

## RL 電路

### 一、目的：

熟悉 RL 電路電流的變化，能量的消耗，以及對正弦電壓的反應。

### 二、原理：

#### (一) RL 電路電流的增長和衰減現象：

如圖 1(a) 的串聯電路，驅動電壓  $v_i(t)$  為

$$v_i(t) = \begin{cases} V_1 & t < 0 \\ V_2 & t > 0 \end{cases}$$

在  $t < 0$  時，因  $v_i(t)$  為固定值  $V_1$ ，所以迴路電流  $i(t)$  的大小為  $V_1/R$ ，於  $t=0$  時  $v_i(t)$  從  $V_1$  跳到  $V_2$ ，如圖 1(b)。當  $t \rightarrow \infty$  時，迴路電流  $i(t)$  會趨向另一穩定值  $V_2/R$ 。根據 KVL，可得圖 1(a) 電路的狀態方程式為：

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_2 \quad (t > 0) \quad (1)$$

解(1)式時，將起始條件  $i(0^+) = V_1/R$  代入，可得  $i(t)$  的表示式為

$$i(t) = \frac{V_2}{R} - \left( \frac{V_2}{R} - \frac{V_1}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (t > 0) \quad (2)$$

其中  $\tau = L/R$ 。圖 1(c) 所示為  $i(t)$  隨時間呈指數函數形式變化的情形。由(2)式可以直接得到電阻上的電壓  $v_R(t)$  與電感上的電壓  $v_L(t)$ ，分別為

$$v_R(t) = Ri(t) = V_2 - (V_2 - V_1) e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = (V_2 - V_1) e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

根據 RC 電路實驗中定義上升時間  $t_r$ ：與下降時間  $t_f$ ，的原則，RL 電路中電流的  $t_r$  與  $t_f$  為

$$t_r = t_f = 2.2 \tau$$

如果圖 1(a) 的驅動電壓是週期性的方波，則  $v_R(t)$  和  $v_L(t)$  亦隨著方波的週期呈指數函數形式的變化。若  $T/2 \gg \tau$ ，電流有足夠的時間趨向穩定值，如圖 2 所示。圖 3 所示的是  $T/2 \approx \tau$  時， $v_R(t)$  與  $v_L(t)$  的變化情形。

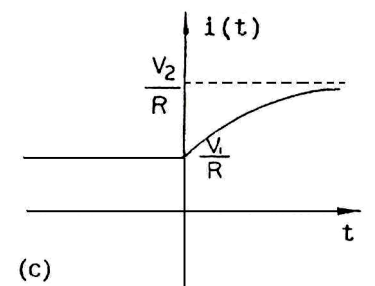
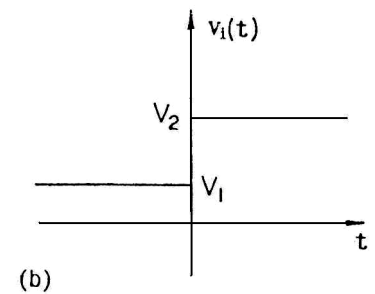
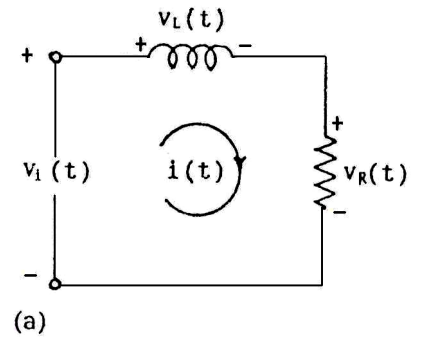


圖 1 RL 串聯電路

- (a) 線路圖
- (b) 輸入電壓
- (c)  $i(t)$  的變化情形

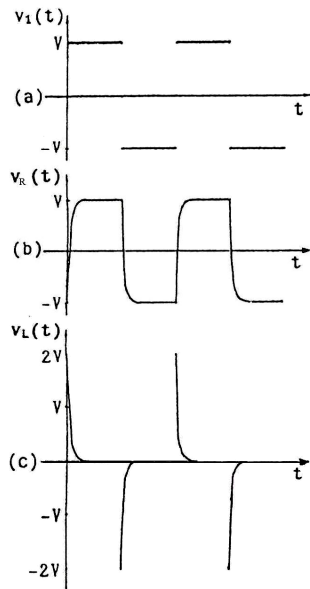


圖 2  $T/2 \gg \tau$  時

- (a)  $v_i(t)$
- (b)  $v_R(t)$
- (c)  $v_L(t)$

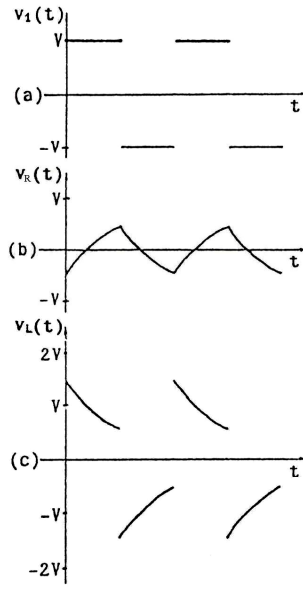


圖 5  $T/2 \approx \tau$  時

- (a)  $v_i(t)$
- (b)  $v_R(t)$
- (c)  $v_L(t)$

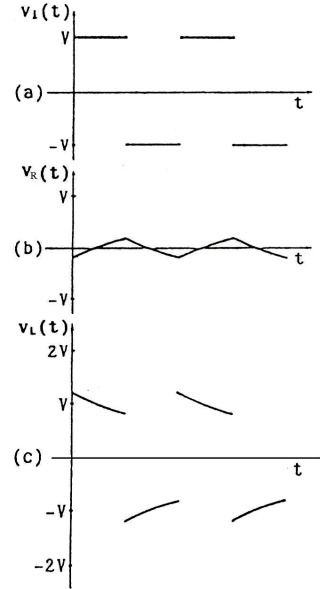


圖 6  $T/2 \ll \tau$  時

- (a)  $v_i(t)$
- (b)  $v_R(t)$
- (c)  $v_L(t)$

因為  $v_R(t) + v_L(t) = v_i(t)$ ，所以  $v_R(t)$  與  $v_L(t)$  兩個波形互補。若  $T/2 \ll \tau$ ，電流沒有足夠的時間趨近穩定值，則  $v_R(t)$  趨近於三角波， $v_L(t)$  反而接近方波波形，如圖 4 所示。

(二) RL 電路對正弦電壓的反應：

圖 5(a) 是以正弦電壓推動 RL 串聯電路，電路的總阻抗<sup>#1</sup> 為  $Z = R + j\omega L$ ，假設  $v_i(t) = V_m \cos \omega t = \text{Re} [V_m e^{j\omega t}]$ ，迴路電流為

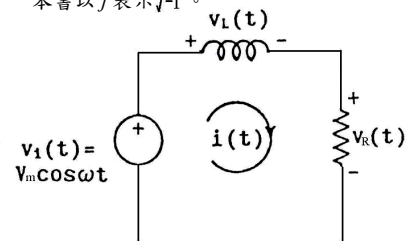
$$i(t) = \text{Re} \left[ \frac{V_m e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \right]$$

$$= \frac{V_m / R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

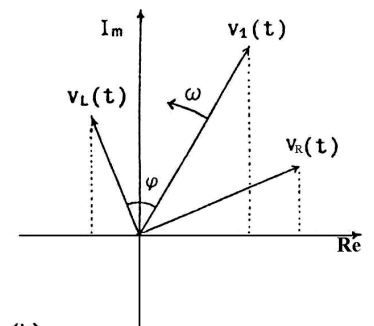
其中  $\phi = -\tan^{-1}(\omega L / R)$ 。讀者可以自行證明：這個電路中的電阻器兩端的電壓(或電感器兩端的電壓)的半功率角頻率為

$$\omega_{1/2} = \frac{R}{L}$$

#1 有關電容、電感的阻抗，請參考"交流電路與阻抗電橋"原理部份。為了與電流符號  $i$  有所區分，本書以  $j$  表示  $\sqrt{-1}$ 。



(a)



(b)

圖 5(a) 正弦電壓驅動的 RL 電路 (b)  $v_i(t)$ 、 $v_R(t)$  及  $v_L(t)$  的相位關係。

所以，(3)式可以改寫為

$$i(t) = \frac{V_m / R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{1/2}}\right)^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_{1/2}}$$

電阻器兩端的電壓  $v_R(t)$  為

$$v_R(t) = Ri(t) = V_{Rm} \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

其中

$$V_{Rm} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{1/2}}\right)^2}}$$

圖 5(b) 表示在複數平面上， $v_i(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $v_L(t)$  以相同的角頻率  $\omega$  循逆時針方向轉動，而且  $v_R(t)$  的相位比  $v_i(t)$  落後  $\tan^{-1} \omega L / R$  ( $\phi < 0$  表示落後)， $v_L(t)$  的相位永遠比  $v_R(t)$  超前  $90^\circ$ ，而且  $V_{Lm}^2 + V_{Rm}^2 = V_m^2$ 。

圖 6 表示  $V_{Rm}$  和  $\phi$  隨  $\omega$  而變的情形。從圖 6(a) 可看出  $V_{Rm}$  隨著頻率的增加而變小。所以，如果在 RL 電路的電阻器兩端取輸出電壓，則圖 5 的電路可以當做一個低通濾波器。

電感器兩端的電壓  $v_L(t)$  為

$$\begin{aligned} v_L(t) &= \operatorname{Re} \left[ j\omega L \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{1/2}}\right)^2}} e^{j(\omega t + \phi)} \right] \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \phi') \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\phi' = \phi + \pi/2$ 。所以， $v_L(t)$  的振幅  $V_{Lm}$  為

$$V_{Lm} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega}\right)^2}}$$

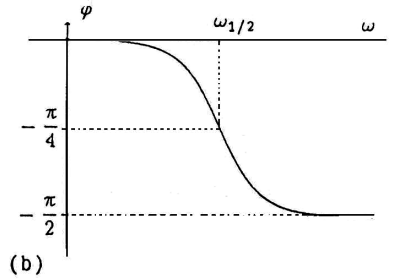
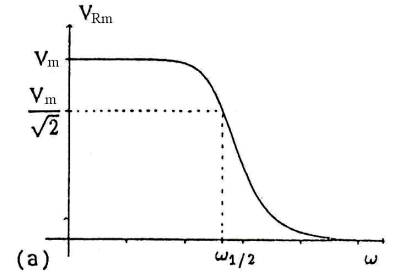


圖 6(a)  $V_{Rm}-\omega$  的曲線圖。

(b)  $\phi-\omega$  的曲線圖。

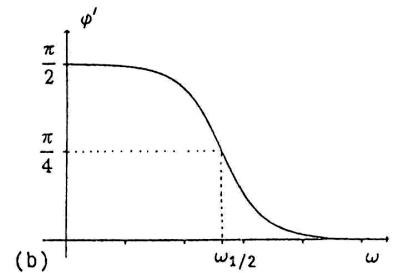
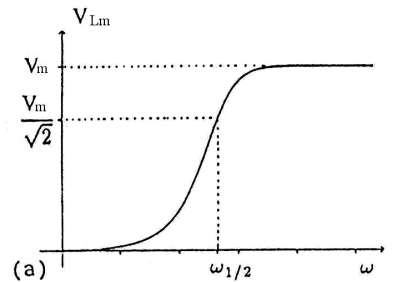


圖 7(a)  $V_{Lm}-\omega$  的曲線圖。

(b)  $\phi'-\omega$  的曲線圖。

圖 7 表示  $V_{Lm}$  和  $\phi'$  隨  $\omega$  而變的情形，從圖 7(a) 可以看出：  
 $V_{Lm}$  隨著頻率的增加而增加，因此，如果以電感器兩端的  
 電壓為輸出電壓，則圖 5 的電路可以當做一個高通濾  
 波器。

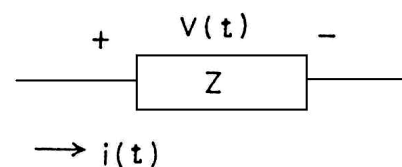


圖 8

(三) 能量消耗：

如果某一元件  $Z$  兩端的電壓為  $v(t)$ ，流經  $Z$  的電流為  $i(t)$ ，  
 其電壓正負與電流方向的關係如圖 8 所示，則元件  $Z$  消  
 耗的瞬時功率 (instantaneous Power, or time varying power)  
 $P(t)$  為

$$P(t) = v(t) i(t) \quad (6)$$

如果電壓的正負和圖 8 的相反，如圖 9 所示，則  $Z$  消耗  
 的瞬時功率  $P(t)$  為

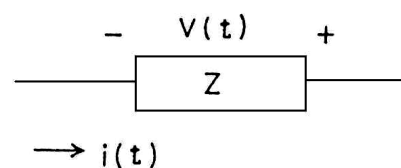


圖 9

$$P(t) = -v(t) i(t)$$

如果圖 8 中的電壓和電流分別為

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

則由 (6) 式可得， $Z$  消耗的瞬時功率為

$$P(t) = V_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

元件  $Z$  所消耗的平均功率  $\bar{P}$ ，定義為每一週期消耗在  $Z$   
 上的能量平均值

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt \quad (8)$$

將 (7) 式直接代入 (8) 式，得  $Z$  的平均消耗功率為

$$\bar{P} = \frac{I_m V_m}{2} \cos \phi \quad (9)$$

其中  $\phi$  為  $v(t)$  與  $i(t)$  的相位差。

在第二單元「對正弦電壓的反應」中，我們曾計算出圖  
 5 電路的迴路電流  $i(t)$ ，電阻電壓  $v_R(t)$  及電感電壓  $v_L(t)$ ，  
 現在再將它們列出如下：

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (10)$$

$$v_R(t) = \frac{V_m R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (11)$$

$$v_L(t) = \frac{V_m \omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi + \pi/2) \quad (12)$$

根據(9)式，因為  $i(t)$  與  $v_R(t)$  的相位差為  $\phi=0$ ，電阻器的平均消耗功率  $\bar{P}_R$  為

$$\bar{P}_R = \frac{V_m^2 R}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

由於  $i(t)$  與  $v_L(t)$  的相位差  $\phi = \pi/2$ ，因此電感器的平均消耗功率  $\bar{P}_L$  為。

$$\bar{P}_L = 0$$

表示在圖 5 的電路中，電感的功用只作能量的儲存、傳遞，而不消耗能量。

圖 5 電路的電源電壓  $v_i(t)$  為

$$v_i(t) = V_m \cos \omega t$$

因為  $v_i(t)$  與  $i(t)$  的相位差為  $\phi$ ，而且電壓的正負與電流方向的關係正好與圖 8 相反，所以，由(9)式可得電源的平均功率  $\bar{P}_V$  為

$$\bar{P}_V = \frac{-V_m^2}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \phi = \frac{-V_m^2 R}{2R^2 + \omega^2 L^2}$$

$\bar{P}_R$  的值為正，表示電阻器消耗能量；與  $\bar{P}_V$  的值為負

表示電源提供能量， $\bar{P}_R$ 、 $\bar{P}_L$  與  $\bar{P}_V$  的關係為

$$\bar{P}_R + \bar{P}_L + \bar{P}_V = 0$$

正好符合能量不減定律。以同樣的方法，讀者亦可證明：在電路中電容器的平均消耗功率為零。

### 三、儀器與配件：

波形產生器、示波器、20mH 電感×1、1kΩ 電阻×1、0.01 μF 電容×1。

### 四、步驟：

#### (一)電流的增長和衰減：

1. 以方波推動圖 10 所示的電路，以 CH1 觀察波形產生器輸入電路的波形；CH2 接到電路的 b 點，觀察電阻器兩端的電壓；或以"CH1-CH2"的方式，觀察電感器兩端的電壓。

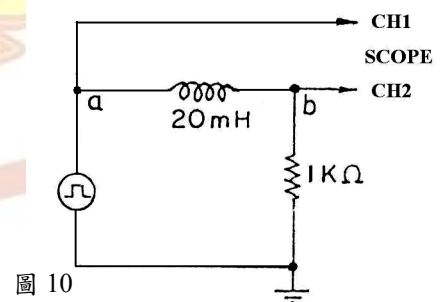


圖 10

2. 分別觀察當方波週期  $T$  在  $T/2 \gg \tau$ ,  $T/2 \approx \tau$ , 和  $T/2 \ll \tau$  情況下,  $v_R(t)$  和  $v_L(t)$  的波形變化。
3. 選用一個適當頻率, 測量 RL 電路的上昇時間  $t_r$  (可以利用示波器上標示的 0%、10%、90%、100% 四條橫線)。測量所得的  $t_r$ , 是否和計算值  $2.2 L/R$  相同?
4. 改用其它 R 和 L 值, 重覆上述步驟 1~3。

(二) 對正弦電壓的反應：

1. 如圖 10 的電路, 但將方波改為正弦波。
2. 觀察電阻器上電壓和相位差隨頻率而變化的情形。記錄幾個不同頻率的電阻電壓和相位差, 並作圖<sup>#2</sup>。  
#2 宜以  $\log f$  為橫軸作圖。
3. 從實驗所得的曲線圖, 找出半功率點  $f_{1/2}$ , 並和計算值比較。
4. 將電感和電阻位置對調, 觀察與記錄電感上的電壓和相位差隨頻率而變化的情形, 並且作圖, 然後找出  $f_{1/2}$ 。
5. 測量電感器的電阻值  $R_L$ , 討論  $R_L$  對  $V-f$  及  $\varphi-f$  關係圖的影響(問題 3)。

(三) 能量的消耗：

1. 如圖 10 的電路, 但將波形產生器的輸出改為正弦波。
2. 測量電流和波形產生器的輸出電壓的相位差, 計算波形產生器的消耗功率(注意正負號)。
3. 分別測量電流與電阻器及電感器上的電壓的相位差, 計算電阻器和電感器的消耗功率, 它們是否符合"能量不減"?
4. 改用相當低的頻率(指  $\omega L$  值與  $R_L$  相近者)重復步驟 2、3。

五、問題：

1. 如圖 11 所示的電路, 原來開關 SW 合上, 直流電源的電流流經 1mH 電感器和 100Ω 電阻器, 電流的大小約為 0.1A。在  $t=0^+$  時把 SW 打開, 試求 1kΩ 電阻器上兩端電壓的波形。 $t=0^+$  時電壓為多少?(提示  $t=0^+$  時, 電流仍為 0.1A 流經 1kΩ) 如果將 1kΩ 改成 10kΩ, 波形會如何?
2. 如圖 12 的電路, 直流電源的電流流經電感 L, 二極體<sup>#3</sup>

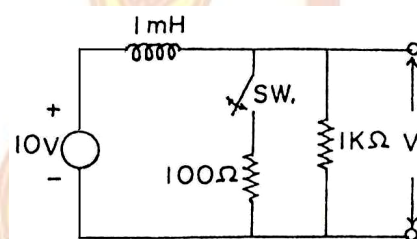


圖 11 問題 1

D 向電容器 C 充電。試證：如果開關 SW 週期性地開合，  
電容器的電壓可以高於直流電源的電壓。

3. 步驟(二)之 4 中，相位差隨頻率變化的情形和原理中所  
述者是否相同？如果有不同之外，試說明之(提示：在低  
頻時，應考慮電感器的電阻)。

六、參考文獻：

D. Halliday and R. Resnick, Fundamentals of physics,  
extended 3rd ed., ( John Wiley & Sons, Inc., 1988), §33-4,  
p.767~p.769。

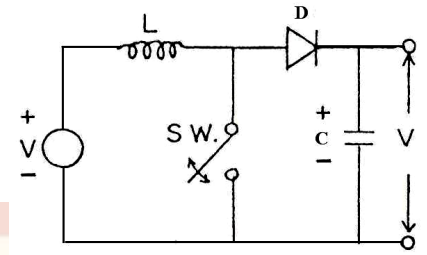


圖 12 問題 2

#3 參看實驗單元"二極體"

