# 自然界的照妖鏡

## 傳氏分析法簡介


## 林孝信



原載於科學月刊第一卷第二期，1970




*傳氏分析不僅是現代數學中最美麗的成果之一，而且在討論現代物理的問題時，它又提供了不可或缺的工具 -William Thomson and P. G. Tait*

## 從聲和光的探討談起：

連日的陰悶煩雜，如果偶而抬頭遠眺，一彎七彩霓虹正浮在迷茫的天邊，該是多開心的事，整天融在喧囂吵鬧的市聲中，一曲柔和的琴聲，真是爽心怡情的享受，美的追求，原是人的本性。

呈現在我們眼簾的是五光十色，傳入我們耳朵的有千音百噪。然而，何以有些使我們心曠神怡，有些則煩躁欲嘔?

這不是個容易回答的問題。美感本屬半神祕的領域。但我們仍可找出些客觀的參考標準。雖然美感是種心理現象。但它一定經過視覺神經或聽覺神經接觸到光或聲才產生。這些光，這些聲，倒是實實在在的東西。把這些實實在在的東西拿來

仔細研究, 你會發現, 那些較悅目順耳的部份, 當真有些共同的特徵-比較規則(或對稱)。

問題是:聲和光雖是實實在在的東西, 但也是頗難捉摸的玩意, 例如你眼前的《科學月刊》就是很實在的東西, 因為你可以看得到, 摸得看, 翻書有聲, 字字有形; 但我們要如何解說「看」到的「光」(光的本身)或「聽」到的「聲」(聲的本身)呢?而且, 顯然地, 我們決摸不到「光」或「聲」。既然如此, 我們如何說它是實在的東西?又怎能進一步去研究它呢?

還有, 我們說「比較規則」(或比較對稱)是指什麼而言?聲和光既是捉摸不到的東西, 那該如何來表示這些「特徵」呢?

「聲」和「光」的研究, 是屬於物理學的範圍。但貫穿這些研究, 有一項非常有力的數學工具-傅氏分析法(Fourier Analysis), 是本文所要介紹的。傅氏分析法用途非常廣泛:凡是有週期對稱的現象, 對偶互補的情形, 都非借重它不可。在數學上, 它牽涉的範圈也很廣, 所有線性的玩意(在代數上線性是一次方程式之類的), 都與之有關, 如向量空間(或線性代數), 線性微分方程, 泛函分析等等。

## 傅氏照妖鏡:

那麼, 什麼是傅氏分析法呢?在正式介紹以前, 先來個粗略的概念。春節到了, 火車都擠得不得了。如果有人能不佔空間, 可以「滲」進去, 和別人共「佔」同一位置, 豈不妙哉!

別以為這個想法過於神奇, 自然界中就是有這等「神奇」的事。其實例子說出來, 便一點也不神奇-那就是光或聲。我們都知道, 白色光是由紅橙黃綠藍靛紫合成的, 這不就是好多條光(事實上有無窮多條)擠在一起組成一條白光嗎?

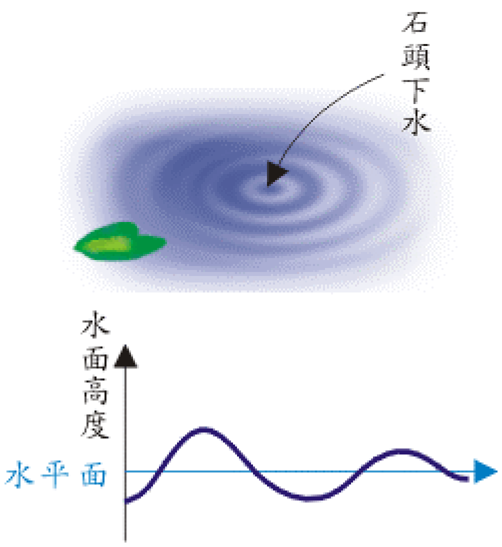
果真有那麼一天, 人能像光線一樣, 佔據同一空間, 那麼查票員就難做了。座位上儼然只有一人正襟危坐, 但保不定有好多條黃牛隱身在裏頭。別坦心!既然我們可以用三菱鏡把白光中的紅橙黃綠光分出來, 我們大可按此要領, 發明個照妖鏡。使裏頭的黃牛一條條原形畢現。三菱鏡分光法, 照妖鏡分牛法, 便就是傅氏分析法。

因此, 我們知道, 只要有許多同類東西可以在同時「擠」在同一地點, 我們便需傅氏分析法。光波如此, 聲波如此, 其他水波, 地震波, 無線電波(它和光波都屬於電磁波)等等無不如此。不論我們聽收音機看電視, 或者研究大至天文, 小至原子分子的變化, 一切都要借助電磁波, 於是傅氏分析便不可缺。

更進一步，雖然在前面火車例子中，要把兩件有質量的東西「擠」在一起。似乎不可思議，但構成我們個體及世界萬物的原子，電子等卻具有這等性質。這套描述原子、電子、核子等的科學叫量子力學(Quantum Mechanics)。量子力學的數學結構也都是一次線性的，傅氏分析便自然而然地跟進來。量子力學是今日物理、化學及部份生物的共同基礎。傅氏分析應用之廣，於此可見一斑。量子力學在傅氏分析下，產生許多有趣的現象-例如一個電子雖由甲點到乙點，但決不是經由某個「軌道」飛過去。這些看來極度矛盾的東西，卻是傅氏照妖鏡下的結果。

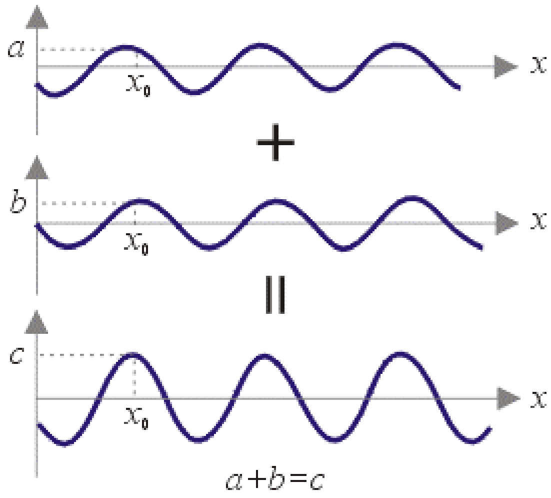
## 如何描述現象呢 ？

為了解「擠」在一起的涵意，讓我們再看看聲和光的例子。前面問到:我們既「看」不到光，「聽」不到聲，我們要如何去描述它呢?原來「聲」和「光」是傳遞能量的一種形式:光是電磁波，聲是空氣的波動。我們且拿水波做例子。丟一塊石頭在水池裏，一圈圈漣漪便四處散開。但這並不是水向四處散開(水面上的樹葉只是上下擺動而已。)只是介質的某些性質傳遞出去，能量便隨之傳遞。對水波而言，介質是水，而介質的「某些性質」就是水面起伏的高度 。把形狀劃出來 ，大約如圖一 。




圖一

倘若投兩塊石子重複之處高度自然相加，則如圖二。這樣自然的相加，便說是水波(由其高度來表示)滿足了「疊加原理」(superposition principle)。這就是所謂「擠」在一起的意義。




圖二

只要我們對一個現象，找出一個代表性的描述法(水波便是水面的高度);這種描述都是些數量(如高度)，這個數量會因時因地而異，於是便寫成一個時間與空間的函數。如果這個函數滿足疊加原理，便叫這現象為一個線性系統 (linear system) 。既是線性系統，自然需要傅氏分析法了。例如聲波是用空氣密度來描述的。光波呢?它是用電磁場的位能來描述的。還有量子力學是用一個質點(或一群質點)某個時間在某地出現的或然率強度(Probability Amplitude)來表示。所有的這些函數都可相加。都是線性系統。嚴格來說。聲波並不是完全線性的，但在通常狀況下，差不多。

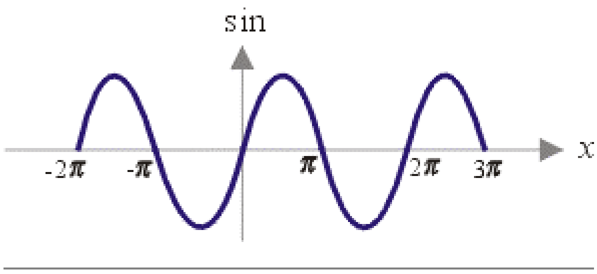
既然有個函數可以代表物理系統的現象，現象特徵的研究便可從函數著手。開頭所提「比較規則」(或對稱)便是指函數的規則或對稱而言。

## 現象的對稱與週期性

我們已解決了一部份問題。接著是:什麼叫「 對稱」?悅耳的聲波有什麼對稱?

先研究常用「對稱」的意義。人的外表，有左手便有右手，有左眼就有右眼。這是左右對稱。如果沿鼻脊有個鏡子，反射過去便如全人。故又叫鏡面對稱。又如一個正六邊形，我們覺得它對稱，因為我們可以旋轉六十度(360 度的六分之一)，回到原狀。這是旋轉某角度的對稱。如果是圓形，則不論旋轉多少度，通通都和原狀相同。故圓也有旋轉對稱，而且旋轉對稱性最高。在這些例子中。我們發現，所謂對稱，都是經某種「運作」(Operation )--如反射或旋轉等--而回到原狀。因此如對某個圖形能找到某種這類的「運作」，我們便說這圖形具有「某種」對稱。

在波中，如我們將這函數沿某方向移一定距離。便和原來圖形吻合。這種對稱，叫平移對稱，或週期對稱。高一所學的三角函數，便都具有這種週期性。例如正弦函數 $\sin x$ 是:




圖三

平移 $2\pi$，函數值不變，即:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

一般說來，如果一個函數 $f(x)$ 是週期的，那一定能滿足下列關係:

$$f(x+a)=f(x)$$

$a$ 叫做這個週期函數的週期。(在波而言:是波長)

傅氏分析是要把加在一起的函數分為許多部份。現在先反過來看，如果把兩個函數加在一起，有什麼現象呢?

顯然地，如果原來兩個函數(或有限個)具有相同的週期及其他性質(如連續性，可微分性，可積分性等)，那麼加起來的函數照樣都有這些性質。例如週期性：

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

倘 $g(x+a)=g(x)$，$h(x+a)=h(x)$
則 $f(x+a)=g(x+a)+h(x+a)=g(x)+h(x)=f(x)$

## 無窮的麻煩

但如把無窮多個函數加在一起呢?問題就很麻煩了。(其實，凡牽涉到無窮的玩意，都有麻煩及陷阱)。且不說是函數相加，就算單純的數字：無窮多個加起來後，性質便往往走樣。例如 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，……每個都是有限而且很小的(全小於 1)，全部加起來卻是無窮大：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\infty$$

但如把 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$ $\ldots$加起來，便是有限的：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=1$$

又如最簡單的函數 $a_n x^n$。(這種冪函數具有一切美德-連續，可微分，可積分等。而且，還可以直接算出其值來，其他的函數，例如次簡單的三角函數，除了特殊值外，通常都非查表不可。例如，請問讀者，$\sin 1=?$)若加上無窮成下式(叫做冪級數)：

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

則許多美德便消失了。舉個特例，如令 $a_n=\frac{1}{n+1}$，則

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots$$

那麼

$$f(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots=\infty$$

根本就發散(Divergent)，不存在了，更別說到連續或積分，微分等性質了。然而，當$|x|<1$時，$f(x)$便是有限值(叫做收斂 Convergent)，而且連續，可微分，可積分。$x=-1$時也是收斂，可積分，但卻不能微分。由此可看出，加起來後在各點的性質都不一致。

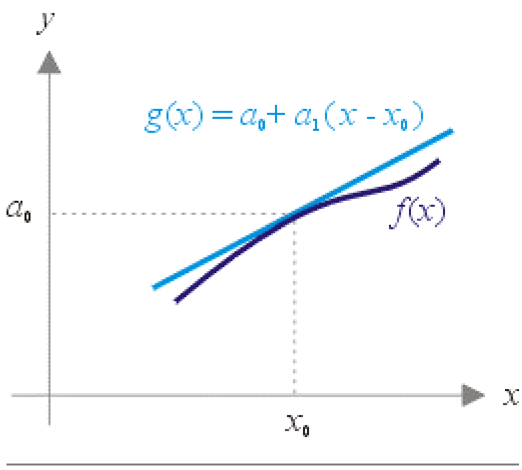
# 冪級數可用來研究函數的局部性質

剛才提過，只有冪函數(Power Function)可以直接求出它的值，而且它所有的性質都很好。但對許許多多其他的函數呢?我們不知道它的數值，我們如何去研究它呢?

整體的研究也許一時辦不到，但我們可以先研究它在某一點 $x_0$ 附近的性質，例如它在 $x_0$ 附近彎曲得不厲害(即很像個線段)，我們便索性用線段來代替它(只在 $x_0$ 附近。)而線段的方程式是一次的，這就是說，我們可用一個冪函數來代表它:

$$f(x)\simeq a_0+a_1(x-x_0),\ (\text{在}x_0\text{附近})$$

$a_0$ 便代表函數在 $x_0$ 的值，而 $a_1$ 則代表函數曲線在該點的切線斜率。




圖四

如果 $f(x)$在 $x_0$彎得較厲害，則我們用一條直線(切線)來代替它，便離譜太遠。有沒有什麼我們較熟悉而彎曲的線呢?有的，我們拋一石子的軌道--拋物線，便是我們最常看到的例子。很巧，拋物線又是二次的。亦即它可寫成:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2}(x - x_0)^2$$

這剛好比剛才切線的近似法增加一項!($a_2$代表曲線曲率)。依此類推，我們要得到更準確的近似值，我們可繼續加高項次:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_3}{6}(x - x_0)^3 + \cdots$$

於是我們可就 $x_0$附近，將 $f(x)$展成-冪級數(叫泰勒級數 Taylor's Series)，而這個函數在 $x_0$附近的局部性質(Local Property)，便可藉這種展開法來研究了，(如函數值，切線斜率，曲率等)

這種展開法雖然方便，卻有很大限制，前面我們談過，無窮級數本身有許多陷阱，非得小心不可 。由剛才討論知道，$a_0$代表函數在 $x_0$之值，$a_1$為斜率，$a_2$為曲率等等，這也就是說 $f(x)$一定要在那點有一固定值，有切線，有曲率等等，(用微積分的話來說，便是 $f(x)$要有一次，二次，三次‧‧‧‧‧‧以至無窮次的可微分)。這是個十分嚴格的限制，許多有用的函數都不滿足此一要求。

如果不能展呢?而且許多函數具有週期性，展成沒週期性的冪函數之和(顯然 $(x+a)^n \neq x^n$ ，除非 $a$=0)，也很不方便，有沒有其他選擇?

## 傅氏級數

有的，我們可以展成三角函數的級數。三角函數對我們也很熟悉，$\sin$ 和 $\cos$ 都具有諸多美德-連續，可微分，可積分，又多了一項週期性。因此對多週期函數(如各種波)，便常展成如下:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ &\quad + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \end{aligned}$$

這級數叫傅氏級數(Fourier Series)，是法國數學家傅立業(Fourier)首先研究的。(關於傅立業生平，請參看本期曹亮吉寫的傳記:數學中美麗詩篇的創作者)

傅氏級數是傅氏分析的先河，用途極為廣泛。因此先介紹些它的性質。

週期性--因為每一項本身有週期性，所以它們的和也有週期性。

(1)是不是任何函數都可展成傅氏級數? 不一定如此，它依然有些限制。但這限制要比展成冪級數鬆得多，不僅函數不需有各次微分 ，甚至還可以不連續(但不能是無窮大。此時不連續點的級數值等於函數在該點的平均值)，只要在一週期內沒有無限多的局部極大與極小(亦即不能無限次上下振動)，這個函數便可展成傅氏級數。這個傅氏定理是傅氏級數的中心定理。

(2)怎麼展成傅氏級數呢?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots\cdots \\ &\quad + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots\cdots \end{aligned}$$

換句話說，給你一個函數 $f(x)$，如何去求 $a_n$ 及 $b_n$(叫做傅氏係數 Fourier Coefficent)呢?

求 $a_n$及 $b_n$需用點積分知識（若你對積分不熟，請見最後的附錄）。你若須求 $a_n$，便在上式兩端各乘 $\sin nx$。再積分一週期(如從 0 到 $2\pi$ )，所有

其他項次便都等於零，右邊便只留下 $a_n$ 項了。同法用來求 $b_n$(改乘以 $\cos nx$ )，其結果是:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \end{aligned}$$

# 傅氏分析

從計算 $a_n$ 及 $b_n$ 出發，數學家發現許多問題，這些問題刺激了十九世紀數學許多部門的發展(請參看曹亮吉文)。這裏我們簡介最密切相關的兩個部門:泛函分析與向量空間。

我們知道, 積分是求面積, 求函數曲線到 $X$ 軸間所圍成的面積. 如果函數值愈大, 積分的值便跟愈大. 換句話說, 積分值隨函數的大小而變化, 亦即它是函數的「函數」(通常的函數，自變數是數，但在這裏，自變數不是一個一個數，而是函數本身，所以說是函數的「函數」)這門學問，叫做泛函分析 (Functional Analysis)，在傅氏級數裏，$a_n$ 及 $b_n$ 都隨 $f(x)$ 而變，都是函數的函數，我們便可體會到，它和泛函分析一定有密切關係。

再進一步討論，我們發現這種積分的「函數」，是線性的運算。亦即它滿足下列兩個條件:

$$\begin{aligned} \int kF(x)dx &= k(\int F(x)dx) \\ \int (F(x)+G(x))dx &= \int F(x)dx + \int G(x)dx \end{aligned}$$

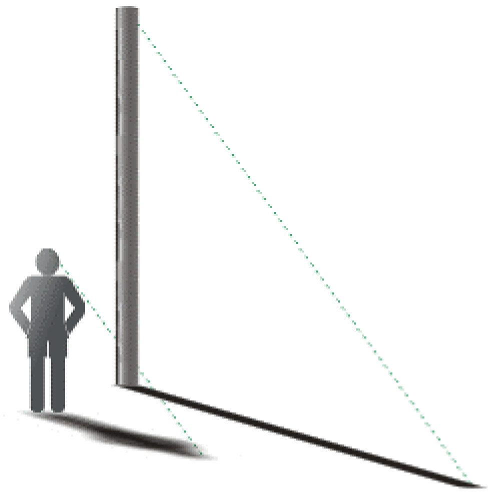
所以，在傅氏係數中，如果 $f(x)$ 的係數是 $a_n$ 及 $b_n$，那麼將 $f(x)$ 乘上常數 $k$ 倍，則 $kf(x)$ 係數為:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} kf(x)\sin nx dx = k(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx) = ka_n$$

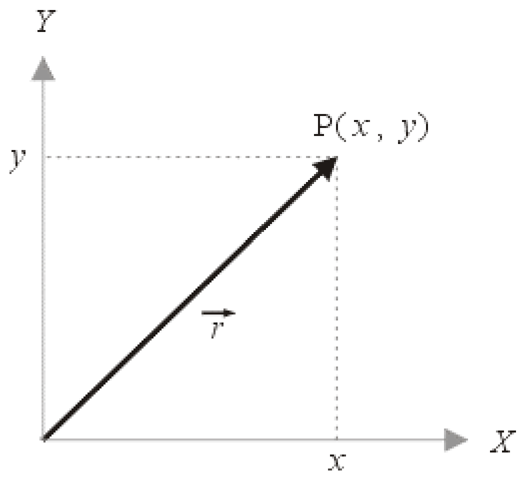
亦即是 $ka_n$ 及 $kb_n$。這種正比性質，我們到處可見。例如太陽斜照電線桿，電線桿愈長，影子也必愈長;如圖五所示:這種投影(Projection)，便是正比關係，在數學上非常重要。一部解析幾何學是建基在座標上，而座標便需基於投影的方法，才能求得一點(或一個位置向量)在各座標軸上的分向量;如圖六所示:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$x$有如太陽在正上空垂直照射向量 $\overrightarrow{OP}$，所形成於地面($X$軸)上的影子。



圖五




圖六

注意到了嗎?把一個函數展成傅氏級數，和把一點寫成座標(或分向量)完全類似，只不過傅氏級數的「分向量」(或「座標」)有無窮多個(即 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$)而在平面卡氏座標上，分向量只有兩個(即 $x$ 及 $y$)。至於 $\sin nx$ 及 $\cos nx$，便相當於座標的單位向量 $\hat{i}$ 及 $\hat{j}$。

所以展成傅氏級數，等於求一個向量在各座標軸的分向量。這樣，我們可以了解開頭所說的:傅氏分析與向量空間有密切關係。

還有，前面我們說過，傅氏照妖鏡，可以把疊加在一起的函數分開。怎麼分開呢?讀者現在可以猜到，所謂分開，便是展成傅氏級數，求傅氏係數。(此相當於將一向量分解，求其分向量。高三的讀者當已知道，向量的加法正滿足疊加原理。)這時分解後，所有分向量都是最簡單漂亮的正弦函數 $\sin nx$ 或餘弦函數 $\cos nx$ 的倍數。這種將一個複雜的週期函數分出簡單的部份($\sin$ 及 $\cos$)，特別叫做諧和分析 (Harmonic Analysis)，在聲學上，在音樂上，都有用途。

# 傅氏積分

以上大致討論了傅氏級數的情形。我們發現它真的有許多優良性質。除了連續，可微分，可積分，週期性，線性外，大部份的函數又都可以展成傅氏級數。所有的性質都是那麼理想，線性尤其可愛--但是，如果一個函數沒有週期性呢?這類函數一定不少(事實上，週期的函數只佔少數)，我們能否也仿前述方法，將之展成某些分向量的形式呢?因為這麼一來，我們便也可以用線性代數(即研究向量空間的數學)的方法來研究，我們便也能將任何一個無週期性函數也「傅氏」分析出來?

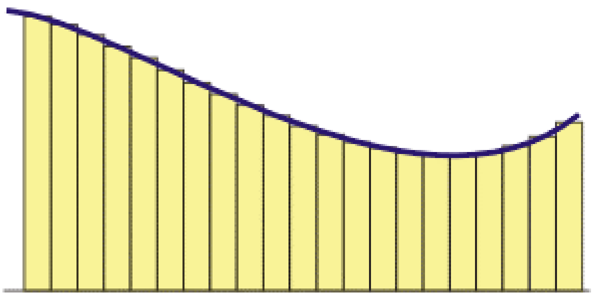
# 怎麼辦呢?

且先檢討一下週期函數的意義。所謂週期函數，便是自變數 $x$ 加大一個定數(此數即週期) $a$，其值不變。從幾何圖形看來，這就相當於將自變數平移了某一定值。倘不論平移多長，總不能回到原函數值，便是無週期性函數了。因此我們可以將無週期函數看作是週期是無窮大。

從這條思路發展下去，便可將一個無週期性的函數展開。在週期函數的情形，我們是將之展成無窮項的和。

現在如週期是無窮大，展成的項數會多得多--怎麼多法呢?在傅氏級數裏，每一項是 $a_n \sin nx$ ，$n$ 是 1，2，3，······每個整數有一項，即 $n$ 每加 1 才有一項。但在目前情形，$n$ 是每增加一點點，便有一項。這「一點點」是多小呢?它當然比 1 小，比 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，...等等都小，換言之，它比任何固定的有限數目都來得小，因此它的總和無法用級數寫下來。

那該如何寫下來?我們先看另一個類似的例子。我們知道，長方形的面積是底乘高。現如有無窮個長方形擺在一起:



我們照樣可將每個長方形面積算出，然後再全部加起來。在這裏，每個長方形的高度都不一樣，因此像個樓梯。如果底的大小變得非常小，小到比任何固定的有限正數都小時，那麼代表樓梯形狀的曲線便變成一條光滑的曲線。這時面積怎麼求呢?它就是積分。

因此，我們知道，對於非週期性的函數，它展成的和不再是級數而是積分(積分本就是和的一種極限):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\cos nx + i \sin nx)dx$$

叫做將函數展成傅氏積分 (Fourier Integral)，這裏我們將 $\cos nx$ 及 $\sin nx$ 和虛數號寫在一起，是為了便於求傅氏係數:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos nx - i \sin nx)dx$$

注意:積分已改從$-\infty$到$\infty$。

因為 $n$ 常代表自然數 (1,2,3,‥‥‥), 故改用 $p$ 字, 而把 $a_n \to a_p = a(p)$,

再把 $a$ 寫作 $g$, 或 $a(p) \to g(p)$, 如果我們把 $\cos nx + i\sin nx$簡寫作

$e^{inx} \to e^{ipx}$, 把 $n$ 代以 $-n$, 則 $\cos nx - i\sin nx \to e^{-inx} \to e^{-ipx}$, 又把 $\sqrt{2\pi}$ 乘進 $g(p)$, 則我們便有對偶(dual)的式子:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)e^{ipx}\,dp \\ g(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ipx}\,dx \end{aligned}$$

# 對偶性

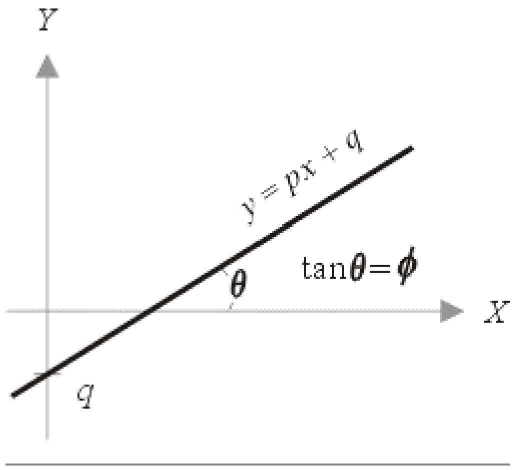
我們不僅僅得到了傅氏展開法, 我們還發現 $f$和 $g$二者地位完全對偶, 看看上頭兩個式子, 只不過一者用 $e^{ipx}$, 一個用 $e^{-ipx}$而已, 因此, 如果$g(p)$是 $f(x)$的傅氏係數(廣義的), 則我們也可視 $f(x)$為$g(p)$的傅氏係數。兩者完全是對偶的(Dual)。這真是料想不到的結果。

意外嗎?也不盡然。至少, 對偶的觀念並不是很新奇的, 平面幾何便有例子。只要你稍微注意一下, 便發現「點」和「線」是很對偶的東西。例如:有「兩點決定一線」, 就有「兩直線相交(即決定了)一點」(假設平行線交在無窮遠);有一個三點共線的定理, 一定可以找到一個三線共點的定理。

又如我們看一條直線:

$$y=px+q$$

$p$是直線的斜率, $q$是截距。$p$和 $q$決定了平面上的一條直線。這條直線是由無數點(即無數個 $x$和 $y$)滿足上述方程式。如讓我們考慮對偶的情形:通過一固定點$(x,y)$的直線有多少條呢?顯然有無窮條。每一條線由一對 $p$和 $q$所決定(即有無數個 $p$和 $q$滿足上述方程式)。

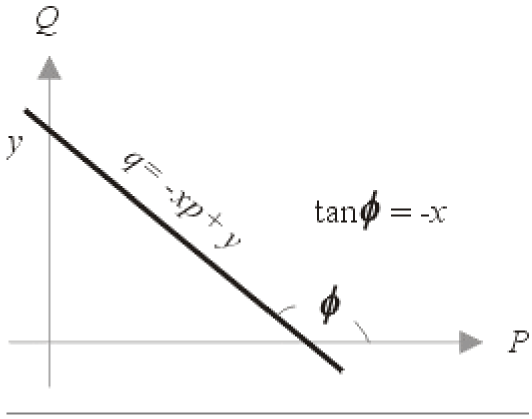



圖八

更進一步，把方程式寫成：

$$q=-xp+y$$

則通過固定$(x,y)$的所有直線(由無數 $p,q$ 決定)便相當於在 $PQ$ 平面上的一條直線：




圖九

斜率為$-x$，截距為 $y$，這完全和 $XY$ 面一樣(只是一者為$+p$，另者為$-x$)。

這豈不就是在傅氏積分中，一者為 $e^{ipx}$，另者為 $e^{-ipx}$ 嗎?

在直線的例子，$PQ$-平面叫 $XY$-面的對偶平面(Dual Plane)。在傅氏分析中 $q$ 空間便叫做 $x$ 空間的對偶空間(Dual Space)。

## 對稱空間的限制與海森堡不確定原理

$PQ$-面是 $XY$-面的對偶面，反之 $XY$-面亦為 $PQ$-面之對偶面。在原來 $XY$-面上，直線（即固定了 $p$ 和 $q$）固然很容易表示出來，但直線系（即固定了 $x$，$y$ 的所有直線）則不易表示。對於後者，對偶面的表示（是一條直線）就方便多了。

同樣，有時一個函數 $f(x)$ 不便研究，我們便研究其對偶空間的函數 $g(p)$ (即用傅氏分析求其分向量)。二者原是一物之兩面，互補相依而成。

由直線例子，我們還知道，在原來空間不易研究者，則用對偶空間來研究。反之，一空間中如很易研究，則其對偶空間一定不易研究。因此我們又發現，原空間和對偶空間雖是相輔而成，但也互相限制。

在光波的例子中，我們如用分光儀將每個波長的光分開。波長是固定了，但位置卻不再固定（不再「擠」在同一地點）。如我們要求位置固定。則波長便無法固定（各色光都混在一起）。於是位置($x$)與波長（嚴格說來，是波長的倒數。叫做波數向量 Wave Vector）是互相對偶的，但也互相限制的。

在量子力學裏頭，波數向量相當於一個粒子的動量。於是這個限制告訴我們，一個粒子的動量和位置不能同時量得很準。這便是二十世紀物理學上最偉大的原理之一，海森堡的不確定原理 (Heisenberg's Uncertainty Principle)。這個原理，奠定了量子力學的物理基礎;而量子力學本身，是今日所有物理、化學及部份生物學的共同基礎。這便是對偶空間觀念下的產物。

日常生活中，我們要知道一輛車子，一架飛機，或任何會動的東西在某段時間後會移動到什麼地方，除了要知道它是怎麼動以外，還要知道它目前在什麼地方？速度多少？目前位置不知，固然無法表示未來地點；目前速度不明，也算不出下一時刻的位置，好比乘車子，車快便遠些，車慢在同一時間後的距離一定短些。目前的位 置和速度一旦決定，未來每一時刻的位置便可決定。把所有時間的位置連接起來；便成了一條線——運動的軌跡。

但這只適用於日常生活的觀念。在微小的原子世界裏，便沒這麼愜意了。根據上述的不確定原理，我們得知位置與動量是無法同時確定的。動量和速度是成正比的。這就是說，位置和速度無法同時確定。既然二者無法同時得知，下一時刻的位置便無法肯定，我們便無法連出一條軌道來。這便是前面所提過的：電子雖由甲點到乙點，但決不是由某個「軌道」飛過去。神奇嗎？傅氏照妖鏡下的產物！

## 重回聲光世界

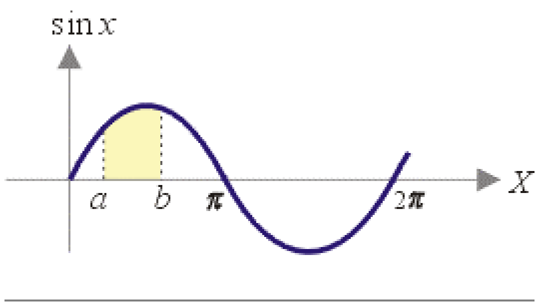
從「聲光之娛」出發，我們歷經電磁世界，微小世界以及抽象的數學世界。讓我們再鑽出來看看，開頭引起我們興趣的順耳悅目的問題。

我們已知道，聲和光都是波動。這些波用傅氏分析法分開，如果只是單純的 $\sin nx$ 或 $\cos nx$，便是單色光或單音。霓虹的各色都是單色光的，而悅耳的琴聲也多是由單音或單音頻率整數倍疊加起來。這些都較單純，而單純也許較美。從這些波的形狀看來，也都是較優美的曲線，音樂上古典和聲學上所謂諧和音，便是指兩個音波，如果波長成簡單整數比，便是諧和的；否則合成波奇形古怪，忽高忽低，便是不諧和了。

## 附錄：我們用到的積分知識

積分並不難，請中學讀者不用怕——尤其在目前情形下是特別容易。

積分是求面積，求函數曲線到 $X$ 軸的面積。例如 $\sin x$：




圖十

則從 $a$ 點到 $b$ 點的那塊斜線的面積便寫作：

$$\int_a^b \sin x dx$$

曲線如果在 $X$-軸下面（如 π 到 $2\pi$），函數值是負的，面積便也是小於零。

從圖形很顯然可看出，曲線上彎（0 到 π）及下彎（π 到 2π）情況相同。因此該兩部分的面積大小相同；但一正一負：

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\int_{0}^{\pi} \sin x dx$$

如果我們求 0 到 $2\pi$ 的總面積，則正負相抵，等於 0：

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x dx = 0$$

同樣，$\cos x$ 以及 $\sin nx$ , $\cos nx$ 也都一樣（請讀者自行畫圖證明）：

$$\int_{0}^{2\pi} \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x dx = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin 3x dx = 0, \cdots,\ \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0,\ n \neq 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos 2x dx = 0,\ \int_0^{2\pi} \cos 3x dx = 0, \cdots,\ \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0,\ n \neq 0$$

有了這些，我們便可求傅氏係數 $a_n$ 及 $b_n$ 了。先求 $a_0$。將傅氏展開是左右兩邊各從 0 積分到 2π（即求 0 至 2π 的面積），便得下列式子：

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^{2\pi} (\frac{a_0}{2} + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \cos x + \ldots)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a_0 dx + \int_0^{2\pi} a_1 \sin x dx + \ldots \\
&= \frac{a_0}{2} \dot{2}\pi + 0 + 0 + \ldots = \pi a_0
\end{aligned}$$

所以

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

注意：這裡用上積分的兩個性質：

(1)

$$\begin{aligned}\int [f(x)+g(x)]dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int af(x)dx &= a\int f(x)dx\end{aligned}$$

這正是線性，積分是線性運算。

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi a_0$

這很容易畫個圖求出。讀者試試看。

所以我們可以求出 $a_0$ 了。其他的呢？例如我們要算 $a_m$，便在展開是兩邊各乘以 $\sin(mx)$，然後再把每一項用三角恆等式化積為和或差：

$$\begin{aligned}\sin nx \sin mx &= \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \\ \cos nx \sin mx &= \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\end{aligned}$$

等等，都化成單項。所有這些，一經積分，便紛紛歸零，除非 $n=m$：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a_m \cos(m-m)x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a_m dx = \pi a_m$$

所以 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx = \pi a_m$ 便得出 $a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx$ 同法可求得：$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx$ 這便是文中所使用的式子。