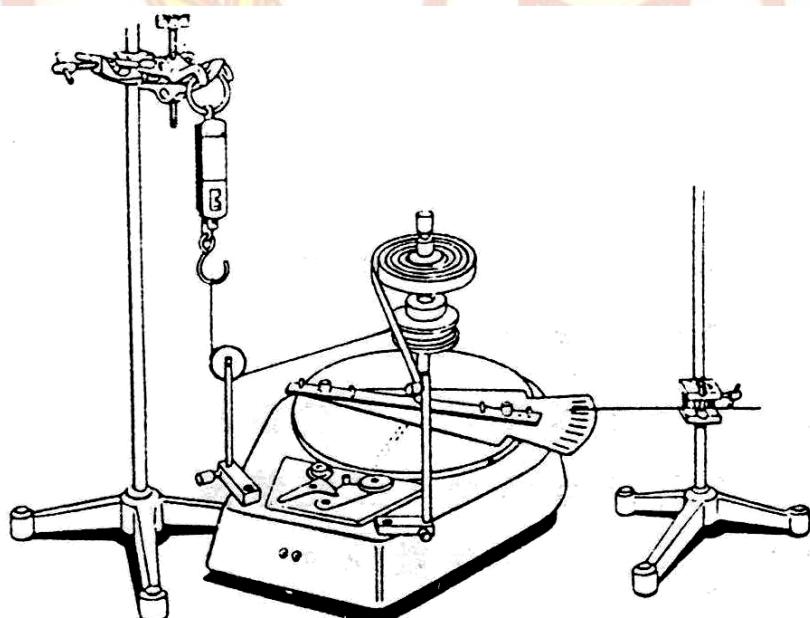


圖2 扭擺基本裝置圖，利用彈簧稱決定扭轉係數 κ 。

四、步驟:

(一)扭轉係數 κ 的測定

1. 裝置扭擺系統如圖2所示。
2. 注意事項:
 - a. 實驗中，系統必須隨時保持水平。(為什麼?)
 - b. 彈簧片固定於支持棒時，必須使彈簧片長直部分持平，並與支持棒垂直。
 - c. 以插梢夾住繩子，插入最大輪軸小孔中，繩子須水平，而且不能對輪軸有任何作用力。
3. 改變彈簧稱高度，使扇形金屬片摶一角度(其上的刻劃，每格為 $1/10 \text{ rad}$)，記錄角度與作用力，作 $\tau - \theta$ 圖決定扭轉係數 κ 。

(二)週期與轉動慣量的關係:

1. 取下扇形金屬片和彈簧稱，換上大圓盤。
2. 使大圓盤旋轉某一小角度之後釋放，測量振盪週期。由公式(10)計算系統的轉動慣量 I 。
3. 以不同組合將250g與1000g的圓柱體放在7.5 cm或15cm的支柱上，測量每一種組合的振盪週期(組合時，轉動系統仍須水平)。
4. 以 T^2 對 ΔI 作圖，驗證 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$ ，並求出大圓盤的轉動慣量，並由直線斜率計算彈簧的 κ 值，與(一)的結果作比較。[提示 $T^2 = (4\pi^2/\kappa)(I_0 + \Delta I)$, I_0 為大圓盤的轉動慣量， ΔI 為組合的轉動慣量， I 為整體的轉動慣量]

(三)阻尼與強迫振盪

1. 參考圖3選擇適當的磁鐵位置與轉動慣量，以便進行阻尼與強迫振盪的測量。
2. 不要連接驅動馬達，將大圓盤轉某一個角度後放開，觀察阻尼振盪，測量振盪週期，並記錄振盪隨時間變化的情形，求出阻尼係數 λ 。
3. 以橡皮筋連接馬達，以直流電源供應器調整馬達頻率，記錄不同頻率下的振幅，作振幅與頻率的關係圖，決定 $\Delta\omega$ 並與上一步驟 λ 之作比較。
4. 改變磁鐵位置，重複2、3，至少做出三種 λ 值不同的頻率響應圖，並討論之。

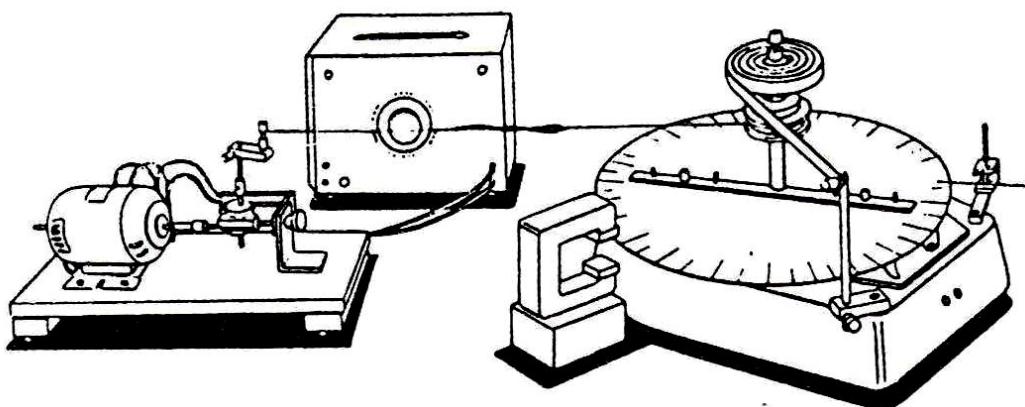


圖3 阻尼振盪與強迫振盪的裝置圖

五、問題:

實驗中，扭擺的轉軸與主軸有何關係？

六、參考資料:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles & System, 2nd ed. (歐亞書局，台灣版，1985) chap.3, chap.4, p.92~ p.149 (3rded., §3-1~§3-10, p.98~ p.135)。
2. 李怡嚴:大學物理學，第一冊，十五版(東華書局，民國七十六年) §6-5, p.369 ~p.372。
3. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics, 2nd ed. vol.1 (美亞、台灣版，1981) §12-6, p.335 ~ p.337 。