力學耦合振盪

一. 目的:

研究質量彈簧系統耦合振盪和強迫耦合振盪的現象。

二、原理:

(一) 耦合振盪

兩部滑車S_1和S_2，質量分別為m_1與m_2，和三條彈簧以圖1所示的方式連接。彈簧的力常數分別為k_1、k'及k_2。如果任意推動某一滑車，S_1或S_2是否作簡諧振盪?以下就m_1=m_2= m，k_1= k_2= k的情況，探討S_1與S_2的運動。

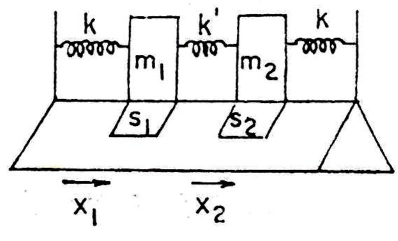

圖 1 耦合振盪裝置。

首先設定S_1與S_2的運動坐標，以S_1與S_2的平衡位置分別作為x_1坐標和x_2坐標的原點。由牛頓定律，可以得到滑車S_1的運動方程式為

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

S_2的運動方程式為

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

因此，所得的方程組為

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

上面的聯立方程式也可以由Lagrangian方法求得(文獻1)。

假設系統作簡諧振盪，可以令

$$x_1 = B_1e^{j\omega t}$$
$$x_2 = B_2e^{j\omega t}$$

代入方程組中，得

$$(-m\omega^2 + k + k')B_1 - k'B_2 = 0$$
$$-k'B_1 + (-m\omega^2 + k' + k)B_2 = 0$$

這是二元一次聯立方程組，B_1與B_2不同時為零(否則便沒有振盪)的條件是

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2+k+k') & -k' \\ -k' & (-m\omega^2+k'+k) \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(-m\omega^2+k+k')^2-k'^2=0$$

解之得

$$\omega^2=\frac{k+2k'}{m} \quad 或 \quad \frac{k}{m}$$

故振盪的頻率為

$$\omega=\sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \quad 或 \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$$

這兩種振盪模式稱為簡正模式(normal mode)。將ω代入方程組便可以求出B_1和B_2的關係。

(1)反對稱模式:如果 $\omega=\sqrt{(k+2k')/m}=\omega_a$ ，則

$$B_1=-B_2$$

此時兩個滑車作反向的簡諧振盪。

(2)對稱模式: 如果$\omega=\sqrt{k/m}=\omega_s$ ，則

$$B_1=B_2$$

此時兩滑車作同方向的簡諧振盪。

從另一觀點來看，當系統作對稱模式簡諧振盪時，兩滑車的運動方式是同步的，彈賽k'並沒有伸縮，可以看作每一個滑車各自只受一條力常數為k的彈簧作用，振盪頻率為$\omega_s=\sqrt{k/m}$ 而；反之，系統作反對稱模式簡諧振盪時，兩滑車的振幅相同而運動方向剛好相反。k'彈簧約申兩條彈簧的兩倍，此時系統的質心，即k'彈簧的中心點， 並不做運動，相當於把彈簧k'從中點切成兩段，每段力常數為2k'，即如圖2所示，振盪頻率為 $\omega_a=\sqrt{(k+2k')/m}$ 。

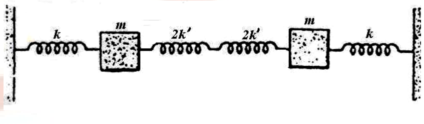

圖 2 簡正模式。

(二)簡正模式的搞合:

假如我們讓兩個滑車作自由運動，這個系統的運動方式是兩個簡正模式的線性組合，也就是說

$$x_1 = A_1 e^{j\omega_s t} + B_1 e^{-j\omega_s t} + C_1 e^{j\omega_a t} + D_1 e^{-j\omega_a t}$$
$$x_2 = A_2 e^{j\omega_s t} + B_2 e^{-j\omega_s t} + C_2 e^{j\omega_a t} + D_2 e^{-j\omega_a t}$$

對於不同的起始狀態，x_1與x_2會有不同的運動方程式。倒如把滑車1平移某一距離α，滑車2則留在原平衡位置(在輕輕按住滑車2的情況下對滑車1施與位移)，然後將兩車同時由停止釋放，便可得到一種起始條件為$x_1(0) = \alpha$，$x_2(0) = 0$，$v_1(0) = v_2(0) = 0$，經過化簡後得到

$$x_1 = \frac{\alpha}{4}\left[e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t} + e^{j\omega_a t} + e^{-j\omega_a t}\right]$$

$$= \alpha \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right)$$

$$x_2 = \frac{\alpha}{4}\left[e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t} - e^{j\omega_a t} - e^{-j\omega_a t}\right]$$

$$= \alpha \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \qquad (4)$$

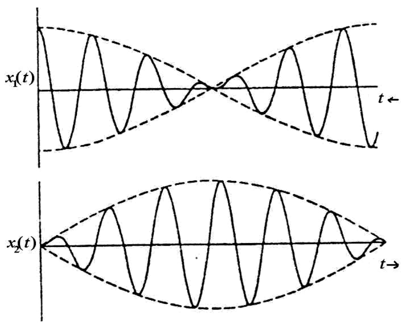

圖 3 耦合振盪中兩滑車位移對時間函數關係。

其運動方式如圖3所示。但要注意的是圖3每一個虛線波包內含有數個較小波形，是$\omega_a \approx \omega_s$的情況下得到的，因此條件是弱耦合(weak conpling) k'<< k，這時彈簧k'需要比兩條k彈簧長很多，而本實驗中三條彈簧性質相近，不易觀察圖3的現象。圖3顯示:當第一個滑車的振幅為極大時，第二滑車的振幅恰為最小，表示能量在兩滑車之間傳遞。

如果採用較一般性的起始條件，兩滑車由靜止釋放，x_1與x_2可表示為

$$x_1 = \alpha_1 \cos\omega_s t + \beta_1 \cos\omega_a t$$
$$x_2 = \alpha_2 \cos\omega_s t + \beta_2 \cos\omega_a t$$

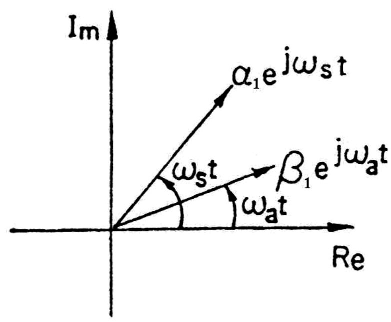

圖 4 以複數平面分析耦合振盪。

可以仿照RLC實驗方式，在複數平面上分析x_1的運動方式(如圖4)，則x_1的振幅會隨時間改變，大小為

$$\left[\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-2\alpha_1\beta_1\cos(\omega_s-\omega_a)t\right]^{1/2}$$

這個振幅會在$\alpha_1+\beta_1$(兩個相量剛好同方向) 與$|\alpha_1-\beta_1|$(兩個相量剛好方向相反)之間，只有在$\alpha_1=\beta_1$的情況下才會得到圖3的情形。在做力學振盪實驗的強迫振盪部份，因為驅動振盪與自然振盪之間的耦合現象，實驗步驟所謂"等振盪穩定"，確實不容易達到，而會觀察到振幅"忽大忽小"的現象。

(三)強迫搞合振盪:

一個自然頻率為ω_0的系統，如果受到頻率為ω的外源驅動，會做強迫振盪，而且在$\omega=\omega_0$附近，振幅非常大，稱為共振。耦合振盪的系統具有兩個自然頻率，在作強迫振盪時也會有兩個共振頻率。我們將在實驗中證實這一點。

我們以理論來分析(文獻2):假設系統受到一個頻率為ω的外源驅動力$F_0\cos\omega t$，直接推動滑車S1，則新的運動方程組為

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2}+(k+k')x_1-k'x_2&=F_0\cos\omega t\\ m\frac{d^2x_2}{dt^2}-k'x_1+(k+k')x_2&=0 \end{aligned} \tag{5}$$

要求出其特殊解(particular solution)，假設

$$\begin{aligned} x_1&=D_1\cos\omega t\\ x_2&=D_2\cos\omega t \end{aligned} \tag{6}$$

代入方程組(4)式，解出D_1、D_2，得到

$$D_1=\frac{(F_0/m)(\omega_0{}^2-\omega^2)}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2-(k'/m)^2}$$

$$D_2=\frac{(F_0/m)(k'/m)}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2-(k'/m)^2}$$

因為$k'/m=\omega_o{}^2-\omega_s{}^2$，$\omega_a{}^2=\omega_o{}^2-\omega_s{}^2$，所以

$$\begin{aligned} D_1&=\frac{(F_0/m)(\omega_0{}^2-\omega^2)}{(\omega_s{}^2-\omega^2)(\omega_a{}^2-\omega^2)}\\ D_2&=\frac{(F_0/m)(\omega_0{}^2-\omega_s{}^2)}{(\omega_s{}^2-\omega^2)(\omega_a{}^2-\omega^2)} \end{aligned} \tag{7}$$

將D_1、D_2對ω作圖即可得到圖5的關係圖，圖中負值振幅表示滑車運動與驅動力相位相反。當驅動頻率在ω_s時，兩滑車做同向運動，而驅動頻率在ω_a附近時，兩滑車作反向運動。

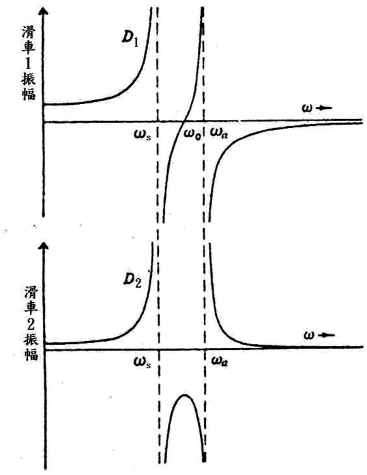

圖 5 強迫振盪時各滑車振幅與驅動頻率的關係。

三 儀器與配件:

空氣軌、滑車、彈簧、磁鐵、驅動馬達、馬表、直流電源、車擺。

四、步驟:

(一)耦合振盪:

1.避取k值相同的彈費兩條，中間連接一部滑車，使滑車作小振幅振盪，測量振盪的週期，以決定k值。

2.兩部滑車以圖1所示的方式連接(必須各貼兩塊小磁鐵)，任意推動滑車，觀察所引起的運動是否為簡諧振盪。

3.將兩部滑車同時向右移10 cm，同時放手，觀察兩車是否作簡諧振盪，測量振盪週期。

4.將兩部滑車向相反方向各移5 cm，同時放手，觀察兩車是否作簡諧振盪，並測量振盪週期。

5.ω_a與ω_s各為多少? 它們的比值是多少? 試與理論計算值比較。

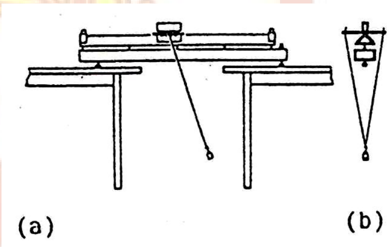

圖 6(a)滑車-單擺耦合系統。
(b)單擺側視圖。

(二)強迫耦合振盪:

1.如圖1方式連接滑車，並在滑車土附貼磁鐵作為阻尼之用，將一邊的彈簧連接馬達。

2.改變馬達頻率，觀察振幅的變化，作出振幅對頻率的關係圖。

3.試將所得結果與圖5作比較。

(三)其它耦合振盪:

1.將滑軌架在兩實驗桌之間，以滑車懸掛單擺的系統(如圖 6)作耦合振盪。

2.試以實驗方式決定振盪的ω_s與ω_a。

3.以圖7方式(或更多的滑車和彈簧之組合)進行耦合振盪實驗。試以實驗方法找出簡正模式(normal mode) 來?

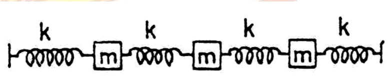

圖 7 三個以上滑車之耦合振盪。

五、問題:

1. 步驟(一)之2為何需要貼上小磁鐵?小磁鐵質量對於ω有何影響?
2. 在強迫耦合振盪中，如何確定系統已經到達"平衡狀態"？
3. 如果馬達頻率在ω_a或ω_s附近，振幅是否會變得很大，超過彈簧的線性範圍?
4. 試以數學方式探討步驟(三)之1與(三)之2所使用的系統。
5. 你已做過各種關於滑車的實驗，請試著設計一種記錄滑車位置對時間關係的實驗方法。

六、參考文獻:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed., (歐亞書局，台灣版，1985年), §13-2, p.409。(3rd ed., §11-2, p.409)
2. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed., (歐亞書局，台灣版，1985年) ,§13-4, p.415。
3. K. U. Ingard : Fundamentals of Waves and Oscillations (Cambridge University Press, 1988), Chap.5, p.113~ p.149。
4. 李怡嚴:大學物理學，十五版(東學書局，民國76年10月)，§6- 8, p.380。
5. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics (Addison - Wesley Publishing Co., 1967), §12-10, p.367 ~ p.372。