

## 耦合振盪電路

### 一、目的：

觀察耦合的兩個振盪器間能量轉移的情形，以及整個系統對正弦電壓的響應。

### 二、原理：

#### (一)簡正模式(normal mode)：

在RLC電路實驗中，我們可以觀察到LC電路(圖1)振盪的自然頻率和強迫振盪的共振頻率均為(請參考RLC電路實驗)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

如果把兩個相同的LC電路用一個電容器C'耦合起來，如圖2所示。當左邊的電路振盪時，C'的電壓會隨著振盪而帶動右邊的電路，反之亦然。如此一來，能量會週期性地在左右兩個振盪器之間轉移。

以 $q_1$ 、 $i_1$ 表示左邊振盪器的電量和電流，以 $q_2$ 、 $i_2$ 表示右邊振盪器的電量和電流，並規定電荷極性及電流方向如圖2所示。

把環路定理應用於左邊的環路，可以得到：

$$\frac{q_1}{C} + L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1 - q_2}{C'} = 0$$

以 $i_1 = dq_1/dt$ 代入上式，得到

$$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 - q_2}{C'} = 0 \quad (1)$$

同理，從右邊的電路可以得到

$$-\frac{q_1 - q_2}{C'} + L \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C} + \frac{q_1 - q_2}{C'} = 0 \quad (2)$$

為了找出簡正模式解，假設 $q_1 = q_{10}e^{j\omega t}$ ， $q_2 = q_{20}e^{j\omega t}$ (請與力學耦合振盪比較)，為代入(1)式和(2)式，解出 $\omega$ 的兩根 $\omega_s$ ， $\omega_a$ 為

$$\omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

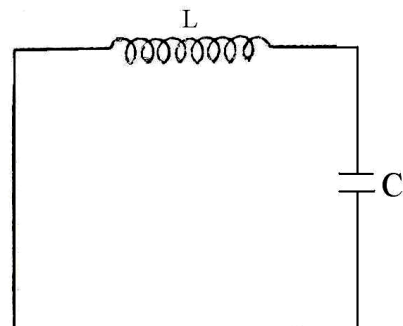


圖1 LC振盪電路。

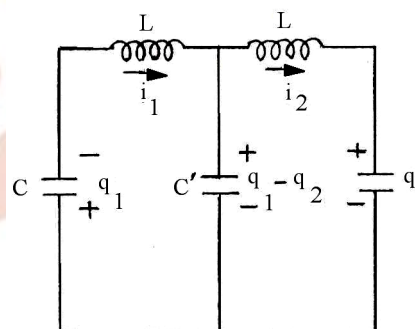


圖2 耦合振盪電路。

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} \left( 1 + \frac{2C}{C'} \right)^{1/2}}$$

這就是 LC 耦合電路的簡正模式， $\omega_s$  為對稱模式的振盪頻率， $\omega_a$  則為反對稱模式的振盪頻率。

(二) 能量的傳遞:

在一般情況下，電量並不是以簡正模式振盪，而是以它們的線性組合方式振盪，可以表示成

$$q_1 = A \cos(\omega_s t + \alpha) + B \cos(\omega_a t + \beta)$$

$$q_2 = A \cos(\omega_s t + \alpha) - B \cos(\omega_a t + \beta)$$

A、B、 $\alpha$ 、 $\beta$  都是常數，由起始條件來決定。如果 B=0，則系統作對稱模式振盪；如果 A=0，則系統作反對稱模式振盪。假設在 t=0 時，兩個環路都沒有電流，所有的電量都儲存在左邊的電容器內，也就是說，所有能量都存在左邊的電容器內，右邊的能量為零，則由這個起始條件，可以得到三個關係式(3)、(4)與(6):

左邊電流為：

$$i_1 = -\omega_s A \sin(\omega_s t + \alpha) - \omega_a B \sin(\omega_a t + \beta)$$

電流為零，即

$$-\omega_s A \sin \alpha - \omega_a B \sin \beta = 0 \quad (3)$$

同理，右邊電流為零，得到

$$-\omega_s A \sin \alpha + \omega_a B \sin \beta = 0 \quad (4)$$

由(3)、(4)式可得

$$A \sin \alpha = B \sin \beta = 0 \quad (5)$$

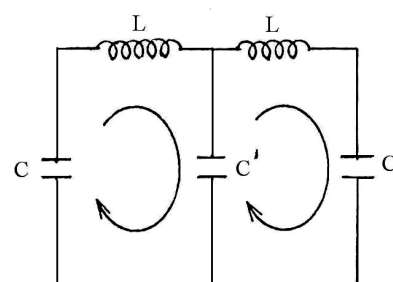
右邊電量為零

$$q_2 = A \cos(\omega_s t + \alpha) - B \cos(\omega_a t + \beta)$$

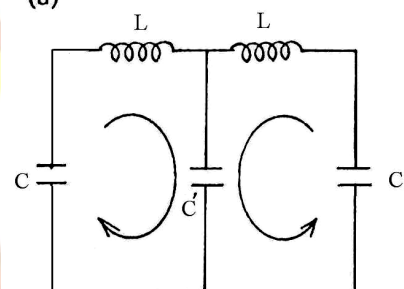
即

$$A \cos \alpha = B \cos \beta \quad (6)$$

由(5)<sup>2</sup>+(6)<sup>2</sup>，可得



(a)



(b)

圖 3(a) 對稱模式。

(b) 反對稱模式。

$$A^2=B^2$$

因為電路振盪絕對不會有  $A=B=0$  的可能性，因此由(5)式，可得  $\sin \alpha = \sin \beta = 0$ 。可以令  $\alpha = \beta = 0$ ， $A=B$

$$\begin{aligned} q_1 &= A \cos(\omega_s t + \alpha) + B \cos(\omega_a t + \beta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \\ q_2 &= A \cos(\omega_s t + \alpha) - B \cos(\omega_a t + \beta) \\ &= 2A \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \end{aligned}$$

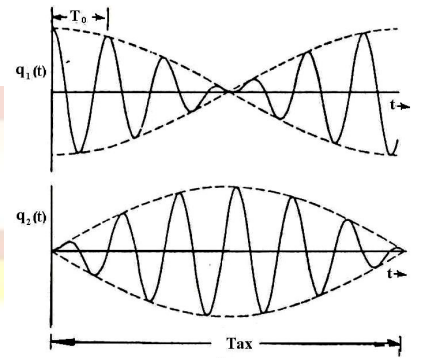


圖 4 兩個電容器上的電量對時間函數圖。

圖 4 繪示了  $q_1$  與  $q_2$  的振盪情形。需要強調的是，目前計算的條件採用了特殊的起始狀況  $q_1(0)=2A$ ， $q_2(0)=0$ ， $i_1(0)=i_2(0)=0$ 。一般而言起始條件可能是  $q_1$  與  $q_2$  同時不為零，或者  $i_1(0) \neq 0$  等等。

當  $C'/C \ll 1$  時，

$$\begin{aligned} \omega_a &\approx \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{C}{C'}\right)} \\ \frac{\omega_a + \omega_s}{2} &\approx \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{C}{2C'}\right)} \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} \equiv \omega_0 \\ \Delta\omega &\equiv \frac{\omega_a - \omega_s}{2} \approx \sqrt{\frac{1}{LC} \frac{C}{2C'}} \approx \frac{C}{2C'} \omega_0 \end{aligned}$$

#1 因為能量  $E = \frac{Q^2}{2c}$ 。

故最後  $q_1$ ， $q_2$  可寫成

$$\begin{aligned} q_1 &= 2A \cos \omega_0 t \cos \Delta\omega t \\ q_2 &= 2A \sin \omega_0 t \sin \Delta\omega t \end{aligned}$$

因為  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ，上面的  $q_1$ ， $q_2$  可以看成以頻率  $\omega_0$  在振盪，只是振幅以的低頻率在變化。由圖 4 可以看出左右兩邊能量來回轉移的情形<sup>#1</sup>。( #1 因為能量  $E=Q^2/2C$ ) 能量轉移的頻率為  $\Delta\omega$  的兩倍：



$$\omega_{ex} = 2\Delta\omega$$

故能量轉移的週期為

$$T_{ex} = \frac{2\pi}{\omega_{ex}} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \approx \frac{C'}{C} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{C'}{C} T_0$$

即能量轉移的週期約為自然週期的  $C/C'$  倍。

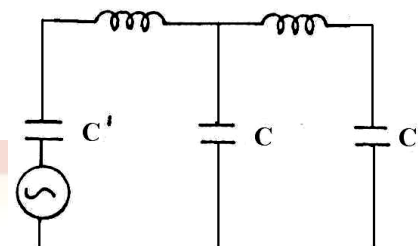


圖 5 強迫耦合振盪電路。

### (三) 強迫耦合振盪電路:

如果以正弦波去推動 LC 耦合振盪電路，如圖 5 所示，(1)式便應改寫

$$\frac{q_1}{C} + L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1 - q_2}{C'} = V_0 \cos \omega t$$

參考力學耦合振盪原理部份(三)強迫耦合振盪的導證過程，我們知道  $q_1$ ， $q_2$  與會以與外源相同的頻率振盪，而且振幅  $D_1$  與  $D_2$  分別為

$$D_1 = \frac{V_0/L(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (1/LC')^2}$$

$$D_2 = \frac{(V_0/L)(1/LC')}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (1/LC')^2}$$

圖 6 表示振幅與外源的關係。

對於電路系統而言，因為沒有辦法做到。電阻為零。的條件(例如波形產生器本身便有 50~60Ω 內阻)，因此阻抗不是純虛數  $j\omega L$  與  $(j\omega C)^{-1}$ ，而是較複雜的形式，因此  $q_1$  與  $q_2$  也不會是單純地與驅動訊號同向或反向，這一點在  $\omega_s$  與  $\omega_a$  附近時特別明顯，實驗中可以注意觀察。

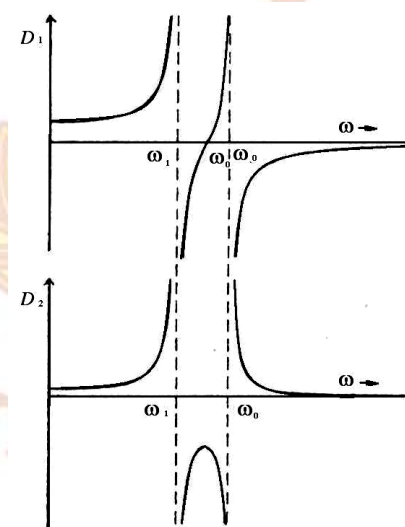


圖 6 電容器上振幅與驅動頻率的關係圖。

### 三、儀器與配件：

示波器，波形產生器，數位三用電表 (DMM)；20mH 電感三個，0.001 μF 電容二個，0.00471 μF 電容，0.01 μF 電容，0.1 μF 電容，100Ω 電阻一個。

### 四、步驟：

#### (一) 正弦電壓的響應(簡正模式)：

1. 以正弦波推動圖 7 的電路<sup>#2</sup>。記錄振盪電路的頻率響應曲線，找出共振頻率  $\omega_s$  和  $\omega_a$ 。與由  $L$ 、 $C$  值計算所得作比較。

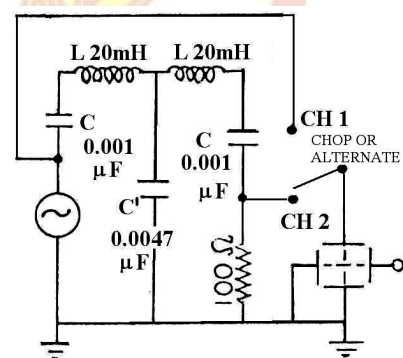


圖 7 以電容器耦合之電路圖。

#2 放置在麵包板上時應避免兩個電感器太靠近，以免產生互感影響實驗結果。

2. 在  $C'$  與地線間串聯一個  $100\Omega$  的電阻，觀察在  $\omega_s$  和  $\omega_a$  附近的頻率響應與前一步驟有何不同？為什麼？

3. 改用其它電容值取代  $C'$ ，重覆上述步驟。

(二) 能量的轉移：

1. 改用方波推動圖 7 的振盪電路。觀察在左右兩振盪器間的能量轉移情形，並測量能量轉移的週期  $T_{ex}$  和振盪器的週期  $T_0$ 。 $T_{ex}/T_0$  是否近似於  $C'/C$ ？

2. 將  $C'$  從  $0.0047\mu F$  改成  $0.01\mu F$  或更小， $T_{ex}$  有何改變？

(三) 其它耦合振盪電路：

1. 改用電感器作為耦合如圖 8 所示，以正弦波推動，作出電路的頻率響應曲線，並決定  $\omega_s$  與  $\omega_a$ 。

2. 以方波驅動圖 8 的電路，觀察能量轉移的情形。

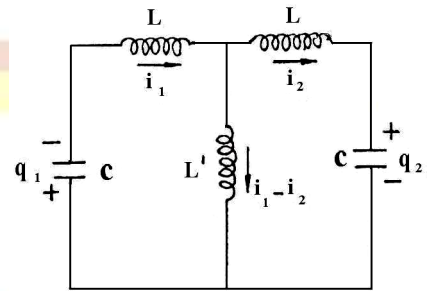


圖 8 以電感器耦合之電路圖。

五、問題：

1. 圖 8 電感耦合電路，試求其自然頻率。其振盪模式是否一為對稱模式，一為反對稱模式？
2. 在步驟(一)中，若以 x-y mode 觀察  $\omega_s$  或  $\omega_a$  附近頻率的 Lissajous 曲線，會看到何種圖形？為什麼？
3. 你的兩個電容器如果 C 值不相同(或者兩個電感器 L 值不同)，對實驗結果會有何影響？試說明之。
4. 圖 7 的裝置為何需要一個  $100\Omega$  的電阻？可以選用更大的電阻，例如  $1k\Omega$  或  $10k\Omega$  的電阻嗎？為什麼？

六、參考文獻：

1. J. B. Marion : Classical dynamics of Particles and Systems, 2nd ed., (歐亞書局台灣版, 1985), §13 - 5, p.418 ~ p.420。
2. K. U. Ingard : Fundamentals of Waves and Oscillations (Cambridge University Press, 1988), Chap. 5, p.113 ~ p.149。