交流電路與阻抗電橋

一、目的：

熟悉電路基本元件的特性並學習阻抗電橋的測量方法。

二、原理

(一)交流訊號：

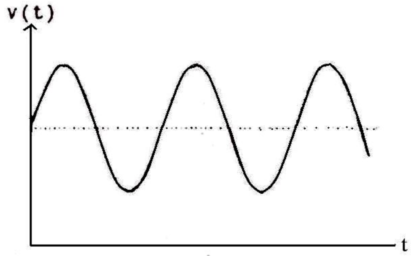


圖 1 含有直流成份與交流成份的信號。

一般所謂交流電是指交變電壓(alternating voltage)或交變電流(alternating current)。他們幾乎都可以用正(餘)弦函數表示，或者被寫成數個正(餘)弦函數之和。一個信號通常包含了直流和交流的成份(圖 1)，習慣上用小寫字母表示變動的量，對應的大寫字母則表示直流、平均值、極大值或均方根值。如交變電壓為：

$$Y(t)=V_m\sin\omega t \qquad (1)$$

式中 V_m 表示振幅，ω 為角頻率。正弦波的頻率 $f=\omega/2\pi$，週期 $T=2\pi/\omega$，由於此種週期函數的平均值為零，通常以均方根值(root-mean-square value，簡稱 rms value)表示其有效值。波函數 $y(t)$的均方根值定義為：

$$Y_{rms}\equiv\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt} \qquad (2)$$

以(1)式的波形為例

$$Y_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m{}^2\sin^2\omega\, tdt}=\frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

因此

$$V_m=\sqrt{2}V_{rms} \qquad (4)$$

一般電表測量交流電壓時均已將電路設計成測量其 rms 值。若要測量振幅，則需使用示波器直接觀察波形。(文獻 1)

(二)電阻：

歐姆定律說明了一個電路元件兩端的電壓 v 和這元件內的電流 i 成正比。通常定義 v/i 的比值為電阻(resistance)，亦即歐姆定律為 $v/i=\text{R}=$常數。這個具有電阻的電路元件稱為電阻器(resistor)，電路中的代表符

號為"R"。如果電壓 v 的單位用伏特，電流 i 用安培，則電阻的單位為歐姆(ohm，簡寫為Ω)。如果一個元件不滿足歐姆定律，則稱之為非線性(或非歐姆式)的元件(文獻 1)。電阻的倒數稱為電導(conductance)Y，單位為Ω^{-1}(或寫成)。

(三)電容及其電抗(reactance)：

電容器(capacitor)C 是儲存電荷 q 的一種元件，通常事由兩個導體，中間以絕緣介質分隔而成，兩導體分別帶電量及$+q$，$-q$，q 的大小與所加電壓 V 成正比，即 $q=CV$，我們定義這個比例係數 C 為電容(capacitance)。電容器的代表符號為"C"，MKS 制單位為法拉(farad)，簡寫成 F，常用的較小單位有微法拉(μF)，奈法拉(nF)及皮法拉(pF)(請參考文獻 4)

假設加在電容器 C 上的電壓為 $v_C(t)=V_m\cos\ \omega t$，則

$$i_C(t)=\frac{dq(t)}{dt}=C\frac{dv_C(t)}{dt}=-\omega\ CV_m\sin\omega\ t$$

$$=\frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}}\cos\left(\omega_t+\frac{\pi}{2}\right)$$

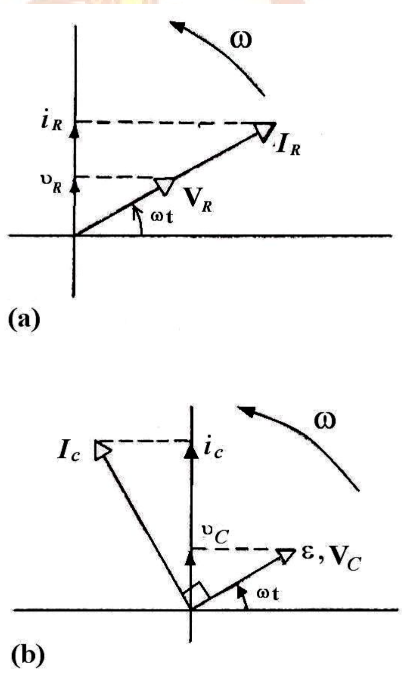


圖 2(a)電阻器的電流與電壓同相位。
(b)電容器的電流與電壓超前 90^o 相位。

因此電容可看成具有電阻值 1/ωC，不過電流比電壓領先 90^o(即 1/4 週期)。1/ωC 稱為電容性電抗(capacitive reactance)，簡稱為容抗，以 X_C 表示，其大小和ω成反比。當電壓為直流時，$\omega\rightarrow 0$，$X_C\rightarrow\infty$；頻率極高時$\omega\rightarrow\infty$，$X_C\rightarrow 0$。

為了計算方便，我們給 $v_C(t)$和 $i_C(t)$加上虛數部份，使它們變成複數平面上的相量(phasor)V_C和 I_C。

$$\mathrm{V_C}=V_me^{j\omega t} \qquad (5)$$

$$\mathrm{I_C}=\frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}}e^{j(\omega t+\pi/2)} \qquad (6)$$

這裡用 j 表示虛數$\sqrt{-1}$，以避免和電流 i 混淆。

圖 2 繪示了 V_C 與 I_C 的關係。(a)圖表示電阻器上 I_R 與 V_R 同相位，(b)圖表示電容器上的 V_C 相量的大小為 V_m，以角頻率循逆時針方向旋轉，其實數分量等於 $v_C(t)$。I_C 相量的大小為 V_m/ωC，也是以角頻率旋轉，不過比 V_C

領先 90°，其實數分量等於 $i(t)$。

由(5)、(6)兩式，我們可以得到

$$\mathrm{I_C} = \frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}} e^{j(\omega t+\pi/2)} = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}} e^{j(\pi/2)} = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C}} V_C$$

因此

$$V_C = \frac{1}{j\omega C}\mathrm{I_C}$$

上次可以看成電容器具有等效電阻值 $1/j\omega \mathrm{C}$，以 $\mathrm{X_C}$ 表之，亦即

$$\mathrm{X_C} \equiv \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$$

所以

$$\mathrm{V_C} = \mathrm{X_C}\,\mathrm{I_C}$$

在作電路分析的運算時，可以採用複數運算，最後結果再取實數部份即可。

(四)電感及其電抗：

電流通過線圈時所造成的磁通量和電流的大小成正比，此比例常數 L 為稱為自感(Self-inductance)，一般簡稱為電感，在線路中的代表符號為"L"。它的 MKS 制單位為亨利(henry)，簡寫為 H，一般較常用的單位有 mH、μH、nH 等(請參考文獻 5)

假設流經電感的電流為 $i_L(t)=I_m\cos\omega t$，則磁通量 $\Phi=L\,i_L(t)=L\,I_m\cos\omega t$，由法拉第定律知：

$$v_L(t) = \frac{d\phi}{dt} = -\omega LI_m \sin\omega t$$

$$= \omega LI_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7)$$

因此電感可以看成具有電阻 ωL，但是電流比電壓落後 90° (即四分之一週期)。這個電阻稱為電感性電抗(inductive reactance)，簡稱為感抗，以 $\mathrm{X_L}$ 表示之，其大小與角頻率 ω 成正比。當
時，；當 $\omega\rightarrow 0$ 時，$\mathrm{X_L}\rightarrow\infty$；當 $\omega\rightarrow\infty$ 時，$\mathrm{X_L}\rightarrow 0$。
，。

對電感也同樣可以引進相量的觀念，將 $v(t)$，$i(t)$ 加上虛數部份，使他們成為相量 $\mathrm{V_L}$，$\mathrm{I_L}$。

$$V_L = \omega L I_m e^{j(\omega t + (\pi/2))} \qquad (8)$$

$$I_L = I_m e^{j\omega t} \qquad (9)$$

由(8)、(9)式，可以得到

$$V_L = \omega L I_m e^{j\omega t} e^{j(\pi/2)}$$

$$= \omega L I_L e^{j(\pi/2)}$$

$$= j\omega L I_L \qquad (10)$$

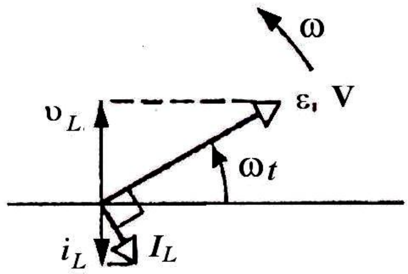


圖 3 電感器的電流與電壓超前 90^{o} 相位。

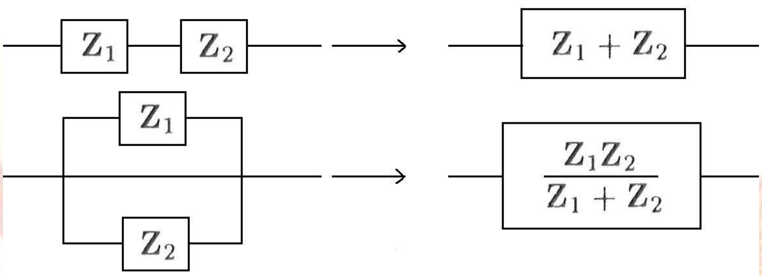
(10)式可以看成電感具有電阻 $j\omega L$，以 X_L 表示之，所以 $V_L = X_L I_L$。圖 3 表示了電感器上 V 和 I 的關係。

(五)阻抗的合成：

前面曾談到電阻 R，容抗 X_C 和感抗 X_L(後兩者合稱為電抗)，如果一個元件同時含有電阻和電抗，則稱為它具有阻抗(impedance)，以複數 Z 表示之，它的絕對值以 Z 表示。由於或 $V_C = I_C X_C$ 或 $V_L = I_L X_L$ 或 $V_R = I R_R$，因此，可以寫成一般式來表示：

$$V = I Z \qquad (11)$$

其中 Z 為電阻 R 與電抗 X_C、X_L 的線性組合。由於(11)式與歐姆定律相同，以電阻的串連和並聯計算公式，可以應用到阻抗的串聯、並聯上。



同學可以自行練習計算兩個電容(或電感)串聯或並聯時的等效阻抗值，並與你以前學過的方法作比較。

(六)阻抗電橋：

利用滑線電橋和幾個標準阻抗，接成簡單的阻抗電橋，可以測量未知阻抗的數值。

圖 4 中的 AB 是一條均勻的電阻線，以信號產生器[#1]供給交流電壓。在 AC 間接上標準阻抗 Z_s，在 BC 間接上待測阻抗 Z_x。在 CD 之間接一耳機。

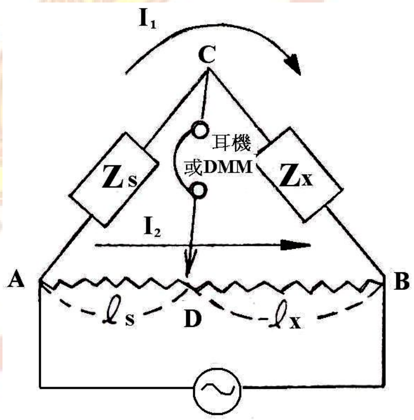


圖 4 用滑線電橋測量未知阻抗的數值。

#1 阻抗電橋的工作頻率通常採用 1kHz 或 10kHz。或頻率可調者。

慢慢移動滑動點 D，如果耳機聽不到聲音就表示 CD 間幾乎沒有電流流過。若要更準確，可以利用 DMM 尋找 V_{CD} 等於零的點(實際上因為 DMM 本身的問題，零點須作修正)，然後量出 AD 的長度 ℓ_s 和 BD 的長度 ℓ_x。

由於這時 V_{CD} 為零，表示 C 和 D 的電位相等，CD 間沒有電流流過，因此可以假設有一電流 I_1 流經 A→C→B；另一電流流經 A→D→B。又因 C 和 D 的電位相等所以 $V_{AC}=V_{AD}$，$V_{BC}=V_{BD}$。而 $V_{AC}=I_1Z_s$，$V_{AC}=I_1Z_x$，假設電組線每單位長度的電阻為 r，則 $V_{AD}=r\ell_sI_2$，$V_{BD}=r\ell_xI_2$ 故得到

$$I_1Z_s=r\ell_sI_2$$

和

$$I_1Z_x=r\ell_xI_2$$

兩式相除消去 I_1 和 I_2，得到

$$Z_x=\frac{\ell_x}{\ell_s}Z_s \tag{12}$$

若所測量者為電阻器，則 $Z_x=R_x$，$Z_s=R_s$，則

$$R_x=\frac{\ell_x}{\ell_s}R_s$$

若所測量者為電感器， $Z_x=j\omega L_x$ ，$Z_s=j\omega L_s$ 則

$$L_x=\frac{\ell_x}{\ell_s}L_s$$

若所測量者為電容器， $Z_x=1/j\omega C_x$ ，$Z_s=1/j\omega C_s$ 則

$$C_x=\frac{\ell_x}{\ell_s}C_s$$

三、儀器與配件：

示波器、波形產生器、滑線電橋、燈泡、標準電阻、標準電容、標準電感、未知電阻、未知電容、未知電感、振盪器、耳機、DMM、0.01 μF 電容一個、20mH 電感一個。

四、步驟：

(一)電抗元件上的電流和電壓的相位關係：

1.接好圖 5 的電路，用示波器測量電容器的電壓 $v_C(t)$與輸入電壓 $v_i(t)$的相位關係。再利用圖 6 測量 $v_R(t)$與 $v_i(t)$的

相位關係。驗證電流領先電壓 90^{o} 的關係。

2.將電容改為電感(20mH)，重複前一步驟，驗證電流比電壓落後 90^{o} 的關係。

(二)歐姆定律：

1.接好圖 7 的電路，在頻率 3kHz 到 7kHz 的範圍內每隔 500Hz，使用 DMM 測 V_R、V_C 與 V_L，其振幅滿足 $V_i = V_R + V_C + V_L$ 嗎?那麼，$V_i^2 = V_R^2 + (V_C - V_L)^2$ 嗎?為什麼#2?

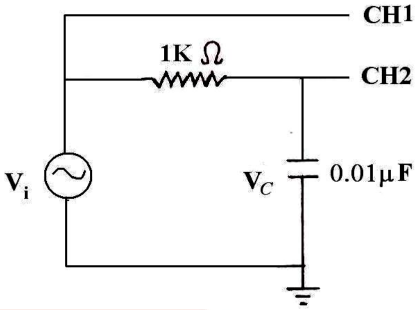


圖 5

#2 參看 RLC 電路原理部份

(三)阻抗電橋：

1.以滑線電橋，振盪器，標準電阻，標準電容或標準電感，接成阻抗電橋，如圖 8 所示。

2.將振盪器的輸出頻率調到 3kHz 附近(因為耳朵對這頻率較敏感)。

3.將標準阻抗與待測阻抗分別放在 Z_s 與 Z_x 的位置，依照原理中的方法改變 D 點位置，直到聽不見聲音。由公式(13)決定待測電阻，電容、電感的值，重複數次，求其平均值及標準差。

4.利用數位阻抗表測量待測電阻，電容與電感的值。將此結果與前一步驟的結果做比較。

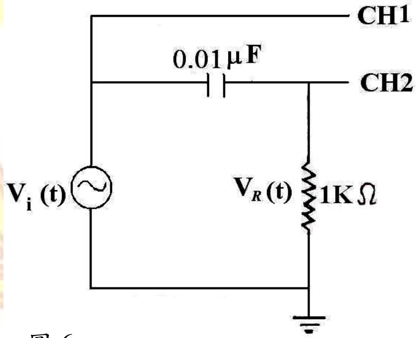


圖 6

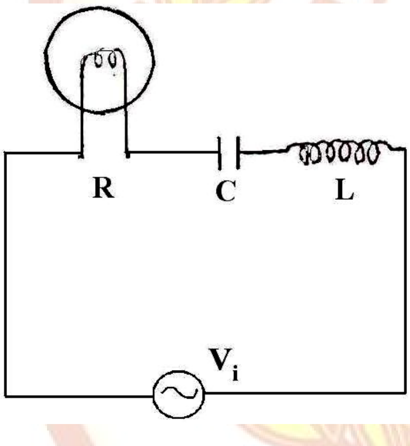


圖 7

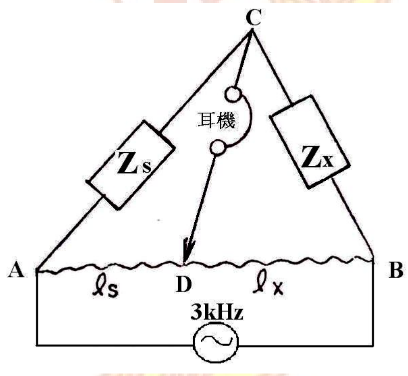


圖 8

五、問題：

(一)一般電容的金屬板上有電阻，內部介電質也會消耗能量[#3]，可是為在理想的電容上串聯一個電阻，因此實際的電容電橋如圖 9 所示。試證明：在 C、D 點等電位時，$R_x=(R_1/R_2)R_s$，$C_x=(R_2/R_1)C_s$。

(二)因為標準電感的製造困難，故常改用馬克斯威爾(Maxwell)電橋代替電感電橋，如圖 10 所示。試證：在 C、D 點等電位時，$L_x=R_1R_2C_s$，$R_x=R_1R_2/R_s$。$Q\equiv\omega L_x/R_x=\omega C_sR_s$ 稱為品質因子(文獻 6)。

(三)你能否想出其他測量阻抗的方法？比較起來電橋有何優點？

#3 我們常定義"消耗因子" (dissipation factor)為

$$D_x\equiv\frac{R_x}{\frac{1}{\omega C_x}}=\omega R_xC_x$$

$$=\omega R_sC_s$$

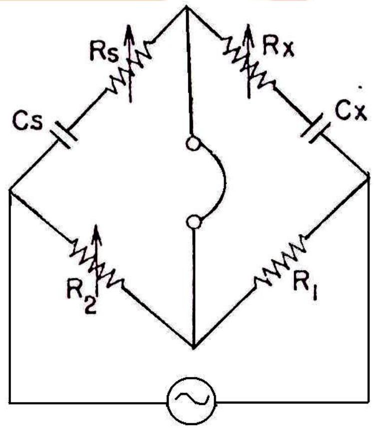


圖 9 問題 1。

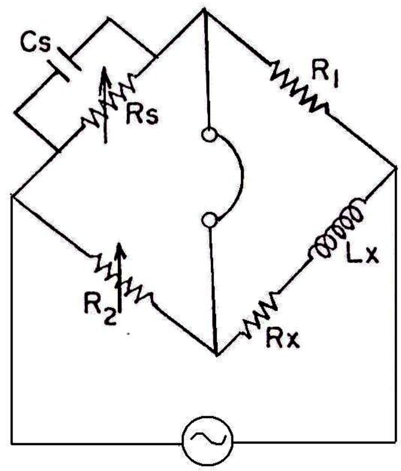


圖 10 問題 2。

六、參考文獻：

1.謝芳生譯：微電子學(Microelectronics)，東華書局，上冊附錄 C-1，p.450-451。

2. D. Halliday & R. Resnick：Fundamentals of Physics, extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, Inc, 1988), §28-4~§28-5, p.645~ p.649。

3.謝芳生譯：微電子學：附錄 C-3,C-4,p.463-465。

4. D. Halliday & R. Resnick：Fundamentals of Physics, extended extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, Inc, 1988), §27-2, p.619~ p.620。

5. D. Halliday & R. Resnick：Fundamentals of Physics, extended extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, Inc, 1988), §33-3,p.766~ p.767。

6. J. B. Marion：Classical dynamics of Particles and Systems, 2rd ed.,(歐亞書局台灣版，1985),§4-4, p125。