第零章

數學工具

一. 微積分初步

(趙凱華,羅蔚茵"力學"(第二版)附錄 A)

邵錦昌之 Note (1), (2)

我的講義

第一節

9/13 , 9/15 (一)

邵錦昌代授

第四節 泰勒 級數展開

二. 矢量

(趙凱華,羅蔚茵"力學" 附錄 B)

我的講義 第二節 摘要及應用

第三節

9/15 (二)

9/20

三. 複數的運算

(趙凱華,羅蔚茵"力學"(第二版))

附錄 D

四. 二次常係數微分方程式

(趙凱華,羅蔚茵"力學"(第二版)

附錄 C

(李怡嚴"大學物理學) 附錄 J-5

9/22 (一)

附录 A　微积分初步

物理学研究的是物质的运动规律，因此我们经常遇到的物理量大多数是变量，而我们要研究的正是一些变量彼此间的联系。这样，微积分这个数学工具就成为必要的了。我们考虑到，读者在学习基础物理课时若能较早地掌握一些微积分的初步知识，对于物理学的一些基本概念和规律的深入理解是很有好处的。所以我们在这里先简单地介绍一下微积分中最基本的概念和简单的计算方法，在讲述方法上不求严格和完整，而是较多地借助于直观并密切地结合物理课的需要。至于更系统和更深入地掌握微积分的知识和方法，读者将通过高等数学课程的学习去完成。

§1. 函数及其图形

本节中的不少内容读者在初等数学及中学物理课中已学过了，现在我们只是把它们联系起来复习一下。

1.1　函数　自变量和因变量　绝对常量和任意常量

在数学中函数的功能是这样定义的：有两个互相联系的变量 x 和 y，如果每当变量 x 取定了某个数值后，按照一定的规律就可以确定 y 的对应值，我们就称 y 是 x 的*函数*，并记作

$$y = f(x), \tag{A.1}$$

其中 x 叫做*自变量*，y 叫做*因变量*，f 是一个函数记号，它表示 y 和 x 数值的对应关系。有时把 $y=f(x)$ 也记作 $y=y(x)$。如果在同一个问题中遇到几个不同形式的函数，我们也可以用其它字母作为函数记号，如 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 等等。[1]

常见的函数可以用公式来表达，例如

$$y=f(x)=3+2x,\quad ax+\frac{1}{2}bx^2,\quad \frac{c}{x},\quad \cos 2\pi x,\quad \ln x,\quad e^x \text{ 等等。}$$

在函数的表达式中，除变量外，还往往包含一些不变的量，如上面出现的 3、2、$\frac{1}{2}$、π、e 和 a、b、c 等，它们叫做*常量*。常量有两类：一类如 3、2、$\frac{1}{2}$、π、e 等，它们在一切问题中出现时数值都是确定不变的，这类常量叫做*绝对常量*；另一类如 a、b、c 等，它们的数值需要在具体问题中具体给定，这

---

[1] 一般地说，函数中自变量的数目可能不止一个。多个自变量的函数叫做*多元函数*。下面我们只讨论一个变量的函数，即*一元函数*。

类常量叫做任意常量。在数学中经常用拉丁字母中最前面几个(如 a、b、c)代表任意常量,最后面几个(x、y、z) 代表变量。

当 $y=f(x)$ 的具体形式给定后,我们就可以确定与自变量的任一特定值 x_0 相对应的函数值 $f(x_0)$。例如:

(1) 若 $y=f(x)=3+2x$, 则当 $x=-2$ 时

$$y=f(-2)=3+2\times(-2)=-1.$$

一般地说,当 $x=x_0$ 时,

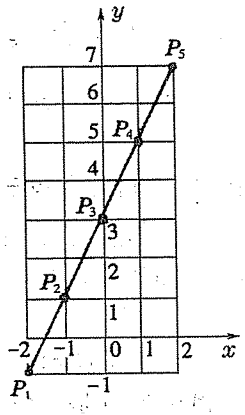
$$y=f(x_0)=3+2x_0.$$

(2) 若 $y=f(x)=\dfrac{c}{x}$, 则当 $x=x_0$ 时,

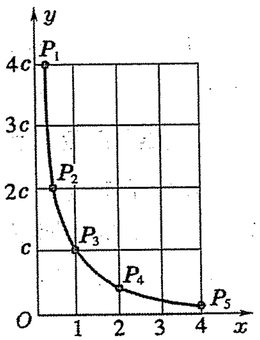
$$y=f(x_0)=\frac{c}{x_0}.$$

1.2 函数的图形

在解析几何学和物理学中经常用平面上的曲线来表示两个变量之间的函数关系,这种方法对于我们直观地了解一个函数的特征是很有帮助的。作图的办法是先在平面上取一直角坐标系,横轴代表自变量 x,纵轴代表因变量(函数值) $y=f(x)$. 这样一来,把坐标为 (x, y) 且满足函数关系 $y=f(x)$ 的那些点连接起来的轨迹就构成一条曲线,它描绘出函数的面貌。图A-1便是上面举的第一个例子 $y=f(x)=3+2x$ 的图形,其中 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 各点的坐标分别为 $(-2, -1)$、$(-1, 1)$、$(0, 3)$、$(1, 5)$、$(2, 7)$, 各点连接成一根直线。图A-2是第二个例子 $y=f(x)=\dfrac{c}{x}$ 的图形,其中 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 各点的坐标分别为 $\left(\dfrac{1}{4}, 4c\right)$、$\left(\dfrac{1}{2}, 2c\right)$、$(1, c)$、$\left(2, \dfrac{c}{2}\right)$、$\left(4, \dfrac{c}{4}\right)$, 各点连接成双曲线的一支。



图A-1



图A-2

1.3 物理学中函数的实例

反映任何一个物理规律的公式都是表达变量与变量之间的函数关系的。下面我们举几个例子。

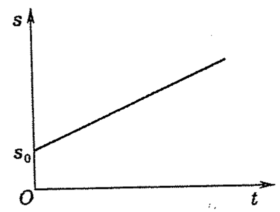
(1) 匀速直线运动公式

$$s=s_0+vt, \tag{A.2}$$

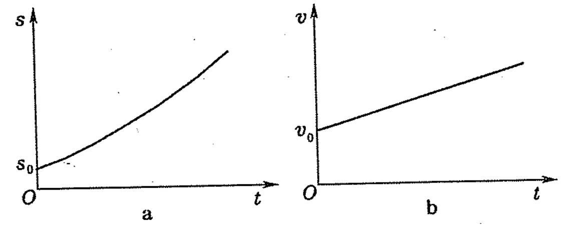
此式表达了物体作匀速直线运动时的位置 s 随时间 t 变化的规律,在这里 t 相当于自变量 x, s 相当于因变量 y, s 是 t 的函数。因此我们记作

$$s=s(t)=s_0+vt, \tag{A.3}$$

式中初始位置 s_0 和速度 v 是任意常量, s_0 与坐标原点的选择有关, v 对于每个匀速直线运动有一定的值,但对于不同的匀速直线运动可以取不同的值。图A-3是这个函数的图形,它是一根倾斜的直线。下面我们将看到,它的斜率等于 v.



图A-3



图A-4

(2) 匀变速直线运动公式

$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2, \tag{A.4}$$

$$v=v_0+at, \tag{A.5}$$

两式中 s 和 v 是因变量,它们都是自变量 t 的函数, 因此我们记作

$$s=s(t)=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2, \tag{A.6}$$

$$v=v(t)=v_0+at. \tag{A.7}$$

图A-4a、4b分别是两个函数的图形,其中一个是抛物线,一个是直线。(A.6)和(A.7)式是匀变速直线运动的普遍公式,式中初始位置 s_0、初速 v_0 和加速度 a 都是任意常量,它们的数值要根据讨论的问题来具体化。例如在讨论自由落体问题时,如果把坐标原点选择在开始运动的地方, 则 $s_0=0$, $v_0=0$, $a=g\approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, 这时(A.6)和(A.7)式具有如下形式:

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2, \tag{A.8}$$

$$v=v(t)=gt. \tag{A.9}$$

这里的 g 可看作是绝对常量,式中不再有任意常量了。

(3) 玻意耳定律

$$pV=C. \tag{A.10}$$

上式表达了一定质量的气体,在温度不变的条件下,压强 p 和体积 V 之间的函数关系,式中的 C 是任意常量。我们可以选择 V 为自变量, p 为因变量,这

样,(A.10)式就可写作

$$p = p(V) = \frac{C}{V}. \qquad (A.11)$$

它的图形和图 A－2 是一样的,只不过图中的 x、y 应换成 V、p.

在(A.10)式中我们也可以选择 p 为自变量,V 为因变量,这样它就应写成

$$V = V(p) = \frac{C}{p}. \qquad (A.12)$$

由此可见,在一个公式中自变量和因变量往往是相对的。

(4) 欧姆定律

$$U = IR. \qquad (A.13)$$

当我们讨论一段导线中的电流 I 这样随着外加电压 U 而改变的问题时,U 是自变量,I 是因变量,R 是常量。这时,(A.13)式应写作

$$I = I(U) = \frac{U}{R}, \qquad (A.14)$$

即 I 与 U 成正比。

应当指出,任意常量与变量之间的界限也不是绝对的。例如,当我们讨论串联电路中电压在各电阻元件上分配问题时,由于通过各元件的电流是一样的,(A.13)式中的电流 I 成了常量,而 R 是自变量,U 是因变量,于是

$$U = U(R) = IR, \qquad (A.15)$$

即 U 与 R 成正比。但是,当我们讨论并联电路中电流在各分支里的分配问题时,由于各分支两端具有共同的电压,(A.13)式中的 U 就成了常量,而 R 为自变量,I 是因变量,于是

$$I = I(R) = \frac{U}{R}, \qquad (A.16)$$

即 I 与 R 成反比。

总之,每个物理公式都反映了一些物理量之间的函数关系,但是其中哪个是自变量,哪个是因变量,哪些是常量,有时公式本身反映不出来,需要根据我们所要讨论的问题来具体分析。

§2. 导 数

2.1 极 限

如果当自变量 x 无限趋近某一数值 x_0(记作 $x \to x_0$)时,函数 $f(x)$ 的数值无限趋近某一确定的数值 a,则 a 叫做 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限值,并记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a. \qquad (A.17)$$

(A.17)式中的"lim"是英语"limit(极限)"一词的缩写,(A.17)式读作

"当 x 趋近 x_0 时,$f(x)$ 的极限值等于 a"。

极限是微积分中的一个最基本的概念,它涉及的问题面很广。这里我们不企图给"极限"这个概念下一个普遍而严格的定义,只通过一个特例来说明它的意义。

考虑下面这个函数:

$$y = f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}. \qquad (A.18)$$

这里除 $x=1$ 外,计算任何其它地方的函数值都是没有困难的。例如当 $x=0$ 时,$f(0)=\frac{-2}{-1}=2$;当 $x=2$ 时,$f(2)=\frac{8}{1}=8$,等等。但是若问 $x=1$ 时函数值 $f(1)=$? 我们就会发现,这时(A.18)式的分子和分母都等于0,即 $f(1)=\frac{0}{0}$! 用0去除0,一般地说是没有意义的。所以表达式(A.18)没有直接给出 $f(1)$,但给出了 x 无论如何接近1时的函数值来。下表列出了当 x 的值从小于1和大于1两方面趋于1时 $f(x)$ 值的变化情况:

表 A－1 x 与 $f(x)$ 的变化值

x	$3x^2-x-2$	$x-1$	$f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x-1}$
0.9	－0.47	－0.1	4.7
0.99	－0.0497	－0.01	4.97
0.999	－0.004997	－0.001	4.997
0.9999	－0.00049997	－0.0001	4.9997
1.1	0.53	0.1	5.3
1.01	0.503	0.01	5.03
1.001	0.005003	0.001	5.003
1.0001	0.00050003	0.0001	5.0003

从上表可以看出,x 值无论从哪边趋近1时,分子分母的比值都趋于一个确定的数值——5,这便是 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的极限值。

其实计算 $f(x)$ 值的极限无需这样麻烦,我们只要将(A.18)式的分子作因式分解:

$$3x^2 - x - 2 = (3x+2)(x-1),$$

并在 $x\neq1$ 的情况下从分子和分母中将因式 $(x-1)$ 消去:

$$y = f(x) = \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} = 3x+2. \qquad (x\neq1)$$

即可看出,x 趋于1时函数 $f(x)$ 的数值趋于 $3\times1+2=5$。所以根据函数极限的定义,

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{x-1} = 5.$$

2.2 几个物理学中的实例

(1) 瞬时速度

当一个物体作任意直线运动时,它的位置可用它到某个坐标原点 O 的距离 s 来描述。在运动过程中 s 是随时间 t 变化的,也就是说,s 是 t 的函数:

$$s = s(t).$$

函数 $s(t)$ 告诉我们的是这个物体什么时刻到达什么地方。形象一些说,假如物体是一列火车,则函数 $s(t)$ 就是它的一张"旅行时刻表"。但是,在实际中往往不满足于一张"时刻表",我们还需要知道物体运动快慢的程度,即速度或速率的概念。例如,当车辆驶过繁华的街道或桥梁时,为了安全,对它的速率就要有一定的限制;一个上抛体(如高射炮弹)能够达到怎样的高度,也与它的初始速率有关,等等。

为了建立速率的概念,我们就要研究在一段时间间隔里物体位置的改变情况。假设我们考虑的是从 $t=t_0$ 到 $t=t_1$ 的一段时间间隔,则这间隔的大小为

$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

根据 s 和 t 的函数关系 $s(t)$ 可知,在 t_0 和 $t_1=t_0+\Delta t$ 两个时刻,s 的数值分别为 $s(t_0)$ 和 $s(t_1)=s(t_0+\Delta t)$,即在 t_0 到 t_1 这段时间间隔里 s 改变了

$$\Delta s = s(t_1)-s(t_0) = s(t_0+\Delta t) - s(t_0).$$

在同样大小的时间间隔 Δt 里,若 s 的改变量 Δs 小,就表明物体运动得慢,所以我们就把 Δs 与 Δt 之比 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 叫做这段时间间隔里的平均速率。用 $\bar{v}$ 来表示,则

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{A.19}$$

举例来说,对于匀变速直线运动,根据(A.4)式有

$$s(t_0) = s_0 + v_0 t_0 + \frac{1}{2}a t_0^2,$$

和

$$s(t_0+\Delta t) = s_0 + v_0\cdot(t_0+\Delta t) + \frac{1}{2}a\cdot(t_0+\Delta t)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\\ &= \frac{\left[s_0+v_0\cdot(t_0+\Delta t)+\frac{1}{2}a\cdot(t_0+\Delta t)^2\right]-\left(s_0+v_0t_0+\frac{1}{2}at_0^2\right)}{\Delta t}\\ &= \frac{(v_0+at_0)\Delta t+\frac{1}{2}a\cdot(\Delta t)^2}{\Delta t} = v_0+at_0+\frac{1}{2}a\Delta t.\end{aligned}$$

平均速率 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 反映了物体在一段时间间隔内运动的快慢,除了匀速直线运动的特殊情况外,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的数值或多或少与 Δt 的大小有关。Δt 取得愈短,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就愈能反映出物体在 $t=t_0$ 时刻运动的快慢。通常我们就把 $\Delta t\to 0$ 时 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限值,叫做物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时速率 v,即

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{A.20}$$

对于匀变速直线运动来说,

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(v_0+at_0+\frac{1}{2}a\Delta t\right) = v_0+at_0.$$

这就是我们熟悉的匀变速直线运动的速率公式(A.5)。

(2) 瞬时加速度

一般地说,瞬时速度或瞬时速率 v 也是 t 的函数:

$$v = v(t).$$

但是在许多实际问题中,只有速度和速率的概念还不够,我们还需要知道速度随时间变化的快慢,即需要建立"加速度"的概念。

平均加速度 $\bar{a}$ 和瞬时加速度 a 概念的建立与 $\bar{v}$ 和 v 的类似。在直线运动中,首先取一段时间间隔 t_0 到 t_1,根据瞬时速率 v 和时间 t 的函数关系 $v(t)$ 可知,在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 两时刻的瞬时速率分别为 $v(t_0)$ 和 $v(t_1)=v(t_0+\Delta t)$,因此在 t_0 到 t_1 这段时间间隔里 v 改变了

$$\Delta v = v(t_0+\Delta t)-v(t_0).$$

我们把 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 叫做这段时间间隔里的平均加速度,记作 $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}. \tag{A.21}$$

举例来说,对于匀变速直线运动,根据(A.5)式有

$$v(t_0) = v_0 + at_0,$$

$$v(t_0+\Delta t) = v_0 + a\,(t_0+\Delta t),$$

所以平均加速度为

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}\\ &= \frac{[v_0+a\,(t_0+\Delta t)]-(v_0+at_0)}{\Delta t} = a(\text{常量})。\end{aligned}$$

对于一般的变速运动,$\bar{a}$ 也是与 Δt 有关的,这时为了反映出某一时刻速度变化的快慢,我们就需取 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 在 $\Delta t\to 0$ 时的极限,这就是物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时加速度 a:

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}. \tag{A.22}$$

(3) 水渠的坡度 任何排灌水渠的两端都有一定的高度差，这样才能使水流动。为简单起见，我们假设水渠是直的，这时可以把 x 坐标轴取为逆水渠走向的方向(见图 A－5)，于是各处渠底的高度 h 便是 x 的函数：

$$h = h(x).$$

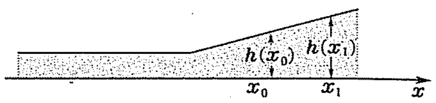


图 A－5

知道了这个函数，我们就可以计算任意两点之间的高度差。

在修建水渠的时候，人们经常运用"坡度"的概念。譬如说，若逆水渠而上，渠底在 100 m 的距离内升高了 20 cm，人们就说这水渠的坡度是$\frac{0.2\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{m}} = \frac{2}{1000}$. 因此所谓坡度，就是指单位长度内的高度差，它的大小反映着高度随长度变化的快慢程度。如果用数学语言来表达，我们就要取一段水渠，设它的两端的坐标分别为 x_0 和 x_1，于是这段水渠的长度为

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

根据 h 和 x 的函数关系 $h(x)$ 可知，在 x_0 和 $x_1=x_0+\Delta x$ 两地 h 的数值分别为 $h(x_0)$ 和 $h(x_1)=h(x_0+\Delta x)$，所以在 Δx 这段长度内 h 改变了

$$\Delta h = h(x_0+\Delta x) - h(x_0).$$

根据上述坡度的定义，这段水渠的平均坡度为

$$\bar{\kappa} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}. \tag{A.23}$$

在前面所举的数字例子里，Δx 采用了 100 m 的数值。实际上在 100 m 的范围内，水渠的坡度可能各处不同。为了更细致地把水渠在各处的坡度反映出来，我们应当取更小的长度间隔 Δx. Δx 取得愈小，$\frac{\Delta h}{\Delta x}$ 就愈能精确地反映出 $x=x_0$ 这一点的坡度。所以在 $x=x_0$ 这一点的坡度 κ 应是 $\Delta x\to 0$ 时的平均坡度 $\bar{\kappa}$ 的极限值，即

$$\kappa = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}. \tag{A.24}$$

2.3 函数的变化率——导数

前面我们举了三个例子，在前两个例子中自变量都是 t，第三个例子中自变量是 x. 这三个例子都表明，在我们研究变量与变量之间的函数关系时，除了它们数值上"静态的"对应关系外，我们往往还需要有"运动"或

"变化"的观点，着眼于研究函数变化的趋势、增减的快慢，亦即，函数的"变化率"概念。

当变量由一个数值变到另一个数值时，后者减去前者，叫做这个变量的增量。增量，通常用代表变量的字母前面加个"Δ"来表示。例如，当自变量 x 的数值由 x_0 变到 x_1 时，其增量就是

$$\Delta x \equiv x_1 - x_0. \tag{A.25}$$

与此对应。因变量 y 的数值将由 $y_0=f(x_0)$ 变到 $y_1=f(x_1)$，于是它的增量为

$$\Delta y \equiv y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0). \tag{A.26}$$

应当指出，增量是可正可负的，负增量代表变量减少。增量比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{A.27}$$

可以叫做函数在 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 这一区间内的平均变化率，它在 $\Delta x\to 0$ 时的极限值叫做函数 $y=f(x)$ 对 x 的导数或微商，记作 y' 或 $f'(x)$，

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{A.28}$$

除 y'、$f'(x)$ 外，导数或微商还常常写作$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 等其它形式。导数与增量不同，它代表函数在一点的性质，即在该点的变化率。

应当指出，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 本身也是 x 的一个函数，因此我们可以再取它对 x 的导数，这叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''、$f''(x)$、$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 等。

$$y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'(x). \tag{A.29}$$

据此类推，我们不难定义出高阶的导数来。

有了导数的概念，前面的几个实例中的物理量就可表示为：

瞬时速率 $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \tag{A.30}$$

瞬时加速度 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}, \tag{A.31}$$

水渠坡度 $$\kappa = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}. \tag{A.32}$$

2.4 导数的几何意义

在几何中切线的概念也是建立在极限的基础上的。如图 A－6 所示，为了确定曲线在 P_0 点的切线，我们先在曲线上 P_0 附近选另一点 P_1，并设想 P_1 点沿着曲线向 P_0 点靠拢。P_0P_1 的联线是曲线的一条割线，它的方向可用这

直线与横坐标轴的夹角 α 来描述。从图上不难看出，P_1 点愈靠近 P_0 点，α 角就愈接近一个确定的值 α_0，当 P_1 点完全和 P_0 点重合的时候，割线 P_0P_1 变成切线 P_0T，α 的极限值 α_0 就是切线与横轴的夹角。

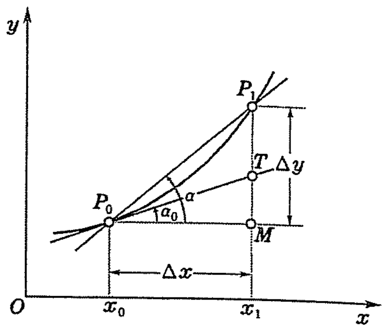


图 A－6

在解析几何中，我们把一条直线与横坐标轴夹角的正切 $\tan\alpha$ 叫做这条直线的斜率。斜率为正时表示 α 是锐角，从左到右直线是上坡的（见图 A－7a）；斜率为负时表示 α 是钝角，从左到右直线是下坡的（见图 A－7b）。现在我们来研究图 A－6 中割线 P_0P_1 和切线 P_0T 的斜率。

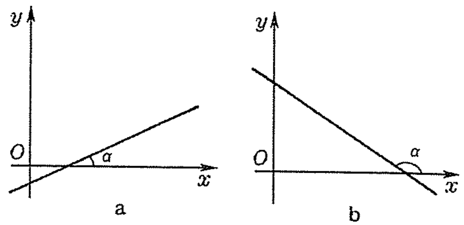


图 A－7

设 P_0 和 P_1 的坐标分别为 (x_0, y_0) 和 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，以割线 P_0P_1 为斜边作一直角三角形 $\triangle P_0P_1M$，它的水平边 P_0M 的长度为 Δx，竖直边 MP_1 的长度为 Δy，因此这条割线的斜率为

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MP_1}}{\overline{P_0M}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

如果图 A－6 中的曲线代表函数 $y=f(x)$，则割线 P_0P_1 的斜率就等于函数在 $x=x_0$ 附近的增量比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 切线 P_0T 的斜率 $\tan\alpha_0$ 是 $P_1\to P_0$ 时割线 P_0P_1 斜率的极限值，即

$$\tan\alpha_0 = \lim_{P_1\to P_0}\tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

所以导数的几何意义是切线的斜率。

§3. 导数的运算

在上节里我们只给出了导数的定义，本节将给出以下一些公式和定理，利用它们可以把常见函数的导数求出来。

3.1 基本函数的导数公式

（1）$y=f(x)=C$（常量）

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = 0.$$

（2）$y=f(x)=x$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

（3）$y=f(x)=x^2$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

（4）$y=f(x)=x^3$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]$$
$$= 3x^2.$$

（5）$y=f(x)=\frac{1}{x}$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

（6）$y=f(x)=\sqrt{x}$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2-(\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

上面推导的结果可以归纳成一个普遍公式：当 $y=x^n$ 时，

$$y' = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \quad (n\text{ 为任何数}) \qquad (A.33)$$

例如当 $n=1$ 时，$y=f(x)=x$，$y'=\frac{dx}{dx}=1$；当 $n=2$ 时，$y=f(x)=x^2$，$y'=\frac{dx^2}{dx}=2x$；当 $n=3$ 时，$y=f(x)=x^3$，$y'=\frac{dx^3}{dx}=3x^2$；当 $n=-1$ 时，$y=f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$，$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$；当 $n=\frac{1}{2}$ 时，$y=f(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}$，$y'=\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$；等等。利用(A.33)式我们还可以计算其它幂函数的导数(见表A-2)。

除了幂函数 x^n 外，物理学中常见的基本函数还有三角函数、对数函数和指数函数。我们只给出这些函数的导数公式(见表A-2)而不推导，读者可以直接引用。

表A-2 基本导数公式

函数 $y=f(x)$	导数 $y'=f'(x)$
C (任意常量)	0
x^n (n 为任意数)	nx^{n-1}
$n=1$, x	1
$n=2$, x^2	$2x$
$n=3$, x^3	$3x^2$
$n=-1$, $x^{-1}=\frac{1}{x}$	$(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$
$n=-2$, $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$	$(-2)x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$
$n=\frac{1}{2}$, $x^{1/2}=\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$n=-\frac{1}{2}$, $x^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{-1}{2(\sqrt{x})^3}$
$n=-\frac{3}{2}$, $x^{-3/2}=\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$	$-\frac{3}{2}x^{-5/2}=\frac{-3}{2(\sqrt{x})^5}$
…………	…………
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

3.2 有关导数运算的几个定理

定理一

$$\frac{d}{dx}[u(x)\pm v(x)]=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}. \tag{A.34}$$

证：

$$\frac{d}{dx}[u(x)\pm v(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}.$$

定理二

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]=v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}. \tag{A.35}$$

证：

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v]-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\Delta u+u(x)\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$$=v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}.$$

定理三

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}. \tag{A.36}$$

证：

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]v(x)-u(x)[v(x)+\Delta v]}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x)+\Delta v]v(x)}=\frac{v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}.$$

定理四

$$\frac{d}{dx}u[v(x)]=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{A.37}$$

证：

$$\frac{d}{dx}u[v(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u[v(x+\Delta x)]-u[v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(v+\Delta v)-u(v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta v\to 0}\left[\frac{u(v+\Delta v)-u(v)}{\Delta v}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

例题1 求 $y=x^2\pm a^2$(a 为常量)的导数。

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^2}{dx}\pm\frac{da^2}{dx}=2x\pm 0=2x.$$ ▌

例题2 求 $y=\ln\frac{x}{a}$(a 为常量)的导数。

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\ln x}{dx}-\frac{d\ln a}{dx}=\frac{1}{x}-0=\frac{1}{x}.$$ ▌

例题 3 求 $y = ax^2$（a 为常量）的导数。

解：$$\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx}x^2 + a\frac{dx^2}{dx} = 0 \cdot x^2 + a \cdot 2x = 2ax.$$ ▌

例题 4 求 $y = x^2e^x$ 的导数。

解：$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx}e^x + x^2\frac{de^x}{dx} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x.$$ ▌

例题 5 求 $y = \dfrac{3x^2 - 2}{5x + 1}$ 的导数。

解：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d(3x^2 - 2)}{dx}(5x + 1) - (3x^2 - 2)\dfrac{d(5x + 1)}{dx}}{(5x + 1)^2}$$
$$= \frac{6x(5x + 1) - (3x^2 - 2) \cdot 5}{(5x + 1)^2} = \frac{15x^2 + 6x + 10}{(5x + 1)^2}.$$ ▌

例题 6 求 $y = \tan x$ 的导数。

解：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\dfrac{d\sin x}{dx} - \dfrac{d\cos x}{dx}\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$ ▌

例题 7 求 $y = \cos(ax + b)$（a、b 为常量）的导数。

解：令 $v = ax + b$, $y = u(v) = \cos v$, 则
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = (-\sin v) \cdot a = -a\sin(ax + b).$$ ▌

例题 8 求 $\sqrt{x^2 - 1}$ 的导数。

解：令 $v = x^2 - 1$, $y = u(v) = \sqrt{v}$, 则
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$ ▌

例题 9 求 $y = x^2e^{-ax^2}$（a 为常量）的导数。

解：令 $u = e^v$, $v = -ax^2$, 则
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx}u + x^2\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = 2xu + x^2 \cdot e^v \cdot (-2ax) = 2x(1 - ax^2)e^{-ax^2}.$$ ▌

§4. 微分和函数的幂级数展开

4.1 微分

自变量的微分，就是它的任意一个无限小的增量 Δx. 用 dx 代表 x 的微分，则
$$dx = \Delta x. \tag{A. 38}$$
一个函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 乘以自变量的微分 dx，叫做这个函数的微分，用 dy 或 $df(x)$ 表示，即

$$dy \equiv df(x) \equiv f'(x)dx, \tag{A. 39}$$
故
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{A. 40}$$
在前面我们也曾把导数写成$\dfrac{dy}{dx}$的形式。然而是把它作为一个整体引入的。当时它虽然表面上具有分数的形式，但在运算时并不像普通分数那样可以拆成“分子”和“分母”两部分。在引入微分的概念之后，我们就可把导数看成微分 dy 与 dx 之商（所谓“微商”），即一个真正的分数了。把导数写成分数形式，常常是很方便的，例如，把上节定理四（A. 37）式的左端 $\dfrac{d}{dx}u[v(x)]$ 简写成$\dfrac{du}{dx}$，则该式化为
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$
此公式从形式上看就和分数运算法则一致了，很便于记忆。

下面看微分的几何意义。图 A－8 是任一函数 $y=f(x)$ 的图形，$P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 是曲线上两个邻近的点，P_0T 是通过 P_0 的切线。直角三角形 $\triangle P_0MP_1$ 的水平边 $\overline{P_0M} = \Delta x$，竖直边 $\overline{MP_1} = \Delta y$（见图 A－8）。设 P_0T 与 MP_1 的交点为 N，则
$$\tan\angle NP_0M = \frac{\overline{MN}}{\overline{P_0M}} = \frac{\overline{MN}}{\Delta x}.$$

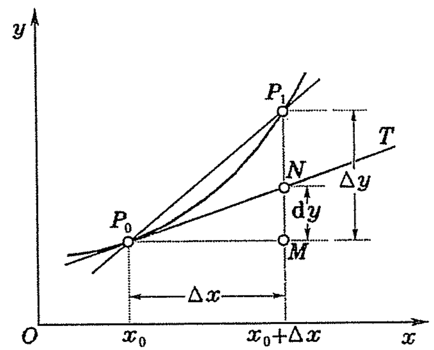


图 A－8

但 $\tan\angle NP_0M$ 为切线 P_0T 的斜率，它等于 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，因此
$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan\angle NP_0M \cdot \Delta x = \overline{MN}.$$
所以微分 dy 在几何图形上相当于线段 MN 的长度，它和增量 $\Delta y = \overline{MP_1}$ 相差$\overline{NP_1}$一段长。从上一节计算导数时取极限的过程中可以看出，dy 是 Δy 中正比于 Δx 的那一部分，而$\overline{NP_1}$则是正比于$(\Delta x)^2$以及 Δx 更高幂次的各项之和[例如对于函数 $y=f(x)=x^3$，$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$，而 $dy = f'(x)\Delta x = 3x^2\Delta x$]. 当 Δx 很小时，$(\Delta x)^2$、$(\Delta x)^3$、⋯ 比 Δx 小得多，$\overline{NP_1}$ 也就比 dy 小得多，所以我们可以把微分 dy 叫做增量 Δy 中的线性主部。这就是说，如果函数在 $x=x_0$ 的地方像线性函数那样增长，则它的增量就是 dy.

4.2 幂函数的展开

已知一个函数$f(x)$在$x=x_0$一点的数值$f(x_0)$，如何求得其附近的点$x=x_0+\Delta x$处的函数值$f(x)=f(x_0+\Delta x)$？若$f(x)$为x的幂函数x^n，我们可以利用牛顿的二项式定理：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n = (x_0+\Delta x)^n \\
&= x_0{}^n\left[1+\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)\right]^n = f(x_0)\left[1+\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)\right]^n \\
&= f(x_0)\left[1+n\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2\right. \\
&\qquad \left.+\frac{n(n-1)(n-3)}{3!}\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^3+\cdots\right] \\
&= f(x_0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^m, \qquad \text{(A.41)}
\end{aligned}
$$

此式适用于任何n(整数、非整数、正数、负数，等等)。如果n为正整数，则上式中的级数在$m=n$的地方截断，余下的项自动为0，否则上式为无穷级数。不过当$\Delta x \ll x_0$时，后面的项愈来愈小，我们只需保留有限多项就足够精确了。

不要以为数学表达式愈精确愈好。譬如图A－9中A、B两点间的水平距离为l，若将B点竖直向上提高一个很小的距离$a(a\ll l)$而到达B'，问AB'之间的距离比AB增大了多少？利用勾股弦定理很容易写出，距离的增加量为

$$\Delta l = \sqrt{l^2+a^2}-l.$$

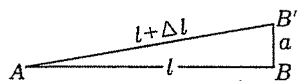


图 A－9

这是个精确的公式，但没有给我们一个鲜明的印象，究竟Δl是随a怎样变化的。如果我们用二项式定理将它展开，只保留到最低级的非0项，则有

$$
\begin{aligned}
\Delta l &= l\left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{l}\right)^2}-1\right] = l\left\{\left[1+\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1\right\} \\
&= l\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2+\cdots-1\right\} \approx \frac{l}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2 = \frac{a^2}{2l}.
\end{aligned}
$$

即Δl是正比于a平方增长的，属二级小量。这种用幂级数展开来分析主要变化趋势的办法，在物理学里是经常用到的。

4.3 泰勒展开

非幂函数(譬如$\sin x$、e^x)如何作幂级数展开？这要用泰勒(Taylor)展开。下面我们用一种不太严格，但简单明了的办法将它导出。假设函数

$f(x)$在$x=x_0$处的增量$\Delta f=f(x)-f(x_0)$能够展成$\Delta x=x-x_0$的幂级数：

$$f(x)-f(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}a_m(x-x_0)^m, \qquad \text{(A.42)}$$

则通过逐项求导可得

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty}m\,a_m(x-x_0)^{m-1},$$

当$x\to x_0$时，$m>1$的项都趋于0，于是有

$$f'(x_0) = a_1.$$

再次求导，得

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m(x-x_0)^{m-2},$$

当$x\to x_0$时，$m>2$的项都趋于0，于是有

$$f''(x_0) = 2a_2.$$

如此类推，一般地说，对于n阶导数有

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)\cdots(m-n+1)a_m(x-x_0)^{m-n}\xrightarrow{\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}} n!\,a_n.$$

于是(A.42)式可以写为

$$f(x)-f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \text{(A.43)}$$

如果定义第0阶导数$f^{(0)}(x)$就是函数$f(x)$本身，则上式还可进一步简写为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad \text{(A.44)}$$

(A.43)或(A.44)式称为泰勒展开式，它在物理学中是非常有用的公式。

下面在表A－3中给出几个常见函数在$x_0=0$或1处的泰勒展开式。

表 A－3 常见函数的幂级数展开式

函数	展开式	收敛范围
$(1\pm x)^{1/2}$	$1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}x^2\pm\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\cdots$	$\|x\|\leqslant 1$
$(1\pm x)^{3/2}$	$1\pm\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot1}{2\cdot4}x^2\mp\frac{3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{3\cdot1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|\leqslant 1$
$(1\pm x)^{5/2}$	$1\pm\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot3}{2\cdot4}x^2\pm\frac{5\cdot3\cdot1}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{5\cdot3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|\leqslant 1$
$(1\pm x)^{-1/2}$	$1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2\mp\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$
$(1\pm x)^{-3/2}$	$1\mp\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot5}{2\cdot4}x^2\mp\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$
$(1\pm x)^{-5/2}$	$1\mp\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot7}{2\cdot4}x^2\mp\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$

续表

函数	展开式	收敛范围
$(1\pm x)^{-1}$	$1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$(1\pm x)^{-2}$	$1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+5x^4\mp\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tan x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\leqslant 1$
$\ln(1-x)$	$-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$	$-1\leqslant x<1$

§5. 积　　分

5.1 几个物理中的实例

(1) 变速直线运动的路程

我们都熟悉匀速直线运动的路程公式。如果物体的速率是 v，则它在 t_a 到 t_b 一段时间间隔内走过的路程是

$$s=v(t_b-t_a). \tag{A.45}$$

对于变速直线运动来说，物体的速率 v 是时间的函数：

$$v=v(t),$$

函数的图形是一条曲线(见图 A－10a)，只有在匀速直线运动的特殊情况下，它才是一条直线(参见图 A－4b)。对于变速直线运动，(A.45)式已不适用。但是，我们可以把 $t=t_a$ 到 $t=t_b$ 这段时间间隔分割成许多小段，当小段足够短时，在每小段时间内的速率都

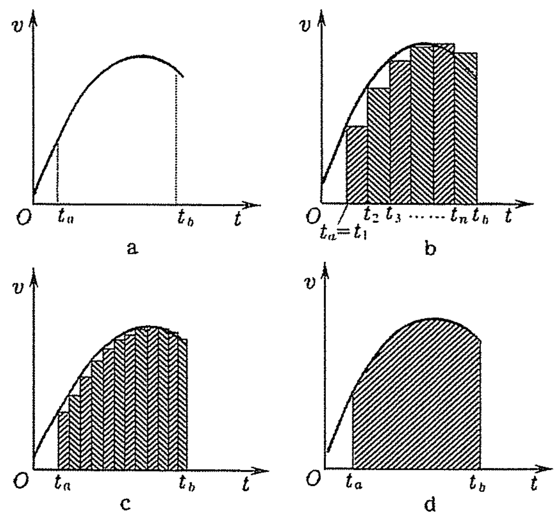


图 A－10

可以近似地看成是不变的。这样一来，物体在每小段时间里走过的路程都可以按照匀速直线运动的公式来计算，然后把各小段时间里走过的路程都加起来，就得到 t_a 到 t_b 这段时间里走过的总路程。

设时间间隔 (t_b-t_a) 被 $t=t_1(=t_a)$、t_2、t_3、…、t_n、t_b 分割成 n 小段，每小段时间间隔都是 Δt，则在 t_1、t_2、t_3、…、t_n 各时刻速率分别是 $v(t_1)$、$v(t_2)$、$v(t_3)$、…、$v(t_n)$。如果我们把各小段时间的速率 v 看成是不变的，则按照匀速直线运动的公式，物体在这些小段时间走过的路程分别等于 $v(t_1)\Delta t$、$v(t_2)\Delta t$、$v(t_3)\Delta t$、…、$v(t_n)\Delta t$. 于是，在整个 (t_b-t_a) 这段时间里的总路程是

$$\begin{aligned} s &= v(t_1)\Delta t+v(t_2)\Delta t+v(t_3)\Delta t+\cdots+v(t_n)\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t. \end{aligned} \tag{A.46}$$

现在我们来看看上式的几何意义。在函数 $v=v(t)$ 的图形中，通过 $t=t_1$、t_2、t_3、…、t_n 各点垂线的高度分别是 $v(t_1)$、$v(t_2)$、$v(t_3)$、…、$v(t_n)$(见图 A－10b)，所以 $v(t_1)\Delta t$、$v(t_2)\Delta t$、$v(t_3)\Delta t$、…、$v(t_n)\Delta t$ 就分别是图中那些狭长矩形的面积，而 $\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$ 则是所有这些矩形面积的总和，即图中画了斜线的阶梯状图形的面积。

在上面的计算中，我们把各小段时间 Δt 里的速率 v 看做是不变的，实际上在每小段时间里 v 多少还是有些变化的，所以上面的计算并不精确。要使计算精确，就需要把小段的数目 n 加大，同时所有小段的 Δt 缩短(见图 A－10c)。Δt 愈短，在各小段里 v 就改变得愈少，把各小段里的运动看成匀速运动也就愈接近实际情况。所以要严格地计算变速运动的路程 s，我们就应对(A.46)式取 $n\to\infty$、$\Delta t\to 0$ 的极限，即

$$s=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t. \tag{A.47}$$

当 n 愈来愈大，Δt 愈来愈小的时候，图 A－10 中的阶梯状图形的面积就愈来愈接近 $v(t)$ 曲线下面的面积(图 A－10d)。所以(A.47)式中的极限值等于 (t_b-t_a) 区间内 $v(t)$ 曲线下的面积。

总之，在变速直线运动中，物体在任一段时间间隔 (t_b-t_a) 里走过的路程要用(A.47)式来计算，这个极限值的几何意义相当于这区间内 $v(t)$ 曲线下的面积。

(2) 变力的功

当力与物体移动的方向一致时，在物体由位置 $s=s_a$ 移到 $s=s_b$ 的过

中,恒力 F 对它所作的功为

$$A = F(s_b - s_a).\tag{A.48}$$

如果力 F 是随位置变化的,即 F 是 s 的函数:$F=F(s)$,则不能运用(A.48)式来计算力 F 的功了。这时,我们也需要像计算变速运动的路程那样,把 (s_b-s_a) 这段距离分割成 n 个长度为 Δs 的小段(见图 A-11),并把各小段

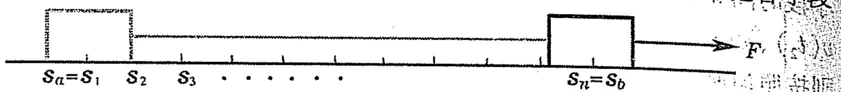


图 A-11

内力 F 的数值近似看成是恒定的,用恒力作功的公式计算出每小段路程 Δs 上的功,然后加起来取 $n\to\infty$、$\Delta s\to 0$ 的极限值。具体地说,设力 F 在各小段路程内的数值分别为 $F(s_1)$、$F(s_2)$、$F(s_3)$、…、$F(s_n)$,则在各小段路程上力 F 所作的功分别为 $F(s_1)\Delta s$、$F(s_2)\Delta s$、$F(s_3)\Delta s$、…、$F(s_n)\Delta s$. 在 (s_b-s_a) 整段路程上力 F 的总功 A 就近似地等于 $\sum\limits_{i=1}^{n}F(s_i)\Delta s$. 因为实际上在每小段路程上力 F 都是变化的,所以严格地计算,还应取 $n\to\infty$、$\Delta s\to 0$ 的极限值,即

$$A = \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}F(s_i)\Delta s.\tag{A.49}$$

同上例,这极限值应是 (s_b-s_a) 区间内 $F(s)$ 下面的面积(见图 A-12)。

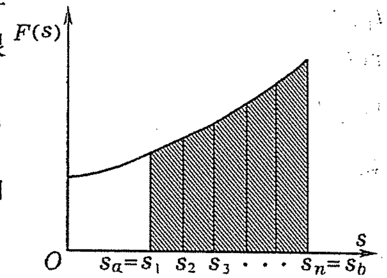


图 A-12

5.2 定积分

以上两个例子表明,许多物理问题中需要计算像(A.47)和(A.49)式中给出的那类极限值。概括起来说,就是要解决如下的数学问题:给定一个函数 $f(x)$,用 $x=x_1(=a)$、x_2、x_3、…、x_n、b 把自变量 x 在 $(b-a)$ 区间内的数值分成 n 小段,设每小段的大小为 Δx,求 $n\to\infty$ 即 $\Delta x\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$ 的极限。通常把这类形式的极限用符号 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 来表示,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x.\tag{A.50}$$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 叫做 $x=a$ 到 $x=b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分,$f(x)$ 叫做被积函数,b 和 a 分别叫做定积分的上限和下限。

用定积分的符号来表示,(A.47)和(A.49)式可分别写为

$$s = \int_{t_a}^{t_b} v(t)\,\mathrm{d}t\tag{A.51}$$

$$A = \int_{s_a}^{s_b} F(s)\,\mathrm{d}s.\tag{A.52}$$

在变速直线运动的路程公式(A.51)里,自变量是 t,被积函数是 $v(t)$,积分的上、下限分别是 t_b 和 t_a;在变力作功的公式(A.52)里,自变量是 s,被积函数是 $F(s)$,积分的上、下限分别是 s_b 和 s_a.

求任意函数定积分的办法有赖于下面关于定积分的基本定理:

如果被积函数 $f(x)$ 是某个函数 $\Phi(x)$ 的导数,即

$$f(x) = \Phi'(x),$$

则在 $x=a$ 到 $x=b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分等于 $\Phi(x)$ 在这区间内的增量,即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a).\tag{A.53}$$

现在我们来证明上述定理。

在 $a\leqslant x\leqslant b$ 区间内任选一点 x_i,首先考虑 $\Phi(x)$ 在 $x=x_i$ 到 $x=x_i+\Delta x\equiv x_{i+1}$ 区间的增量 $\Delta\Phi(x_i)=\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)$:

$$\Delta\Phi(x_i) = \frac{\Delta\Phi(x_i)}{\Delta x}\Delta x.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时,我们可用 $\Phi(x)$ 的导数 $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}$ 代替 $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}$,但按照定理的前提,$\Phi'(x)=f(x)$,故

$$\Delta\Phi(x_i) \approx \Phi'(x_i)\Delta x = f(x_i)\Delta x.$$

式中 $\approx$ 表示"近似等于",若取 $\Delta x\to 0$ 的极限,上式就是严格的等式。

把 $a\leqslant x\leqslant b$ 区间分成 $n-1$ 小段,每段长 Δx. 上式适用于每小段。根据积分的定义和上式,我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]\\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}[\Delta\Phi(x_1) + \Delta\Phi(x_2) + \cdots + \Delta\Phi(x_{n-1})]\\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\{[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] + [\Phi(x_3) - \Phi(x_2)]\\ &\qquad + \cdots + [\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})]\}\\ &= \Phi(x_n) - \Phi(x_1),\end{aligned}$$

因 $x_1=a$,$x_n=b$,于是得(A.53)式,至此定理证讫。

下面看看函数 $\Phi(x)$ 在 f-x 图(见图 A-13)中所表现的几何意义。如前所述,$\Delta\Phi(x_i)=\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=f(x_i)\Delta x$,正是宽为 Δx、高为 $f(x_i)=\overline{x_iP_i}$ 的一个矩形(即图 A-13 中的矩形 $x_i x_{i+1} N P_i$)的面积。它和曲线段

P_iP_{i+1} 下面的梯形 $x_ix_{i+1}P_{i+1}P_i$ 的面积只是相差一小三角形 P_iNP_{i+1} 的面积。当 $\Delta x \to 0$ 时，可认为 $\Delta\Phi(x_i)$ 就是梯形 $x_ix_{i+1}P_{i+1}P_i$ 的面积。

既然当 x 由 x_i 变到 x_{i+1} 时，$\Phi(x)$ 的增量的几何意义是相应区间 f-x 曲线下的面积，则 $\Phi(x)$ 本身的几何意义就是从原点 O 到 x 区间 f-x 曲线下面的面积加上一个常量 $C=\Phi(0)$。例如 $\Phi(x_i)$ 的几何意义是图形 $Ox_iP_iP_0$ 的面积加 C，$\Phi(x_{i+1})$ 的几何意义是图形 $Ox_{i+1}P_{i+1}P_0$ 的面积加 C，等等。这样，$\Delta\Phi(x_i)=\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)$ 就是：

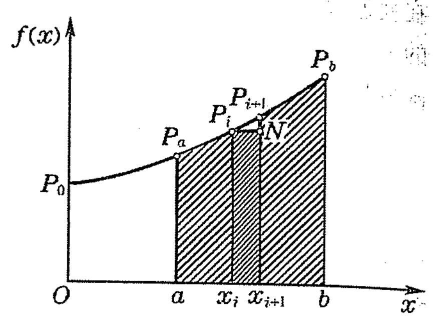


图 A－13

$(Ox_{i+1}P_{i+1}P_0$ 的面积$+C)-(Ox_iP_iP_0$ 的面积$+C)=x_ix_{i+1}P_{i+1}P_i$ 的面积，

而 $\Phi(b)-\Phi(a)$ 的几何意义是：

$(ObP_bP_0$ 的面积$+C)-(OaP_aP_0$ 的面积$+C)=abP_bP_a$ 的面积。

它相当于定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值。

5.3 不定积分及其运算

在证明了上述定积分的基本定理之后，我们就可以着手解决积分的运算问题了。根据上述定理，只要我们求得函数 $\Phi(x)$ 的表达式，利用(A.53)式立即可以算出定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 来。那么，给出了被积函数 $f(x)$ 的表达式之后，怎样去求 $\Phi(x)$ 的表达式呢？上述定理告诉我们，$\Phi'(x)=f(x)$，所以这就相当于问 $f(x)$ 是什么函数的导数。由此可见，*积分运算是求导的逆运算*。如果 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的导数，我们可以称 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的*逆导数*或*原函数*。求 $f(x)$ 的定积分就可以归结为求它的逆导数或原函数。

在上节里我们讲了一些求导数的公式和定理，常见的函数我们都可以按照一定的法则把它们的导数求出来。然而求逆导数的问题却不像求导数那样容易，而需要靠判断和试探。例如，我们知道了 $\Phi(x)=x^3$ 的导数 $\Phi'(x)=3x^2$，也就知道了 $F(x)=3x^2$ 的逆导数是 $\Phi(x)=x^3$。这时，如果要问函数 $f(x)=x^2$ 的逆导数是什么，那么我们就不难想到，它的逆导数应该是 $x^3/3$。这里要指出一点，即对于一个给定的函数 $f(x)$ 来说，它的逆导数并不是惟一的。$\Phi_1(x)=x^3/3$ 是 $f(x)=x^2$ 的逆导数，$\Phi_2(x)=x^3/3+1$ 和 $\Phi_3(x)=x^3/3-5$ 也都是它的逆导数，因为 $\Phi_1'(x)$、$\Phi_2'(x)$、$\Phi_3'(x)$ 都等于 x^2。一般说来，在函数 $f(x)$ 的某个逆导数 $\Phi(x)$ 上加一任意常量 C，仍旧是 $f(x)$ 的逆导数。通常把一个函数 $f(x)$ 的逆导数的通式 $\Phi(x)+C$ 叫做它的*不定积分*，并记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\Phi(x)+C. \tag{A.54}$$

因在不定积分中包含任意常量，它代表的不是个别函数，而是一组函数。

上面所给的例子太简单了，我们一眼就能猜到逆导数是什么。在一般的情况下求逆导数，首先要求我们对各种函数的导数掌握得很熟练，才能确定选用那一种形式的函数去试探。此外，掌握表 A－4 中给出的基本不定积分公式和其后的几个有关积分运算的定理，也是很重要的。(表中的公式可以通过求导运算倒过来验证，望读者自己去完成)

表 A－4　基本不定积分公式

函　数　$f(x)$	不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n\quad(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$n=1$ 时，$x^1=x$	$\frac{x^2}{2}+C$
$n=2$ 时，x^2	$\frac{x^3}{3}+C$
$n=3$ 时，x^3	$\frac{x^4}{4}+C$
$n=-2$ 时，$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$	$\frac{x^{-1}}{(-1)}+C=-\frac{1}{x}+C$
$n=\frac{1}{2}$ 时，$x^{1/2}=\sqrt{x}$	$\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3+C$
$n=-\frac{1}{2}$ 时，$x^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$
$n=-\frac{3}{2}$ 时，$x^{-3/2}=\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$	$\frac{x^{-1/2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$
…………	…………
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C

下面是几个有关积分运算的定理。

定理一 如果$f(x)=au(x)$ （a 是常量），则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = a\int u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{A.55}$$

定理二 如果$f(x)=u(x)\pm v(x)$，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x \pm \int v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{A.56}$$

这两个定理的证明是显而易见的，下面我们利用这两个定理和表A－4中的公式计算两个例题。

例题 10 求 $\int 5x^2\,\mathrm{d}x$.

解: $\int 5x^2\,\mathrm{d}x = 5\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}x^3 + C.$ ▌

例题 11 求 $\int (3x^3 - x + 4)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int (3x^3 - x + 4)\,\mathrm{d}x = 3\int x^3\,\mathrm{d}x - \int x\,\mathrm{d}x + 4\int \mathrm{d}x$

$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C.$ ▌

定理三 如果$f(x)=u(v)v'(x)$，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(v)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int u(v)\,\mathrm{d}v. \tag{A.57}$$

此定理表明，当$f(x)$ 具有这种形式时，我们就可以用 v 来代替 x 作自变量，这叫做换元法。经过换元往往可以把比较复杂的积分化成表A－4中给出的现成结果。下面看几个例题。

例题 12 求 $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x$.

解：令 $u(v)=\sin v$, $v(x)=ax+b$, $\mathrm{d}v=v'(x)\,\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}x$, 经换元得

$$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \sin v\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{a}\cos v + C = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$ ▌

例题 13 求 $\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解：令 $v(x)=\sin x$，则 $\mathrm{d}v=v'(x)\,\mathrm{d}x=\cos x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$ ▌

例题 14 求 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

解：令 $u(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $v(x) = x^2 + a^2$，则 $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}} = \sqrt{v} + C = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$ ▌

例题 15 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$.

解：令 $u(v) = \frac{1}{v}$, $v(x) = x - a$, 则 $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$, 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln|v| + C = \ln|x-a| + C.$$ ▌

5.4 通过不定积分计算定积分

当我们求得不定积分

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(x) + C$$

之后，将上、下限的数值代入相减，就得到定积分的值：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{A.58}$$

作定积分运算时，任意常量就被消掉了。

例题 16 计算 $\int_0^{1/2}\sin 2\pi x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \sin 2\pi x\,\mathrm{d}x$.

解：因为 $\int \sin 2\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x + C$，故

$$\int_0^{1/2}\sin 2\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{2\pi}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}[(-1)-1] = \frac{1}{\pi};$$

$$\int_0^1 \sin 2\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[1-1] = 0.$$

图 A－14 是 $f(x)=\sin 2\pi x$ 的曲线，它在 $x=0$ 到 $1/2$ 一段是正的，在 $x=1/2$ 到 1 一段是负的。从 $x=0$ 到 1 的定积分为 0，是因为横轴上下两块面积大小相等，一正一负，相互抵消了。

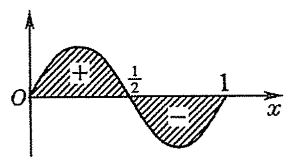


图 A－14

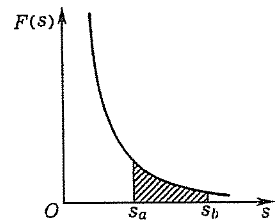


图 A－15

例题 17 推导匀变速直线运动的路程公式。

解: $v(t) = v_0 + at$,

$$s = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t (v_0 + at)\,\mathrm{d}t = \left[v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

例题 18 若在(A.52)式中力 $F(s)$ 与距离平方成反比：$F(s) = a/s^2$，求功 A（见图 A－15）.

解: $$A=\int_{s_a}^{s_b}F(s)\,\mathrm{d}s=\int_{s_a}^{s_b}\frac{a\,\mathrm{d}s}{s^2}=-\frac{a}{s}\Bigg|_{s_a}^{s_b}=a\left(\frac{1}{s_a}-\frac{1}{s_b}\right).$$

习 题

A－1.

(1) 若 $f(x)=x^2$,写出 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$ 之值。

(2) 若 $f(x)=\cos 2\pi x$, 写出 $f(0)$、$f\left(\frac{1}{12}\right)$、$f\left(\frac{1}{8}\right)$、$f\left(\frac{1}{6}\right)$、$f\left(\frac{1}{4}\right)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f(1)$ 之值。

(3) 若 $f(x)=a+bx$, $f(0)=$? x_0 为多少时 $f(x_0)=0$?

A－2. 求下列函数的导数:

(1) $y=3x^4-2x^2+8$, (2) $y=5+3x-4x^3$, (3) $y=\frac{1}{2}ax^2$,

(4) $y=\frac{a+bx+cx^2}{x}$, (5) $y=\frac{a-x}{a+x}$, (6) $y=\frac{1}{x^2+a^2}$,

(7) $y=\sqrt{x^2-a^2}$, (8) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, (9) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

(10) $y=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, (11) $y=x\tan x$, (12) $y=\sin(ax+b)$,

(13) $y=\sin^2(ax+b)$, (14) $y=\cos^2(ax+b)$, (15) $y=\sin x\cos x$,

(16) $y=\ln(x+a)$, (17) $y=x^2\mathrm{e}^{-ax}$, (18) $y=x\mathrm{e}^{-ax^2}$.

式中 a, b, c 为常量。

A－3. 计算习题 A－2(1)~(18) 中 y 的微分。

A－4. 求以下函数围绕 $x=0$ 的泰勒级数中前两个非 0 项:

(1) $f(x)=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, (2) $f(x)=\frac{1-ax}{(1-ax+x^2)^{3/2}}-1$,

(3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-1$, (4) $f(x)=1-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

A－5. 求下列不定积分:

(1) $\int(x^3+x-1)\,\mathrm{d}x$, (2) $\int(3-4x-9x^8)\,\mathrm{d}x$, (3) $\int\frac{x^2+x+1}{3}\,\mathrm{d}x$,

(4) $\int\frac{1+x^2+x^4}{x}\,\mathrm{d}x$, (5) $\int\frac{2-3x+6x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$, (6) $\int\sqrt{x+a}\,\mathrm{d}x$,

(7) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$, (8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}$, (9) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

(10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ $\left[提示: \frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right]$,

(11) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$, (12) $\int\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$, (13) $\int\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x$,

(14) $\int\tan x\,\mathrm{d}x$, (15) $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ $\left[提示: \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]$,

(16) $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, (17) $\int\sin 2x\sin x\,\mathrm{d}x$, (18) $\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

(19) $\int\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$, (20) $\int x\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$, (21) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$.

A－6. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1(3x^2-4x+1)\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_{-1}^1(8x^3-x)\,\mathrm{d}x$, (3) $\int_3^6\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$,

(4) $\int_1^8\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, (5) $\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}$, (6) $\int_{-2}^2\frac{\mathrm{d}x}{x+3}$,

(7) $\int_0^1\sin^2 2\pi x\,\mathrm{d}x$, (8) $\int_0^1\cos^2 2\pi x\,\mathrm{d}x$, (9) $\int_0^1\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$,

(10) $\int_1^2 x\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.

邱錦昌 (1)

什麼是$\dfrac{dx}{dt}$？

一、前言：

在「普通物理」的課程裡面，首先學的是『運動學』，而不用多久我們就會碰到一個這樣的符號：$\dfrac{dx}{dt}$。這個符號叫導數（derivative），它和積分（integral）同是另一門課程「微積分」中的兩個主要題材。因此同學們便不免要抱怨了，在還沒有學「微積分」之前，我們怎麼可能會『用』「微積分」來了解物裡呢？這樣的講法是似是而非的。事實上，學「微積分」最適當地方，並不是在「微積分」的課程中，而是在「普通物理」之中。理由很簡單，因為當初牛頓就是在研究運動學的過程中發展出「微積分」的，而他並不是在學完「微積分」之後才去解決物理問題的。所以用「普通物理」當作「微積分」的入門才是最順理成章的途徑。而「微積分」課程的目標只是在建立有系統的公式，使我們日後在計算時更方便及熟練而已。當然「微積分」課程也提供了較嚴密的邏輯推導，使得一些較挑剔的人感覺上更舒服些。不過就物理及應用的觀點而言，這些只是次要或是次一步的工作而已。我們可以不誇張的說，即便我們不知道這些嚴密的敘述，我們仍然可以走的相當的遠；畢竟牛頓並不知道今日微積分教課書中大部分的內容（比方說：極限），他還是完成了他的偉大工作，不是嗎？反過來說，假設給我們一個機會先學「微積分」，那時候我們又難免不斷的會問這些玩意兒到底是從那裡蹦出來的呢？它們有什麼用處呢？這並不是一個『雞生蛋，蛋生雞』的弔詭，從物理下手去學「微積分」才是顛撲不破的正確方法，要知道，「微積分」是物理之子而非母親。

然而由物裡去學「微積分」就真的沒有困難了嗎？那又不然！說起來這都是萊布尼茲惹的禍，因為他發明了一大堆古怪的符號讓我們看得眼花撩亂。其實微積分中的觀念，都和吃飯呼吸一樣，是非常自然的。大家或許已經知道『速度』就是微積分中討論的『導數』，而我們生活中不就是與之息息相關嗎？然而萊布尼茲卻把它們神秘化了。不過這決不是萊布尼茲故弄玄虛，我們必須要感激他，因為透過這些精心設計出來的符號，我們這些凡人才有可能去了解牛頓的天才傑作。然而這些符號的確是相當巧妙，不是一眼就能看透其深意，因此這就是初學者需要費點心力的所在。

二：導數

閑話表過，言歸正傳。什麼是導數呢？我們設想有一輛汽車在高速公路上開駛。我們用 t 表示時間，用 x 表示開過的距離，所以 x 是隨 t 而變的一個函數 x=x(t)。我們馬上會關心到汽車的快慢，那就是速度。假設在時間t_1 時它的位置在x_1，t_2 時它的位置在x_2。所以這段時間中，它的速度$v=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$。數學家習慣用$\Delta$t 表示$t_2-t_1$，$\Delta$x 表示$x_2-x_1$，所以 $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$。$\triangle$ 是希臘字母，叫做 delta，

邱錦昌 (1)

什麼是$\dfrac{dx}{dt}$？

一、前言：

在「普通物理」的課程裡面，首先學的是『運動學』，而不用多久我們就會碰到一個這樣的符號：$\dfrac{dx}{dt}$。這個符號叫導數（derivative），它和積分（integral）同是另一門課程「微積分」中的兩個主要題材。因此同學們便不免要抱怨了，在還沒有學「微積分」之前，我們怎麼可能會『用』「微積分」來了解物裡呢？這樣的講法是似是而非的。事實上，學「微積分」最適當地方，並不是在「微積分」的課程中，而是在「普通物理」之中。理由很簡單，因為當初牛頓就是在研究運動學的過程中發展出「微積分」的，而他並不是在學完「微積分」之後才去解決物理問題的。所以用「普通物理」當作「微積分」的入門才是最順理成章的途徑。而「微積分」課程的目標只是在建立有系統的公式，使我們日後在計算時更方便及熟練而已。當然「微積分」課程也提供了較嚴密的邏輯推導，使得一些較挑剔的人感覺上更舒服些。不過就物理及應用的觀點而言，這些只是次要或是次一步的工作而已。我們可以不誇張的說，即便我們不知道這些嚴密的敘述，我們仍然可以走的相當的遠；畢竟牛頓並不知道今日微積分教課書中大部分的內容（比方說：極限），他還是完成了他的偉大工作，不是嗎？反過來說，假設給我們一個機會先學「微積分」，那時候我們又難免不斷的會問這些玩意兒到底是從那裡蹦出來的呢？它們有什麼用處呢？這並不是一個『雞生蛋，蛋生雞』的弔詭，從物理下手去學「微積分」才是顛撲不破的正確方法，要知道，「微積分」是物理之子而非母親。

然而由物裡去學「微積分」就真的沒有困難了嗎？那又不然！說起來這都是萊布尼茲惹的禍，因為他發明了一大堆古怪的符號讓我們看得眼花撩亂。其實微積分中的觀念，都和吃飯呼吸一樣，是非常自然的。大家或許已經知道『速度』就是微積分中討論的『導數』，而我們生活中不就是與之息息相關嗎？然而萊布尼茲卻把它們神秘化了。不過這決不是萊布尼茲故弄玄虛，我們必須要感激他，因為透過這些精心設計出來的符號，我們這些凡人才有可能去了解牛頓的天才傑作。然而這些符號的確是相當巧妙，不是一眼就能看透其深意，因此這就是初學者需要費點心力的所在。

二：導數

閑話表過，言歸正傳。什麼是導數呢？我們設想有一輛汽車在高速公路上開駛。我們用 t 表示時間，用 x 表示開過的距離，所以 x 是隨 t 而變的一個函數 x=x(t)。我們馬上會關心到汽車的快慢，那就是速度。假設在時間t_1 時它的位置在x_1，t_2 時它的位置在x_2。所以這段時間中，它的速度$v=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$。數學家習慣用$\Delta$t 表示$t_2-t_1$，$\Delta$x 表示$x_2-x_1$，所以 $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$。△ 是希臘字母，叫做 delta，

數學家常用來表示兩個量相減後的『差』用的。

$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$是從$t_1$ 到t_2 時的平均速度，它的用處並不大，有用的量顯然是應該要讓 △t 儘可能的小，這樣得到的瞬時速度在日常生活中，尤其是在科學研究中才有用處。萊布尼茲就將△t 很小時的 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 記成 $\dfrac{dx}{dt}$ ，其理由是，d 是羅馬拼音中對應於希臘字母△的字母，因此用 $\dfrac{dx}{dt}$ 來表示：

$$\frac{dx}{dt} = \text{當}\triangle t\text{ 很小時的 } \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

注意，到這裡爲止$\dfrac{dx}{dt}$ 只是一個符號，它並沒有 dx 除於 dt 的意思，它純粹只是表示(1)式所說的那一個量是與Δx 除於Δt 有關而已。所以後來的 Langrange 就另創一個符號，認爲用簡單的一撇：$x'(t)$ （物理書本則用一點$\dot{x}(t)$）就足夠表達意思了。然而萊布尼茲的符號雖然有點囉唆，但仍有其優越性，因此直到現在它仍與 Langrange 的符號並存於微積分之中。

然而真正的問題是(1)式到底要怎麼算？所謂△t 很小到底是什麼意思？這是一個數學史上纏訟很多年的一個公案，不過已經被『極限』的觀念解決了，而且可以在「微積分」課程中學得到。但是那種ε - δ的極限討論方法，對於普通物理的需求而言，可真是殺雞用牛刀，是很多初學者的夢魘，反而會被攪得更糊塗也不一定。就應用的觀點而言，還不如直接面對問題，下手算算看比較實際。下面讓我們選一些熟悉的函數，來了解(1)式的涵義吧。我們從多項式開始：

例 1： $x(t) = t^n$ 　　　　n 是正整數

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \qquad \because t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$= \frac{(t_1 + \Delta t)^n - t_1^n}{\Delta t}$$

$$= \frac{\left[t_1^n + n t_1^{n-1}\Delta t + \dfrac{n(n-1)}{2} t_1^{n-2}(\Delta t)^2 + \ldots + (\Delta t)^n\right] - t_1^n}{\Delta t} \qquad \text{利用三項式定理}$$

$$= n t_1^{n-1} + \Delta t\left[\frac{n(n-1)}{2} t_1^{n-2}\cdot(\Delta t) + \cdots + (\Delta t)^{n-1}\right]$$

最後一式中我們將 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 分成了兩個部份，前一項與Δt 無關，所有與Δt 有關的項都集中到第二項裡頭去了。因此既然Δt 很小的話，那就將第二項全部丟掉，於是就得到在t_1時，

$$\frac{dx}{dt}=nt_1^{n-1}$$

例 2： $x=\frac{1}{t}=t^{-1}$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}}{t_2-t_1}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$=\frac{\frac{1}{t_1+\Delta t}-\frac{1}{t_1}}{\Delta t}$$

$$=\frac{-\Delta t}{t_1(t_1+\Delta t)\cdot\Delta t}$$

$$=-\frac{1}{t_1(t_1+\Delta t)}$$

因爲Δt 很小，所以我們便可將最後一式中的Δt 丟掉，得到

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t_1^2}$$

由這兩個例子可以看出，把 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 作一點適當的安排，我們總是可以在最後安心的把含義不明但是非常小的Δt 去掉。對於別的函數是否也是對的呢？答案是肯定的，至少對於普通物理中會碰到的函數都是對的。下面我們不妨再給個例子請各位自己練習看看。

練習 1： $\frac{dt^{\frac{1}{n}}}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt[n]{t}=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}$

稍爲觀察一下上面三個例子的結果，我們發現它們都符合同樣一條公式：

$$\frac{d}{dt}t^r=r\,t^{r-1}$$

對於例 1：$r=n$；對於例 2：$r=-1$；對於例 3：$r=\dfrac{1}{n}$ 。事實上(3)式對於一般的有理數 $\dfrac{m}{n}$ 也適用。只是這時候若直接訴暴力計算就有點困難度了，現在才是需要學點微積分的時候了。微積分中會建立一些加、減、乘、除，尤其是所謂鏈律（chain rule）的公式，使我們的計算變輕鬆。

三：三角函數

除了 $x(t)=t^{\frac{n}{m}}$ 之外，三角函數也是普通物理中常用到的函數，我們也來求求它們的導數看看。先來看 $\sin t$ ，爲了方便起見，我們用弧度當作自變數 t 的單位。

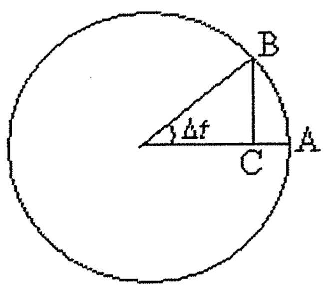
例 3：$x(t)=\sin t$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\sin t_2-\sin t_1}{t_2-t_1}$$

$$=\frac{\sin(t_1+\Delta t)-\sin t_1}{\Delta t}$$

$$=\frac{\sin t_1\cos\Delta t+\cos t_1\sin\Delta t-\sin t_1}{\Delta t}$$

$$=\cos t_1\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}-\sin t_1\frac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}$$



現在我們碰到了兩個麻煩，$\dfrac{\sin\Delta t}{\Delta t}$ 和 $\dfrac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}$ 在 Δt 很小的時

候是什麼呢？先來看 $\frac{\sin \Delta t}{\Delta t}$。讓我們畫一個單位圓，由圖上我們知道弧長 AB 等於 Δt（記得，現在我們用弧度當作自變數 t 的單位），線段長 BC 等於 $\sin \Delta t$。而在 Δt 很小的時候，弧長 AB 和線段長 BC 似乎相當接近，因此我們不妨就猜測一下，

$$\sin \Delta t \approx \Delta t \qquad \text{在 } \Delta t \text{ 很小的時候} \qquad (2)$$

假設仍然不放心的話，我們可以把很小的 Δt 輸入一個計算器中，就會發現 Δt 和 $\sin \Delta t$ 的確是相差無幾的。當然，這樣的推斷是很不科學的，但是微積分會給我們一個滿意的處理，同時那也並不很困難。然而就普通物理的目的而言，我們應該已有足夠的理由和勇氣走下去了。

下面請各位利用（2）的結果，求一下另一個結果：

練習 2：$\frac{\cos \Delta t - 1}{\Delta t} \approx$

$$\text{在 } \Delta t \text{ 很小的時候} \qquad (3)$$

綜合（2） 及 （3） ，最後我們便求得

$$\frac{d \sin t}{dt} = \cos t_1 \qquad (4)$$

練習 3：$\frac{d \cos t}{dt} = -\sin t$

練習 4：$\frac{d \tan t}{dt} = \sec^2 t$

到此我們對於六個三角函數的導數應該沒問題了，而普通物理中會出現的函數也差不多就是這些了，我們只需再加兩個函數就夠用了。一個很自然的問題是，有沒有什麼函數它的導數仍然是它自己呢？答案是有的，它叫指數函數，顯然它是相當有用的，同時性質也非常簡單。不過很可惜，它卻不太容易介紹清楚，因此指數函數和它的反函數對數函數，我們只好另文介紹了。

綜合以上所說的一招半式，就已足夠我們行走普通物理中的運動學的江湖了。在此同時各位再在微積分的課程中做些捕強的工作，就足以應付進一步的挑戰了。

四、高階導數

在上面的討論中，t_1 可以是任意時刻，所以導數也是一個函數。也就是說，

在任一時刻，車子開過一個當時的距離，同時也有一個當時的速度。符號上記爲

$$V(t)=\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

這個函數當然可以依樣畫葫蘆的再去求它的導數，這就是加速度，而微積分中就叫它爲 x(t)的二階導數，符號上記爲

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

萊布尼茲的符號顯然仍是有點沒必要的囉唆，不過它能存活至今而沒遭淘汰，自然是有它的理由的。不過這點我們不需追究，在此我們只要明瞭它代表的是什麼就行了。加速度在牛頓力學中佔有關鍵性的地位。同樣的，二階導數在了解函數的行爲以及在求極大極小的問題上非常有用。依此類推，我們當然可以有更高階的導數，不過它們的定義和符號就不用在此贅述了。

邵錦昌（2）

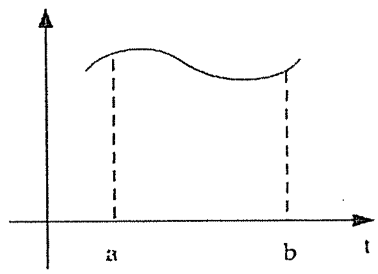
積分和微積分基本定理

一、定積分：

定積分（definite integral）就是求面積，因此毫無神秘性可言，只是數學家用了一個古怪的名詞有點嚇人而已。我們買房子的時候，第一件關心的事情不就是房子的坪數嗎？所以自從遠古的時候，人們就已經在接觸這個問題了，它隨時在我們的日常生活中出現。直到很後來人們才開始關心速度的觀念，因此在微積分中，積分是遠要比導數更古老的問題。不過，要得到準確的面積値卻也不是一件簡單的事情。一般而言，大概只有對於用直線或是用圓弧圍起來的面積才辦得到。而用複雜一點的曲線所圍的區域，就會令人束手無策了。積分的目的就是要解決這個問題。

讓我們先來看一個比較簡單的問題。考慮如圖 1 的區域，三邊是互相垂直的直線，而一邊則是一條曲線，假設這條曲線可以以函數 x=f(t)，a≦t≦b，來表示。我們目前能做的最好的事情大概就是求一下這塊面積的近似值。把 a 到 b 間分成 n 段小線段：

$$a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$$



在每一個小線段 $[t_{i-1}, t_i]$ 中，任取一點 z_i；我們以函數值 $f(z_i)$ 爲高，$[t_{i-1}, t_i]$ 爲底作一小長方形，然後把這些小長方形的面積加起來，這是可以辦得到的。很明顯而且也很容易證明，如果每一段 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 取得越小，則這些小長方形的面積和越接近我們所要求的面積 A。即：

$$A \square \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta t_i \qquad (1)$$

萊布尼茲於是就介紹了一個特殊的符號：

$$A = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{當每一段 } \Delta t_i \text{ 很小時} \qquad (2)$$

用 $\int$ 的原因是因爲 A 是一種把每段 Δt_i 都取很小時無限多項的變形和，所以就把和的符號 Σ 拉長了，而將它稱之爲定積分。那麼它要如何加呢？這點我們下文再討論。目前我們只要記得 $\int_a^b f(t)dt$ 這個奇怪的符號（尤其先不要管那個 dt ）只是代表面積就行了。

要強調的是，這樣的處理方式並不只在面積問題上出現，它幾乎是無所不在的。在普通物理中，『功』是一個重要且有用的觀念。考慮一個物體在一條直線上受力 f 的作用移動 Δx 距離，則我們說，力 f 對這物體所作的功是 f×Δx。但是如果這個力隨著位置在變化時 f=f(x)，那麼當這物體由 a 點移動到 b 點的時候，這個力所作的功是多少呢？答案顯然是：我們將[a，b]之間分成很多小位移：

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

每個小位移分割得足夠小，使得在這小位移間的力幾乎可以視爲不變，然後我們求每一小段之間的功，再加起來：

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad\qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

它就差不多會等於我們所想要的功了。比較一下這個公式與面積公式，可說是完全一樣的。所以當每段 Δx_i 都取得很小的時候，我們就可以利用萊布尼茲的符號寫下功的公式：

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

這樣的例子在普通物理之中可說是俯拾皆是的，各位應該可以舉一隅而以三隅反。由此可以看出萊布尼茲的符號是普遍適用的，它可以將許多來源不同東西連貫在一起，一舉解決很多問題。

二、一些例子

現在我們來看看像(1)這樣的和要怎麼加？先來看最簡單的例子。

例 1：直線

$f(t) = t \qquad\qquad 0 \le t \le b$

這是一個小學生的題目，答案顯然是

$$\int_0^b t\,dt = \frac{b^2}{2}$$

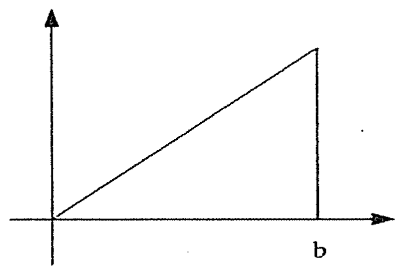


圖 2

不過我建議各位用小長方形的方法做做看，雖然很笨拙，但是可以用來熟悉一下積分的涵義。

例 2：圓

$f(t) = \sqrt{1-t^2} \qquad\qquad -1 \le t \le 1$

這題目也不難，因爲答案是半圓的面積，是一般的常識，故

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

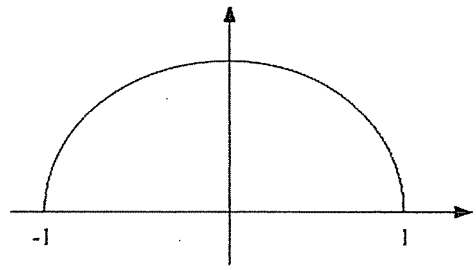


圖3

但是沒有人能夠用小長方形的方法得到這個答案。

例 3：拋物線

$f(t)=t^2$ $\qquad\qquad 0\le t\le b$

這題目沒有現成的答案，我們只有用小長方形的方法求求看了。完全爲了方便的緣故，我們將線段[0, b]分成 n 等份，每段$\Delta t_i=\dfrac{b}{n}$，再選取$z_i=\dfrac{i}{n}b$，故

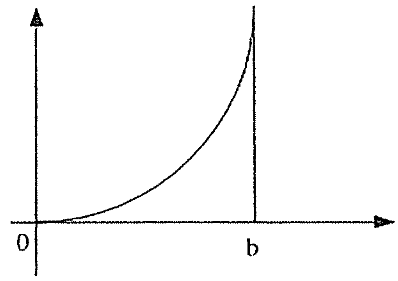


圖4

例 3：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i^2\Delta t_i$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}$$

$$=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{b^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

要使Δt_i很小，只要使 n 很大即可，所以$\dfrac{1}{n}$項俱可忽略，故

$$\int_0^b t^2dt=\frac{b^3}{3}$$

這就是拋物線$x(t)=t^2$　在[0, b]之間的面積。

練習 1：證明

$$\int_0^b t^3dt=\frac{b^4}{4}$$

但是不幸的是，除了這些例子之外，我們很難再用加小長方形面積的方法求任何面積了。一般而言，這幾乎是件不可能的任務。拋物線的面積基本上是紀元前 250 年左右由阿幾米德解決的。不過阿幾米德並不懂解析幾何這樣的高等數學，所以不像我們在例 3 那麼輕鬆，他算出拋物線面積的困難度是超乎我們想像的。然而在他之後將近兩千年的時間中，這個算面積的問題就一直停滯不前毫無進展，直到牛頓和萊布尼茲發現了所謂的『微積分基本定理』才峰迴路轉有了突破。正是「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村。」

三、微積分基本定理

如果我們在數學家中作一個民調，請他（她）們在多如過江之鯽的數學定理中選出一個他（她）們心目中最重要的定理，我敢打賭有九成以上數學家會選微積分基本定理。的確，任何人在了解這個定理之後，就像打通任督二脈一樣，會脫胎換骨似的使數學功力大進。這個定理的特別之處，是它很不容易被想到或發現。因爲它將兩個看起來毫不相干的概念，速度和面積，聯繫在一起，從而發揮了無與倫比的威力，但也因此隱藏了將近兩千年，而沒有被牛頓和萊布尼茲以前的數學天才所發現。不過說也奇怪的是，一旦你想到了這個聯繫，要去理解或是去證明，卻不是一件困難的事情，這真是「眾裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在，燈火闌珊處。」

下面我們就來看看微積分基本定理。對於一個定義在[a,b]間的函數 f(t)，我們考慮如圖 2 所示的面積。這個面積的大小顯然隨著 t 變化，因此它是一個 t 的函數，稱之爲面積函數 F(t)。於是如下的關係便成立：

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t) \qquad (3)$$

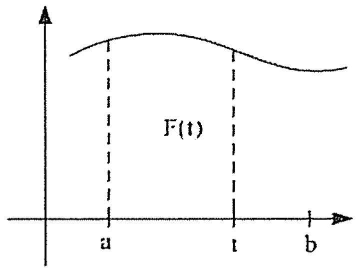


圖5

這個不起眼的公式就是微積分基本定理了。用萊布尼茲的符號來寫就是：

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)dt = f(t) \qquad (4)$$

也就是說，一個函數求完定積分之後再求導數，便會回到其本身。用大白話來說就是，求面積和求速度就如同乘法和除法的關係一樣，是一種運算及反運算的關係！這個結果是如此的簡單但也非常的不明顯，然而卻並不難理解它爲何會成立。解釋如下：(3)式的左邊是導數，意思是

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \qquad \text{當 } \Delta t \text{ 很小時}$$

如圖 6，F(t+Δt)是圖中橫線所覆蓋的面積，F(t)則是直線所覆蓋的面積。兩者相減後，可知上式的分子是近似狹長長方形 ABCD 的面積，除於邊長Δt 之後就是另一邊長 f(t)，即(3)式的右邊。這就是微積分基本定理會成立的理由，很簡單吧？當然這不算是一個證明，微積分課程中會提供完整的証明，不過正式的證明也只是將細節交代得更清楚點罷了，基本精神就是這些而已。

四、反導數、不定積分

微積分基本定理的用處是「罄竹難書」的，我們這裡只關心如何來求面積。首先先介紹個名詞。F(t)的導函數是 f(t)，很自然的，我們就將面積函數 F(t)叫做 f(t)的反導數。然而 f(t)的反導數不只一個，很明顯 F(t)加上任何常數後仍是一個反導數，因為常數函數的導數等於零。不過 f(t)所有的反導數也就是這些了，這點需要個證明，不過無關緊要。所以如果 G(t)是 f(t)的任意一個反導數，則

$$G(t)= F(t)+C \qquad C \text{ 是一個常數}$$

曲線 f(t)在[a ,b]之上的面積即為

$$A=F(b)=F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$$

因為 F(a)=0。所以求面積的問題現在變成求反導數的問題了。注意，G(t)是一群互相之間只差常數的函數中的任一個；而它們又有另外一個名字叫作不定積分（indefinite integral），通常是用下面的符號來表示：

$$\int f(t)\, dt= G(t) + C$$

那麼不定積分要怎麼求呢？它既是反導數，當然由導數著手。導數是一種遠要比定積分的運算來得簡單的運算，我們在導數的領域中已經累積了一大堆的成果了，再加上一些所謂的積分技巧，我們能求的不定積分非常的多。換句話說，我們會算的面積問題數量也就急速暴增了，這就是微積分基本定理的威力。事情更好的是，這些數量龐大的積分公式早已在前幾代的數學家們的辛勤勞動之下建立完備了，並且印在所謂「積分表」的書上了。近年來尤其方便的是，利用數學軟體，我們在電腦上面就可以唾手得到這些公式了。前人既已種樹，後人當然可以納涼，我們即便尚未在微積分課程中學到如何去做一個積分，但是先用一下這些現成的結果是並不困難的。

例 4：

$$\int_a^b \frac{1}{t^2}dt \qquad b > a > 0$$

$$\because \; f(t) = \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \; G(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\therefore \; \int_a^b \frac{1}{t^2}dt = G(b) - G(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

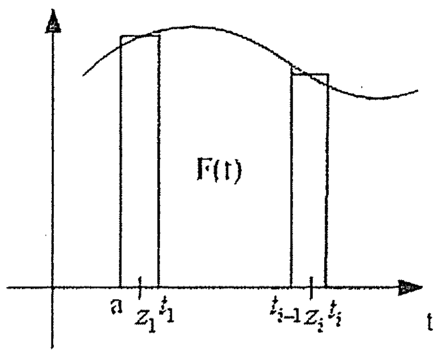


图1

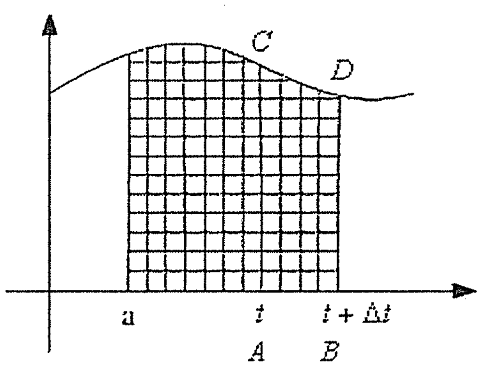


图6

第二章 數學工具

在本章中我們將討論及複習在此普通物理課程中所需用的數學工具

第一節 微分與積分

1. 簡介

在此一節中，我們首先來討論微分與積分觀念 連續

2. 基本觀念

(A) 微分

微分之定義 令 $y=f(x)$ 為 x 之函數，則該函數在 x 點之一度微分為[1][2][3]

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

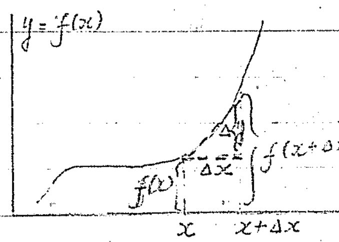


Figure 1

(B) 積分

積分之定義 令 $y=f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 間為存在，同時將 $b-a$ 之間利用 $n+1$ 個 x_i 分成 n 段，此處 x_i 滿足以下之條件：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \quad < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

令 c_i 是第 i 段 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 中之一點，$max(\Delta x_i)$ 是 Δx_i 中之極大值，則

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \qquad (2)$$

[4], [5]

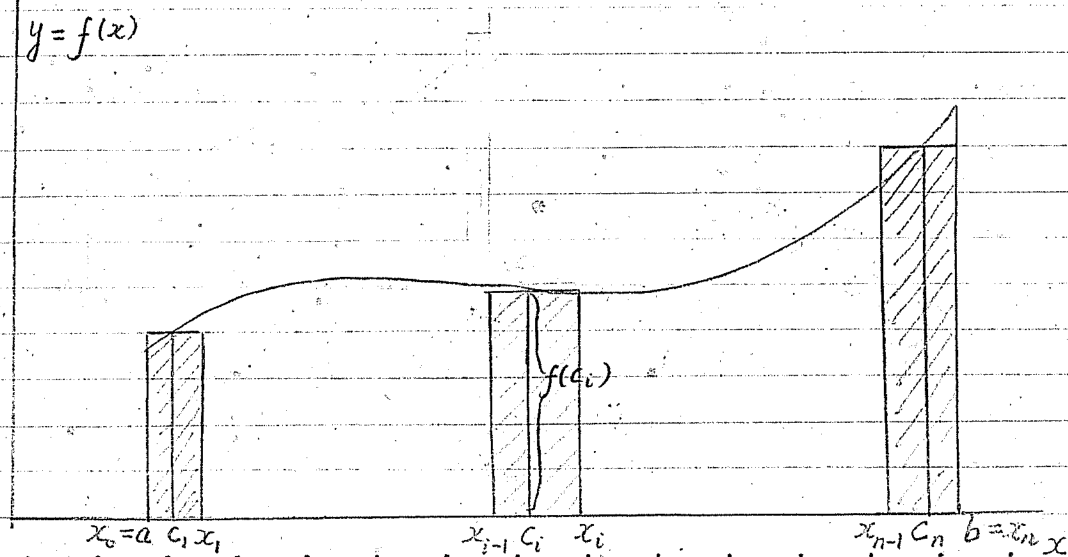


Figure 2

分類：
編號： 2
總號：

積分之基本定理 (6),(7) (8)

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$$

此處 $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$，而 c 為一常數

3. 討論

(1) 微分存在之條件，可參看任一微積分課本

(2) 由圖一，我們可看出 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 曲線在 x 點之斜率

$f'(x) \geq 0$ 表示 $f(x)$ 在 x 處為一上昇曲線，$f'(x)<0$ 表示 $f(x)$ 在 x 處為一下降曲線

(3) 很明顯地 $f(x)$ 對 x 之二度微分即是對其一度微分 $f'(x)$ 之微分 其他依此類推

(4) 積分存在之條件，可參看任一微積分課本

(5) 由圖二及積分之定義，我們可以看出 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是 $f(x)$ 曲線下在 $x=a$ 到 $x=b$ 間之面積

(6) 注意由此定理中可得 $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + c$，$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + c$

因此 $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$。同時注意 $\int_a^x f(t)\,dt$ 或 $\int_a^b f(t)\,dt$

均不再是 t 之函數。當上下限為常數時，該積分稱為定值積分

(7) 由此一基本定理，我們也可看出微分與積分之密切關係。對一函數 $f(x)$ 對 x 之積分之目的是找尋一函數 $F(x)$ 其對 x 之微分為 $f(x)$

(8) 此一定理之證明，可參看任一微積分課本

4. 應用

(1) 常用之簡單微分

(a) $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

證 $\frac{d}{dx} x^n \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

分類：
編號： 3
總號：

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} \Delta x + (\text{higher order of } \Delta x) - x^n}{\Delta x}$$

$$= n x^{n-1}$$

(b) $$\frac{d}{dx} \sin x \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} + \text{higher order of } \Delta x \right)}{\Delta x}$$

$$= \cos x$$

(c) $$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (1 + \Delta x + (\text{higher order in } \Delta x) - 1)}{\Delta x}$$

$$= e^x$$

(d) $$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x} + \text{higher order of } \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

(2) 其他微分中有用之公式

(a) 若 $u(x)$ 及 $v(x)$ 為 x 之可微分函數則

✓ $$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

✓ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(b) 連續法則 若(1) $u = g(x)$，而 $g(x)$ 在 x 處可以微分，(2) $y = f(u)$

而 $f(u)$ 在 $u=g(x)$ 處可以微分 則 $y=h(x)=f[g(x)]$ 在 x 處可以微分 同時

其微分 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

(3) 求一函數之局部極大或極小值

一函數之局部極大或極小值必須滿足之條件可用微分的方式表出. 我們將以極小值為例來討論 若 $y=f(x)$ 函數在 $x=x_0$ 點為一極小值, 則此函數在接近並小於 x_0 時必為一下降函數, 因此 $x=x_0-\varepsilon$ 處 $\frac{df(x)}{dx}<0$. 同時在 $x=x_0+\varepsilon$ 處 $\frac{df(x)}{dx}>0$ 若 $\frac{df}{dx}$ 為一連續函數, 則在 $x=x_0$ 處 $\frac{df}{dx}$ 必需為 0. 同時很明顯地在 $x=x_0$ 處 $\frac{df(x)}{dx}$ 為一上昇函數, 因此 $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}>0$.

我們於是得到下列之結論

若 $x=x_0$ 處為 $f(x)$ 函數之一局部極小值, 則 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=0$, $\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}>0$

同樣的,

若 $x=x_0$ 處為 $f(x)$ 函數之一局部極大值, 則 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=0$, $\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}<0$

(4) 常用之簡單微分

利用積分之基本定理, 我們可以利用上列之簡單微分公式得到下列之簡單積分公式

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \qquad n\neq -1$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int e^x\,dx=e^x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x.$$

5. 習題

1. (a) 求 $f(x)=3x^2-7x$ 之微分及其在 $x=2$ 點此一函數之微分值 (F)

分類：	
編號：	5
總號：	

(b) 求 $f(x) = A\cos 5y$ 之微分及其在 $y = \pi/20$ 點此一函數之微分值
(此處 A 為一常數) (H)

(c) 求 $\frac{d}{dx}\tan x$ (K)

(d) 求 $f(x) = Ae^{-2y} + Be^{y/6}$ 之微分及其在 $y=0$ 點此一函數之微分值 (J)

(e) 求 $f(x) = \frac{x^2+7x+2}{x+2}$ 之微分及其在 $x=1$ 點此一函數之微分值 (A)

2. 求下列函數在何處有局部極大及極小值，明確的分辨其為局部極大或極小值

(a) $F(x) = 4x^2+3x+2$，並求此一函數在其極大或極小點之值 (B)

(b) $F(y) = y^2e^{-y}$ (I)

3. 試證 $F(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ (此處 A 和 B 均為常數，$\omega^2 = K/M$)

滿足下列之微分方程式， $M\frac{d^2F(t)}{dt^2} + KF(t) = 0$. (L)

此處 $\frac{d^2F(t)}{dt^2}$ 是 $F(t)$ 對 F 之二度微分，K 及 M 均為常數

在很多物理情況下，我們會遭遇到和上面類似之微分方程式，當然在此門課中不能要求同學解微分方程式，但我們必須能證明一已知函數是否一指定微分方程之解

4. 求下列定值積分

(a) $\int_{-2}^{2}(5x^2+x)\,dx$ (G)

(b) $\int_0^{\infty} e^{-5y}\,dy$ (C)

(c) $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ (D)

5. 求在 $5y^3+6y-2$ 下在 $y=1$ 及 $y=2$ 間之面積 (E)

(6) 答案

(A) $f'(x) = \frac{x^2+4x+12}{(x+2)^2}$，在 $x=1$ 點，$f'(1) = \frac{17}{9}$

(B) 極小點在 $x = -3/8$
在極小點函數值為 $\frac{23}{16}$

(C) $1/5$

(D). $1/2$

(E) 25.75

(F) $f'(x) = 9x^2 - 7$，在 $x=2$ 點，$f'(2) = 29$

(G) 80/3

(H) $f'(y) = -5A\sin 5y$，在 $y=\frac{\pi}{20}$ 點，$f'(\frac{\pi}{20}) = -5A/\sqrt{2}$

(I) 其最小值點在 $y=0$ 處，其最大點在 $y=2$ 處（在 $y=+\infty$ 點，其斜率亦為0 是該函數之最小值，在 $y=-\infty$ 點函數值趨向無窮大，但並非一真正極大值點）

(J) $f'(y) = -2Ae^{-2y} + \frac{B}{6}e^{\frac{y}{6}}$，在 $y=0$ 點，$f'(0) = -2A + B/6$

(K) $\sec^2 x$

(L) $F(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$$\frac{dF(t)}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2 F(t) = -\frac{K}{M}F(t)$$

所以 $M\frac{d^2F(t)}{dt^2} + KF(t) = 0$ 因此 $F(t)$ 是該微分方程式之解

(7) 求積分中常用的幾種方法（也許可置於 (4) 常用之積分之後）

我們有時會遇到較複雜的積分，我們在這裏討論幾種常用的求積分之方法。

(一) 部分積分法

基本公式：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

證明：$\frac{d}{dx}(uv) = u\,dv + v\,du$ 可改寫為 $u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$

$$\int u\frac{dv}{dx} = \int\frac{d}{dx}(uv) - \int v\frac{du}{dx}$$

因此 $\int u\,dv = uv - v\,du$

例：$\int xe^{ax}$

令 $u=x$，$du=dx$，$dv=e^{ax}dx$，$v=\frac{1}{a}e^{ax}$

利用以上之公式 $\int xe^{ax}dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int\frac{1}{a}e^{ax}dx$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c$$

利用部分積分之要點 (一) dv 必需能很容易地積分

(二) $\int v\,du$ 應比 $\int u\,dv$ 簡單

(二) 部分分數法

分類：	
編號：	7
總號：	

若我們有一積分之形態為 $\int \frac{g(x)}{h(x)}dx$，同時 $h(x)$ 是能分解時，我們可利用代數中部分分數的方法將其化為較簡單之積分。因此，這只是將函數轉換成較易積分之代數方法，而不是積分之方法。

例 $\int \frac{dx}{x^2-4}$

利用部分分數之方法可得

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$$

因此

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{1}{4}\ln(x+2) + C$$

利用部分分數之要點是 $h(x)$ 能分解

(三) 替換法

利用變換變數的方法使函數以另一變數表示時有較易積分之形式。

例 $\int 4x\sqrt{1-3x^2}\,dx$

令 $u = 1-3x^2$ $du = -6x\,dx$

因此 積分 $\int 4x\sqrt{1-3x^2}\,dx = -\frac{4}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$$= -\frac{4}{9}(1-3x^2)^{3/2}+C$$

注意在計算定值積分時若變數更改則其上，下限也必須隨着更改

習題

1. $\int x^2e^{x}dx$ (B)

2. $\int \ln x\,dx$ (C)

3. $\int \frac{dx}{x(1-x)^{1/2}}$ (A)

分類：
編號： 8
總號：

4. $\int \frac{8\,dx}{x^3-4x}$ (D)

(A) $\ln(1-\sqrt{1-x}) - \ln(1+\sqrt{1-x}) + C$ (二, 三)

(B) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$ (一)

(C) $x\ln x - x + c$ (一)

(D) $\ln \frac{x^2-4}{x^2} + c$ (三)

TAYLOR SERIES

The *Taylor series* for $f(x)$ about $x = a$ is defined as

$$f(x) \;=\; f(a) \;+\; f'(a)(x-a) \;+\; \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \;+\; R_n \qquad (10)$$

where $$R_n \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0)(x-a)^n}{n!}, \qquad x_0 \text{ between } a \text{ and } x \qquad (11)$$

is called the *remainder* and where it is supposed that $f(x)$ has derivatives of order n at least. The case where $n = 1$ is often called the *law of the mean* or *mean-value theorem* and can be written as

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; f'(x_0) \qquad x_0 \text{ between } a \text{ and } x \qquad (12)$$

The infinite series corresponding to (*10*), also called the *formal Taylor series* for $f(x)$, will converge in some interval if $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ in this interval. Some important Taylor series together with their intervals of convergence are as follows.

1. $e^x \;=\; 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

2. $\sin x \;=\; x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

3. $\cos x \;=\; 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

4. $\ln(1+x) \;=\; x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

5. $\tan^{-1} x \;=\; x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$

A series of the form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ is often called a *power series*. Such power series are uniformly convergent in any interval which lies entirely within the interval of convergence [see Problem 1.120].

分類：
編號： 1
總號：

第四節 一個函數在一點附近的泰勒級數展開

1. 簡介

許多複雜的函數 $f(x)$ 在一有限範圍中可以 x 之多項式來加以近似. 例如在一双原子分子中原子間之力是其原子距離的複雜函數 因此我們不易找出其對於其平衡点所作之振動 但是當其運動離平衡點不遠時,其力量函數可以用其多項式來近似. 由此我們可以得到原子在平衡附近運動之近似解. 這種解在力學,分子化學,分子物理及很多其他部門均十分重要. 在此節中我們將討論利用泰勒級數展開法來決定一函數在某一範圍中之近似多項式.

2. 基本觀念

假如我們有一函數 $f(x)$. 而我們已知它及它的微分在 $x=x_0$ 點之值 則此一函數在 x_0 附近一點 x 之值可用泰勒級數[1,2,3,4]之展開表出

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$
$$+ \cdots \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{n}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n} \qquad (1)$$

此處 $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, … $f^{n-1}(x_0)$ 分別為函數 $f(x)$ 之一度,二度,…$(n-1)$度微分在 x_0 點之值, 而 $f^{n}(\xi)$ 是此函數之n度微分在ξ點之值,而ξ為x_0及x間之某一點

3. 討論

(1) 該公式之證明,可參看任一微積分課本

(2) 當 $x\to x_0$ 時,(1)式顯然是正確的.

(3) 若我們取(1)式的前 $n-1$ 項則由此式中所得之結果與 $f(x)$ 之實際值之差為 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ 此處 $f^{(n)}(\xi)$ 是該函數在 x 與 x_0 之間某一點 ξ 之第n度微分值

如果 $|f^n(x)|$ 在 x 与 x_0 間之值永遠小於一數 R_n 則取(1)式中之前 $n-1$ 項与 $f(x)$ 實驗值之差必小於 $\frac{R_n}{n!}(x-x_0)^n$.

若是 $f(x)$ 在 x_0 与 x 之間確實是一 x 之 $n-1$ 次多項式則在 x_0 与 x 之間 $|f^n(x)|=0$ 故取(1)式中前 $n-1$ 項之結果与 $f(x)$ 之值完全相同.

這是一個理所當然之結果

(4) 上列之展開只有在某一範圍之中 (1)式為收斂級數,而此一範圍則稱為收斂半徑. 對任一函數 $f(x)$, 收斂半徑的決定是一複雜之問題. 但在(7)中將討論一些簡單及常用之函數之收斂半徑

4. 應用:

(1) 很多函數之級數展開均是利用泰勒級數之方法,我們將舉幾個例子來討論.

(a) $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 點附近之泰勒級數展開

$f(x)=\sin x$, $f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$, $f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$, $f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $f'''(0)=1$

$f^{iv}(x)=\sin x$ $f^{iv}(0)=0$

$f^{v}(x)=\cos x$ $f^{v}(0)=1$

將以上之結果代入(1)式,我們得

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \quad (2)$$

此式之誤差小於 $\left|\frac{1}{6!}\sin\xi\, x^6\right|$ 此處 ξ 是在 0 与 x 之間

若 $x=\frac{\pi}{6}$，則此式之誤差小於 $\frac{1}{720}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^6$，所以上式確為 $\sin x$ 極好的近似級數

同時當 $x\ll 1$ 時，$\sin x\approx x$

注意此處 x 之單位是弧度

(b) 求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}=46^\circ$ 之值

此時我們將利用泰勒級數在 $x=\frac{\pi}{4}$ 附近之展開

$$f(x)=\sin x \qquad f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''''(x)=+\sin x \qquad f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

將上列結果代入 (1) 式，可得

$$f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1!}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{180}\right)-\frac{1}{2!}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2-\frac{1}{3!}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+\cdots \tag{3}$$

此例之主要目的是強調我們可以對任一點 $x=x_0$ 作泰勒級數之展開，而非一定對 $x=0$ 點作展開，唯一的要求是能求得 $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ … 之值.

(c) 求 $f(y)=(1-y^2)^{1/2}$ 在 $y=0$ 附近之泰勒級數展開

$$f(y)=(1-y^2)^{1/2} \qquad f(0)=1$$

$$f'(y)=-y(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0)=0$$

$$f''(y)=-y^2(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}-(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(y)=-y^2(1-y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2y)-(1-y^2)^{-3/2}(+2y)+\frac{1}{2}(1-y^2)^{-3/2}(-2y), \quad f'''(0)=0$$

分類：	
編號：	4
總號：	

$$f^{iv}(y) = 2y^3\left(-\tfrac{5}{2}\right)(1-y^2)^{-7/2}(-2y)$$

$$+ (1-y^2)^{-5/2}(6y^2) - 3(1-y^2)^{-3/2} - 3y\left(-\tfrac{3}{2}\right)(1-y^2)^{-5/2}(-2y) \qquad f^{iv}(0) = -3$$

因此 $(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在 $y=0$ 附近前四項之泰勒級數展開為

$$(1-y^2)^{1/2} = 1 - \frac{y^2}{2!} - \frac{3y^4}{4!} + \cdots \qquad (4)$$

(d) 利用 (1), (3) 之結果來求在 $x=0$ 附近 $f(x) = \cos x$ 之級數展開之前三項

令 $y = \sin x$，利用 (4) 式，我們得

$$(1-y^2)^{1/2} = \cos x = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2!} - \frac{3(\sin x)^4}{4!} + \cdots$$

再利用 (2) 式，上列結果可寫為

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3!} - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \qquad (5)$$

此結果與直接用泰勒級數在 $x=0$ 展開之結果

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ (6)之前三項完全相同.

(e) 求 $f(x) = \ln x$ 在 $x=1$ 附近之泰勒級數展開

注意 我們不能求此函數在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開，因為 $f(0) = -\infty$.

$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1 = 1!$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2 = 2!$

$f^{iv}(x) = \frac{-6}{x^4} \qquad f'''(1) = -6 = -3!$

$f^{v}(x) = \frac{24}{x^5} \qquad f^{v}(1) = 24 = 4!$

$f^{vi}(x) = -\frac{120}{x^6} \qquad f^{vi}(1) = -120 = -5!$

將上列之結果代入(1)式得

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \cdots \quad (7)$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 之間可利用泰勒級數展開為

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{n}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之計算可將上式代入得

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{n}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\Big]dx \quad (8)$$

ξ 為 x_0 至 x 間之一點

注意此處 $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\cdots f^{(n-1)}(x_0)$ 均為常數，故若取前此一級數之前 $n-1$ 項則因為它是 x 之多項式，利用 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ 結果很容易地可以得到 而此一積分與其實際值之差為

$I_n = \int_a^b \frac{f^{n}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\,dx$ 此處 ξ 為 x_0 之 x 間之一點. 若在 (x_0, a, b) 間 $|f^{n}(x)| < R_n$ 則其 $n-1$ 項積分值與實際值之差將小於

$\frac{R_n}{n!}\int_a^b (x-x_0)^n\,dx = \frac{R_n}{(n+1)!}\left[(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right]$，我們現在來討論幾個例題

(a) 求 $\int_0^{\pi/6} \sin^2 x\,dx$ 要求其準確至小數點三位

首先我們求 $\sin^2 x$ 之級數展開

$f(x) = \sin^2 x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = 2\sin x\cos x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = 2\sin x(-\sin x) + 2\cos x(\cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 2 \cdot 2\cos x(-\sin x)$ $\qquad$ $f'''(x) = 0$

$- 2 \cdot 2 \sin x(\cos x)$

$= -4\sin x\cos x$

$f^{iv}(x) = -4(\cos^2 x - \sin^2 x)$ $\qquad$ $f^{iv}(x) = -4$

$f^{v}(x) = +8\sin x\cos x = 4\sin 2x$

$x_0 = 0,\quad a = 0,\quad b = \frac{\pi}{6}$. 很顯然地 $|R_5| < 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

所以取四項之誤差必小於 $\frac{2\sqrt{3}}{6!}\left[\frac{\pi}{6}\right]^6 \ll 10^{-3}$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^2 x\, dx \approx \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{2}{2!}x^2 + \frac{-4}{4!}x^4\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}x^3\left[1 - \frac{1}{15}x^2\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(1 - \frac{1}{15}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right) =$$

(b) 求 $\int_1^2 \ln x\, dx$

由(7)式 $\int_1^2 \ln x\, dx \approx \int_1^2 \left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3\right] dx$

令 $y = x-1$ $\qquad$ $dx = dy$

$x=1 \Rightarrow y=0$ $\qquad$ $x=2 \Rightarrow y=1$

因此 $\int_1^2 \ln x\, dx \approx \int_0^1 \left[y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right] dy$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4}$ 故在 $x=1$ 至 $x=2$ 之間 $|f^{iv}(x)| < 6$。

因此 $|R_4| < 6$ 所以上面取三項所得之結果與實驗值之誤差必小於

$$\frac{6}{5!}\cdot 1 = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

(c) 我們可利用 $\cos x$ 及 $\sin x$ 之泰勒級數展開證明

$$\int \cos x\, dx = \int \sin x + C$$

分類：	
編號：	7
總號：	

$$\int \cos x\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots\right) dx$$

$$= x + c_1 - \frac{1}{3!}x^3 + c_3 + \frac{1}{5!}x^5 + c_5 - \frac{1}{7!}x^7 + c_7 + \cdots \quad c_1, c_3, c_5, c_7 \text{ 為常數}$$

$$= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) + (c_1 + c_3 + \cdots) = \sin x + C$$

5. 習題

(1) 求 e^x 在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開 [B]

(2) 若 $z = x + iy$ 此處 $i = \sqrt{-1}$，e^z 之定義為

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad \text{(此式是由(1)之結果延伸而來)}$$

將 $z = iy$ 代入上式，試證

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \qquad [C]$$

此式被稱為 De Moivre's 定理 在討論波動時極為有用

(3) 求 $\sqrt{1-x}$ 及 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開之前三項 [E]

(4) 求 $\sqrt[3]{1+x}$ 及 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ 在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開之前三項 [H]

(5) 求 $(1+x^2)^{-1/2}$ 在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開之前三項. [I]

(6) 利用泰勒級數展開方法證明 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ [D]

(7) 求 $\tan x$ 在 $x=0$ 附近之泰勒級數展開 [J]

(8) 利用泰勒級數展開之方法求下列函數之積分值要求準確至小數第三位

(a) $\int_0^1 \sin x^3\, dx$ [F]

(b) $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$ [A]

(c) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ [G]

(b), (c) 兩積分均有極重要的用途

6. 答案

[A] $\frac{443}{960}$, [B] $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

[C] $e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right)}_{\cos y} + i\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right)}_{\sin y}$$

$$= \cos y + i \sin y$$

[D] $\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 附近之泰勒級數展開為

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + C'$$

$$= x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + C$$

$C' = C-1$

[E] $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 -$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots$$

[F] $\frac{1}{4}$ [G] $\frac{691}{720}$ [H] $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots$

$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \cdots$

[I] $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \cdots$, $x^2 < 1$

[J] $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

7. 其他問題

(1)收斂半徑的決定是一複雜的問題，我們在此章將利用下面舉一個簡單的例子來說明這個問題

首先我們將 $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ 在 $x=0$ 附近利用泰勒級數展開

結果是

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2!}\frac{2!}{4^2}x^2 + \frac{1}{4!}\frac{4!}{4^3}x^4 - \frac{1}{6!}\frac{6!}{4^4}x^6 + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4^2}x^4 - \frac{1}{4^3}x^6 + \cdots\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right]$$

分類：	
編號：	9
總號：	

很顯然地此一級數在 $|x|<2$ 時收斂，我們可以問為何此函數在 $|x|<2$ 內收斂呢？ $f(\pm 2)=\frac{1}{8}$ 並無特殊之處，要了解 $x=\pm 2$ 特殊之處，我們必須將 $f(x)$ 推廣到複數函數 $f(z)=(z^2+4)^{-1}$

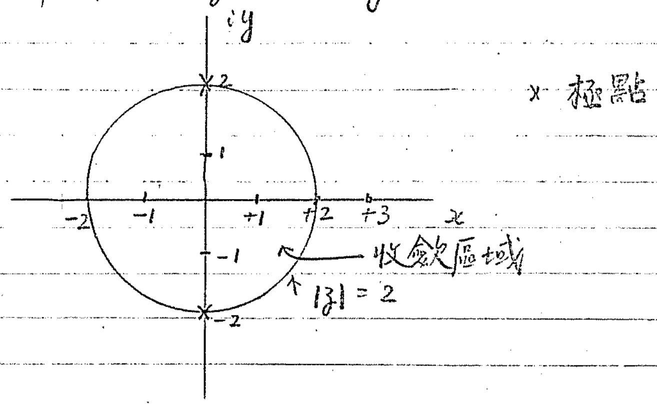
此處 $z=x+iy$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)}$$

此函數在 $z=\pm 2i$ 處變成無窮大；我們稱之為極點，在這些點此函數及其微分均無意義，因此不能用泰勒級數來近似此一函數

於是泰勒級數在複數平面上之收斂半徑為 $|z|=(x^2+y^2)^{1/2}<2$

因為此圓與實數軸於 $x=\pm 2$ 點相交，所以我們不應該利用泰勒級數在這兩點來近似此一函數



(注意 我們並沒有解釋在此問題中為何在複數平面中其收斂範圍是一圓盤，此一問題將容後討論

(2) 問題

(a) 求 $(1+x^2)^{-1/2}$ 在 $x=0$ 附近展開之收斂區域

(b) 求 $f(x)=\frac{1}{(x^2-6x+25)}$ 在 $x=0$ 附近展開之收斂區域

(c) 求 $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+25}$ 在 $x=3$ 附近展開之收斂區域

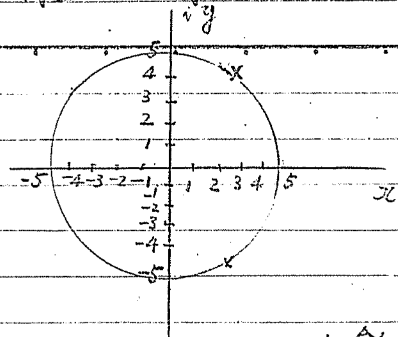
8. 答案

(a) 顯然地，其收斂區域為 $x^2<1$

(b) $f(x)=\frac{1}{x^2-6x+25}$ 推廣到複數函數 $f(z)=\frac{1}{z^2-6z+25}$

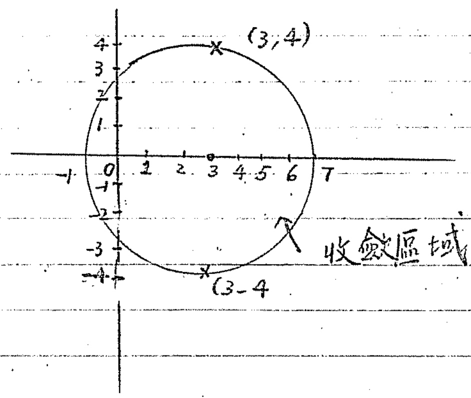
分類：
編號：10
總號：

此一函數在複數平面上有位於 $3\pm4i$ 兩個極點 對 $x=0$ 點展開之級數的收斂範圍在複數平面上是以 $(0,0)$ 為圓心 以 $(0,0)$ 与極點 $(3,\pm4)$ 间之距離 $r=5$ 為半径之圓碟 此圓与实数軸交於 $x=\pm5$ 因此，$f(x)$ 之收斂範圍為



$-5<x<5$

(c) 對 $x=3$ 點展開之級数的收斂範圍在複數平面上是以 $(3,0)$ 為圓心，以 $(3,0)$ 与極点 $(3,\pm4)$ 间之距離 $r=4$ 為半径之圓碟 此圓与实数軸交於 $x=7$ 及 $x=-1$ 因此 $f(x)$ 之收斂範圍是 $-1<x<7$

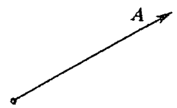


附录B 矢　　量

1. 矢量及其解析表示

物理学中有各种物理量，像质量、密度、能量、温度、压强等，在选定单位后仅需用一个数字来表示其大小，这类物理量叫做**标量**(scalar)；而像位移、速度、加速度、动量、力等，除数量的大小外还具有一定的方向，这类物理量叫做**矢量**(vector)。严格地说，作为一个矢量，还必须遵从一定的合成法则与随坐标变换的法则。这将在下文和本课适当的地方论及。

通常手写时用字母上加箭头(如$\vec{A}$)来表示一个矢量，印刷中则常用黑体字(如$\boldsymbol{A}$)。在作图时，用一个加箭头的线段来代表矢量，线段的长度正比于矢量的大小，箭头的方向表示矢量的方向(见图B－1)。

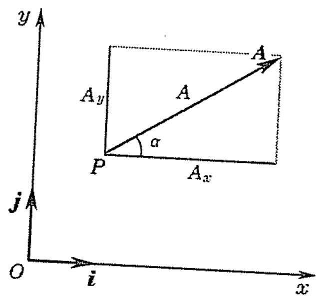


图B－1

用直角坐标系来描述空间和表示其中的矢量，是最基本的方法。n维的直角坐标系有n个相互垂直的坐标轴。我们先从二维空间说起。

如图B－2所示，在平面上取二维直角坐标系xOy，在平面某点P上有矢量$\boldsymbol{A}$，其大小为A，与x轴的夹角为α，则它在x、y轴上的投影分别为$A_x=A\cos\alpha$，$A_y=A\sin\alpha$，A_x和A_y分别称为矢量$\boldsymbol{A}$的**x分量**和**y分量**。应注意，一个矢量的分量是代数量，即其值是可正可负的。分别沿坐标轴Ox和Oy取**单位矢量**(即长度为1的矢量)$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$(见图B－2)，则有

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}, \tag{B.1}$$



图B－2

这里$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$称为坐标系的**基矢**。当坐标系及其基矢选定后，数列(A_x, A_y)可以把矢量$\boldsymbol{A}$的全部特征确定下来，所以我们也可以说矢量是个按一定顺序排列的数列，如数列(2, 1)代表$A_x=2$，$A_y=1$的矢量，数列(0, －5)代表$A_x=0$，$A_y=-5$的矢量，等等。矢量大小的平方等于它的分量的平方和：

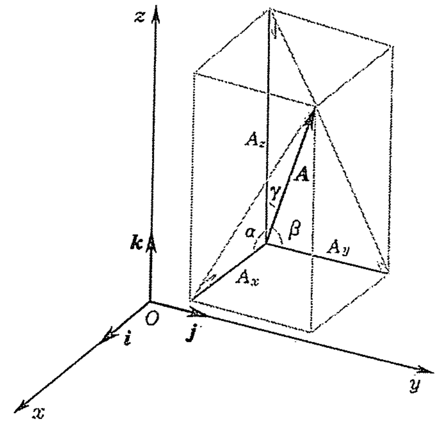
$$A^2=A_x^{\,2}+A_y^{\,2}. \tag{B.2}$$

图B－3所示为三维空间里的直角坐标系，这里有三个相互垂直的坐标轴Ox、Oy和Oz，在空间某点P上的矢量$\boldsymbol{A}$大小为A，方向与Ox、Oy、Oz轴的夹角分别为α、β、γ，则它在Ox、Oy、Oz轴上的投影，即x、y、z三个分量，分别为$A_x=A\cos\alpha$，$A_y=A\cos\beta$，$A_z=A\cos\gamma$，这里$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为这矢量的**方向余弦**。因方向余弦满足下列恒等式：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\equiv 1, \tag{B.3}$$

三个数中只有两个是独立的，它们把矢量的方向惟一地确定下来。

通常用$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$来代表三维直角坐标系的基矢。在三维的情况下，正交基矢有左手和右手两种系统。设想基矢$\boldsymbol{i}$沿小于180°的角度转向基矢$\boldsymbol{j}$. 如图B－4a所示将右手的四指弯曲，代表上述旋转方向，则伸直的姆指指向基矢$\boldsymbol{k}$. 如此规定的正交基矢系统称为右手系统。若用左手代替上述操作过程所规定的正交基矢系统(见图B－4b)，则是左手系统。我们按照国际惯例，一律采用右手系统。



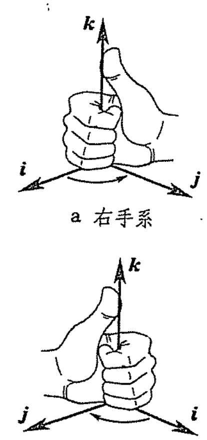
图B－3

有了正交基矢，矢量可以写成解析形式：

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}, \tag{B.4}$$

三维的矢量要用长度为3的数列(A_x, A_y, A_z)来表示，如(1, 3 ,0)、(－2, 0, －1)等。与二维的情况类似，我们有

$$A^2=A_x^{\,2}+A_y^{\,2}+A_z^{\,2}. \tag{B.5}$$



a 右手系

b 左手系

图B－4

2. 矢量的加减法

从上面我们看到，一个n维的矢量可看成是一个长度为n的有序数列$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$。从这种意义上说，标量是个一维的矢量。把标量的加减运算推广到矢量，我们有

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n)\pm(B_1, B_2, \cdots, B_n)=(A_1\pm B_1, A_2\pm B_2, \cdots, A_n\pm B_n), \tag{B.6}$$

从矢量的叠加图B－5不难看出，上述运算(解析运算)与通常矢量合成的平行四边形法则(几何运算)是一致的(请读者自行证明)。

用几何法运算矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的叠加，可利用如图B－6a所示的平行四边形，也可利用与之等价的三角形(见图B－6b)。这后一种图示，对于两个以

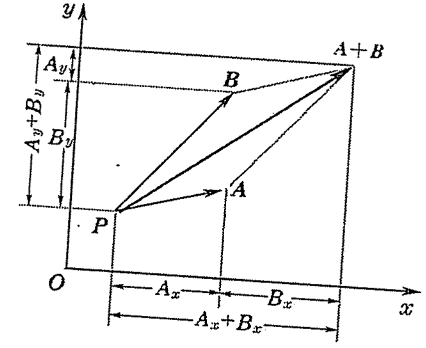


图 B－5

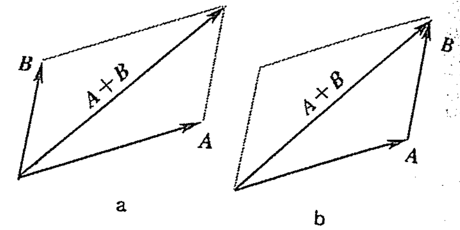


图 B－6

上矢量的的合成特别方便，因为我们只需把它们首尾衔接起来就行了（见图 B－7）。在一个矢量前面加个负号，表示一个与它大小相等、方向相反的矢量（见图 B－8a）。矢量之差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可理解为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{B}$ 的合成 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$（见图 B－8b），它也可 利用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的另一种方式组合成的三角形来表示（见图 B－8c）。

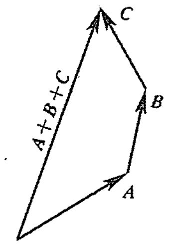


图 B－7

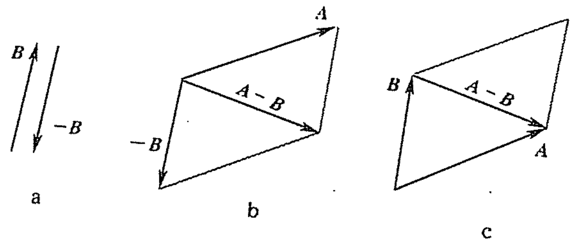


图 B－8

从矢量加减的解析表示(B. 6) 式可立即看出，它们是符合通常的交换律和组合律的：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}, \quad \text{（交换律）} \tag{B. 7}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}, \quad \text{（组合律）} \tag{B. 8}$$

用几何运算法来验证上述法则，也不算太困难，特别是利用三角形来表示的话。

并不是所有带有方向的物理量都服从上述叠加法则的（如大角度的角位移就是例外，见第四章），不符合这法则的物理量不是矢量。

3. 矢量的标积

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个任意矢量，它们的标积（常用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示，故又称点乘）的解析定义为如下标量：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z. \tag{B. 9}$$

由此定义不难看出，点乘是服从交换律和分配律的：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}, \quad \text{（交换律）} \tag{B. 10}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}, \quad \text{（分配律）} \tag{B. 11}$$

下面看点乘的几何意义。把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的起点 O 叠在一起，二者决定一个平面，取此平面为直角坐标系的 xy 面，从而 $A_z=B_z=0$. 令 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 Ox 轴的夹角分别为 α、β（见图 B－9），则 $A_x=A\cos\alpha$, $A_y=A\sin\alpha$, $B_x=B\cos\beta$, $B_y=B\sin\beta$, 标积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=A_x B_x+A_y B_y\\&=AB(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=AB\cos(\beta-\alpha),\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta, \tag{B. 12}$$

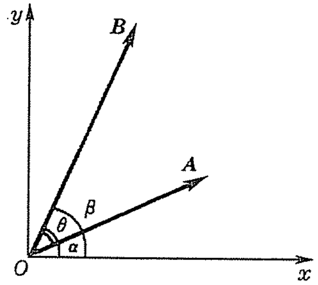


图 B－9

式中 $\theta=\beta-\alpha$ 为两矢量之间的夹角。(B. 12) 式可看作是标积的几何定义。从这个定义可立即看出：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 平行时，$\theta=0$，标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 反平行时，$\theta=\pi$，标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-AB$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直时，$\theta=\pi/2$，标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$. 一般说来，$\theta$ 为锐角时，标积取正值；θ 为钝角时，标积取负值。一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与自身的标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$.

在物理学中标积的典型例子是功（见第三章 1.5 节）。

4. 矢量的矢积

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个任意矢量，它们的矢积（常用 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示，故又称叉乘）的解析定义为如下矢量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_y B_z-A_z B_y)\boldsymbol{i}+(A_z B_x-A_x B_z)\boldsymbol{j}+(A_x B_y-A_y B_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{B. 13}$$

由此定义不难看出，点乘是服从反交换律和分配律的：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}, \quad \text{（反交换律）} \tag{B. 14}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}, \quad \text{（分配律）} \tag{B. 15}$$

下面看叉乘的几何意义。同前，把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的起点 O 叠在一起，二者决定一个平面，取此平面为直角坐标系的 xy 面，从而 $A_z=B_z=0$。令 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 Ox 轴的夹角分别为 α、β，则 $A_x=A\cos\alpha$, $A_y=A\sin\alpha$, $B_x=B\cos\beta$, $B_y=B\sin\beta$, 矢积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=AB(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)\boldsymbol{k}\\&=AB\sin(\beta-\alpha)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即矢积

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{k}, \tag{B. 16}$$

式中 $\theta=\beta-\alpha$ 为两矢量之间的夹角。当 $\beta>\alpha$ 时，$\theta>0$，$\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的正方向；当 $\beta<\alpha$ 时，$\theta<0$，$\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的负方向。由于我们采用的是右手坐标系，$\boldsymbol{C}$ 的指向可用如图 B－10a 所示的右手定则来判断：设想矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿小于180°的角度转向矢量 $\boldsymbol{B}$. 将右手的四指弯曲，代表上述旋转方向，则伸直的姆指指向它们的矢积 $\boldsymbol{C}$.

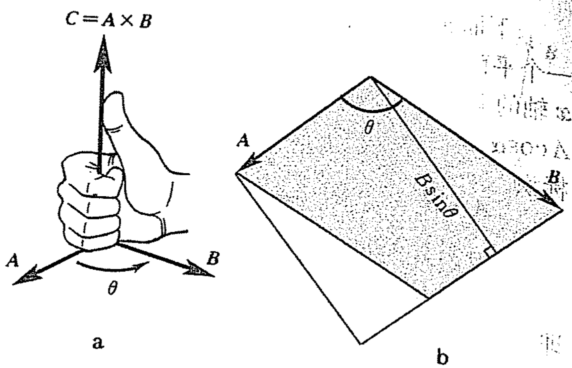


图 B－10

(B.16) 式可看作是矢积的几何意义：矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的数值 $C=AB\sin\theta$，正好是由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为边组成的平行四边形的面积(见图 B－10b)；$\boldsymbol{C}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面垂直，其指向由上述右手定则来规定。从这个定义可立即看出：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 平行或反平行时，$\theta=0$ 或 π，矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直时，$\theta=\pi/2$，矢积的数值 $C=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB$ 最大。一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与自身的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$.

在物理学中矢积的典型例子有角动量、力矩等(见第四章 §1)。

5. 矢量的三重积

物理学中经常遇到矢量的三重积。最常见的三重积有以下两个。

(1) 三重标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

这三重积是个标量。不难验证，此三重积的解析表达式为

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}. \tag{B.17}$$

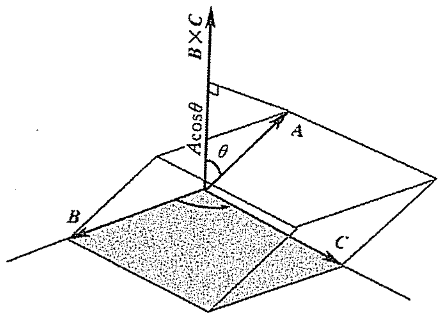


图 B－11

从几何上看，因 $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$ 是以 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为边组成平行四边形的面积，矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向沿其法线，故而再与 $\boldsymbol{A}$ 点乘，相当于再乘上 $\boldsymbol{A}$ 在法线上的投影。亦即，这三重积的绝对值等于以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量为棱组成的平行六面体的体积(见图 B－11)，其正负号与三矢量的循环次序有关。由于计算平行六面体的体积与取哪一面为底无关，点乘又是可交换的，所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量的

轮换，以及 · 和 × 的位置对调，都不影响此三重积的计算结果。惟一要注意的是三矢量的循环次序不能变，否则差一个负号。概括起来写成公式，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\\ &= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}\\ &= -\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\\ &= -(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}.\end{aligned} \tag{B.18}$$

从解析表达式(B.17)来看(B.18)式的成立，就更显然了。

最后提请注意：在 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三个矢量中有任意两个平行或反平行时，三重标积为0.

(2) 三重矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

这三重积是个矢量。矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成的平面 Π 垂直，而 $\boldsymbol{A}$ 与它的矢积又回到 Π 平面内。故矢量 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面。(见图 B－12)，从而前者是后面二者的线性组合：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=a_1\boldsymbol{B}+a_2\boldsymbol{C}$. 用矢量的解析表达式可以直接验证，$a_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，$a_2=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，亦即存在下列恒等式：

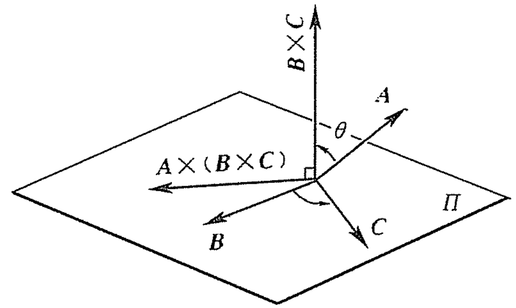


图 B－12

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\equiv(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}. \tag{B.19}$$

这是有关这三重积最重要的恒等式。

6. 极矢量和轴矢量

左手在镜子中的像是右手，右手在镜子中的像是左手。我们说，左右手具有镜像对称。一般说来，所谓对称性，就是在某种操作下的不变性。与镜像对称相联系的是空间反射操作。在这种操作下，沿镜面法线方向的坐标 $z\to-z$，其它方向不变，于是左手坐标系变成了右手坐标系(见图 B－13)。

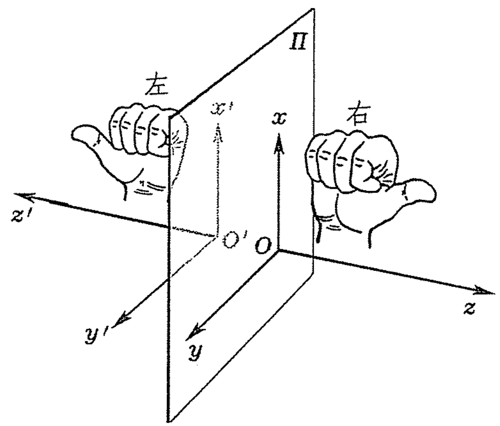


图 B－13

物理学中有各种矢量，它

们在空间反射操作下怎样变换？对于位矢 $\boldsymbol{r}$ 来说，这是清楚的：与镜面垂直的分量反向，平行分量不变。与 $\boldsymbol{r}$ 相联系的速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$、乃至力 $\boldsymbol{f}$ 等矢量都应有相同的变换规律。但存在另一类矢量，它们在空间反射操作下具有不同的变换规律。在第二章 4.4 节里按右手螺旋法则把角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 定义成矢量（见图 2 － 46），这定义的前提是采用右手坐标系。如图 B － 14 所示，在空间反射操作下，$\boldsymbol{\omega}$ 与镜面垂直的分量不变，平行的分量却反向。和 $\boldsymbol{\omega}$ 相似，角速度、角加速度、角动量、力矩等矢量，都具有这样的变换规律通常把在空间反射变换下服从前一类变换规律的矢量叫做极矢量，后一类的叫做轴矢量。应指出，两个极矢量叉乘，得到的是轴矢量。实际上许多轴矢量都能写成两个极矢量叉乘的形式。例如一个质点的角动量 $\boldsymbol{J} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$，力矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$，等等。

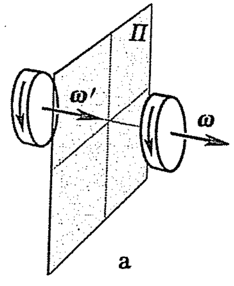


图 B － 14

习　题

B － 1. 有三个矢量 $\boldsymbol{A} = (1, 0, 2)$、$\boldsymbol{B} = (1, 1, 1)$、$\boldsymbol{C} = (2, 2, -1)$，试计算：

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，　(2) $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，　(3) $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$，

(4) $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$，　(5) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，　(6) $\boldsymbol{B}\cdot(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$，

(7) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，　(8) $\boldsymbol{A}\times(2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，　(9) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，

(10) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$，　(11) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$，　(12) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

B － 2. 证明下列矢量恒等式：

(1) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$，

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$.

B － 3. 有三个矢量 $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$、$\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$、$\boldsymbol{c} = (1, 0, 1)$，试计算：

(1) 三个矢量的大小和方向余弦；

(2) 两两之间的夹角；

(3) 以三矢量为棱组成平行六面体的体积和各表面的面积。

B － 4. 试证明：

(1) 极矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是轴矢量；

(2) 极矢量 $\boldsymbol{A}$ 和轴矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是极矢量。

附录 C　复数的运算

1. 复数的表示法

复数 $\widetilde{A}$ 是一个二维数，它对应于复平面中的一个坐标为 (x, y) 的点，或对应于复平面中的一个长度为 A、仰角为 φ 的矢量（见图 C － 1）。与此相应地复数有下列两种表示法：

$$\begin{cases} \widetilde{A} = x + \mathrm{i}y, & \text{(C.1)} \\ \widetilde{A} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & \text{(C.2)} \end{cases}$$

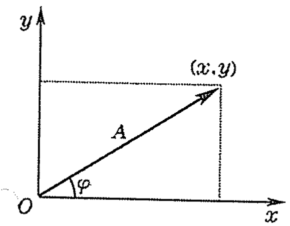


图 C － 1

式中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$（欧拉公式，详见 453 页）。(C.1) 式是复数的直角坐标表示，对应点的横坐标 x 为复数的实部，记作 $x = \mathrm{Re}\widetilde{A}$；纵坐标 y 为复数的虚部，记作 $y = \mathrm{Im}\,\widetilde{A}$.（C.2）式是复数的极坐标表示，对应矢量的长度 A 为复数的模或绝对值，记作 $A = |\widetilde{A}|$；仰角 φ 为复数的辐角，记作 $\varphi = \arg\widetilde{A}$. 两种表示法之间有如下换算关系：[1]

$$\begin{cases} A = \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{(C.3)} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}. & \text{(C.4)} \end{cases}$$

或反过来，有

$$\begin{cases} x = A\cos\varphi, & \text{(C.5)} \\ y = A\sin\varphi. & \text{(C.6)} \end{cases}$$

单位虚数 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 有如下性质：

$$\mathrm{i}^2 = -1,\qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i},\qquad \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2},\qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}.$$

复数 $\widetilde{A} = x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的共轭 $\widetilde{A}^*$ 定义为

$$\widetilde{A}^* = x - \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{(C.7)}$$

所以

$$\widetilde{A}\widetilde{A}^* = A^2 = x^2 + y^2. \qquad \text{(C.8)}$$

即一对共轭复数的乘积等于模的平方。

[1] 通常把反三角函数的符号，如 $\arctan\varphi$，理解为 φ 在主值区间 $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ 取值，这里应该认为 φ 在从 $-\pi$ 到 π 的所有象限中取值。至于它在哪个象限，要根据 x 和 y 的正负来确定。

两个复数 $\widetilde{A}_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$、$\widetilde{A}_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ 相等的充要条件为：

$$\begin{cases} \text{实部相等：} x_1 = x_2, \\ \text{虚部相等：} y_1 = y_2. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \text{模相等：} A_1 = A_2, \\ \text{辐角相等：} \varphi_1 = \varphi_2 . \end{cases}$$

2. 复数的四则运算

（1）加减法

$$\widetilde{A}_1 \pm \widetilde{A}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{C.9}$$

即实部、虚部分别加减。

（2）乘法

$$\widetilde{A}_1 \cdot \widetilde{A}_2 = (A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}) \cdot (A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}) = A_1 A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{C.10}$$

即模相乘，辐角相加。或者

$$\widetilde{A}_1 \cdot \widetilde{A}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{C.11}$$

（3）除法

$$\frac{\widetilde{A}_1}{\widetilde{A}_2} = \frac{A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}, \tag{C.12}$$

即模相除，辐角相减。或者

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} &= \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + \mathrm{i}\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}. \end{aligned} \tag{C.13}$$

倒数运算可以看作是除法的特例：

$$\frac{1}{\widetilde{A}} = \frac{1}{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \tag{C.14}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widetilde{A}} &= \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{C.15}$$

3. 欧拉公式

现在介绍一下欧拉公式是如何得来的。从附录 A 的表 A－3 中可以查到 e^x、$\cos x$、$\sin x$ 的幂级数展开式：

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots, \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots. \end{cases}$$

在 e^x 的展开式中把 x 换成 $\pm \mathrm{i}x$，注意到 $(\pm \mathrm{i})^2 = -1$，$(\pm \mathrm{i})^3 = \mp \mathrm{i}$，$(\pm \mathrm{i})^4 = 1$，…，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x} &= 1 \pm \mathrm{i}\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \mp \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \pm \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3!}\cdots\right), \end{aligned}$$

即

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x} = \cos x \pm \mathrm{i}\sin x, \tag{C.16}$$

这就是欧拉公式。

下面给出几个常用的三角函数与复指数函数之间的变换公式。从欧拉公式可以反解出：

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}), \tag{C.17}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}), \tag{C.18}$$

由此立即得到

$$\tan\varphi = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}. \tag{C.19}$$

4. 简谐振动的复数表示

简谐振动

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

也可用一个复数

$$\tilde{s}(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_0)}$$

的实部或虚部来表示。上式右端又可写为 $(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \widetilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，其中

$$\widetilde{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$$

称为复振幅，它集振幅 A 和初相位 φ_0 于一身。于是，简谐振动的复数表示可写为

$$\tilde{s}(t) = \widetilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{C.20}$$

如果 $\tilde{s}(t)$ 代表位移的话，则速度和加速度为

$$\tilde{v}=\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\omega\tilde{s},$$

$$\tilde{a}=\frac{\mathrm{d}^2\tilde{s}}{\mathrm{d}t^2}=(\mathrm{i}\omega)^2\tilde{s}=-\omega^2\tilde{s},$$

亦即,对 t 求导数相当于乘上一个因子 $\mathrm{i}\omega$,运算起来十分方便。

我们有时候需要计算两个同频简谐量乘积在一个周期里的平均值,如平均功率,这也可以用复数来运算。设两个同频简谐量为

$$\begin{cases} a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1), \\ a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\Phi_2), \end{cases}$$

它们的乘积在一个周期内的平均值等于

$$\overline{a_1a_2}=\frac{1}{T}\int_0^T a_1(t)a_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega A_1A_2}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\omega t+\Phi_1)\cos(\omega t+\Phi_2)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega A_1A_2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[\cos(\Phi_1-\Phi_2)+\cos(2\omega t+\Phi_1+\Phi_2)]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A_1A_2}{2}\cos(\Phi_1-\Phi_2).$$

如果用相应的复数

$$\begin{cases} \tilde{a}_1(t)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_1)} \\ \tilde{a}_2(t)=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_2)} \end{cases}$$

来计算的话,下列公式给出同样的结果:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{a}_1\tilde{a}_2^*)=\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\Phi_2)}]$$

$$=\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi_1-\Phi_2)}]=\frac{A_1A_2}{2}\cos(\Phi_1-\Phi_2).$$

所以今后我们将用下式来计算两简谐量乘积的平均值:

$$\overline{a_1a_2}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{a}_1\tilde{a}_2^*). \tag{C.21}$$

习　题

C－1. 计算下列复数的模和辐角。

(1) $(1+2\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$;

(2) $(3+\mathrm{i})-[1+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}]$;

(3) $(2+3\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})$;

(4) $(-2+7\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})$.

C－2. 计算下列复数的实部和虚部。

(1) $(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$;

(2) $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$;

(3) $\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;

(4) $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

C－3. 用复数求两个简谐量 $a(t)=A\cos(\omega t+\varphi_a)$ 和 $b(t)=B\cos(\omega t+\varphi_b)$ 乘积的平均值 $\overline{a(t)b(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T a(t)b(t)\,\mathrm{d}t\ (T=2\pi/\omega)$:

	A	φ_a	B	φ_b	平均值
(1)	2	π/3	1	2π/3	
(2)	6	π/4	2	0	
(3)	3	π/3	1	－2π/3	
(4)	0.2	4π/5	7	6π/5	

分類：	
編號：	1
總號：	

第二節 向量 I — 向量之加減，直角坐標之角坐標

1. 簡介

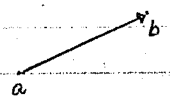
初級物理中所常見的(大部分的)物理量均為純量或向量* 物理定律之數學公式則包含着這些物理量之代數運算及微分，積分。因此，要了解這些定律及其結論，我們必需了解如何處理純量及向量之運算。我們對純量之代數運算都很熟悉了。在第一節中我們也曾討論及複習了純量之微分與積分。在這節與下節中我們將討論及複習向量之代數運算。

2. 基本觀念 (先用兩度空間來講，極易推廣至一度及三度空間)

純量 一個物理量可由一個數目(大小)和及其所採之單位完全決定。它滿足普通代數運算之法則。例，質量，時間，溫度等。

向量 一個由大小及方向共同決定的物理量，它們並滿足位移之運算法則。

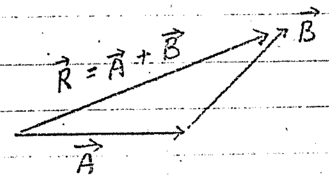
例，力，速度，加速度，力矩等



通常向量可用一矢表示，其長度代表向量之大小，其方向即為該向量之方向 (1)

向量和：向量 $\vec{A}$ 與向量 $\vec{B}$ 和之定義 (2)

將 $\vec{A}$ 以矢表示，將代表 $\vec{B}$ 之箭尾放在 $\vec{A}$ 矢之箭頭上，則由 $\vec{A}$ 之矢尾至 $\vec{B}$ 之箭頭所構成之矢即代表 $\vec{A}+\vec{B}$ 向量

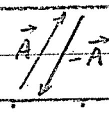


[向量與一純量之乘積(3) $r\vec{A}$ 是一向量其大小為 $\vec{A}$ 向量大小之 r 倍若 $r>0$ 其方向與 $\vec{A}$ 之方向相同，若 $r<0$ 則其方向與 $-\vec{A}$ 方向相同] 轉至 $-\vec{A}$ 向量定義之後

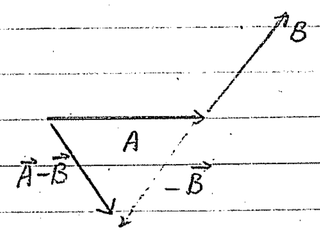
零向量 一長度為0之向量，通常以 $\vec{0}$ 表示

* 有一些物理量有更複雜性質如張量等

分類：	
編號：	2
總號：	

$-\vec{A}$ 向量 是與 $\vec{A}$ 向量之和為 $\vec{0}$ 之向量  (1)

向量之差[4] $\vec{A}-\vec{B} \equiv \vec{A}+(-\vec{B})$ (2)



向量和滿足對易及締合律[5]

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A} \qquad (3)$$

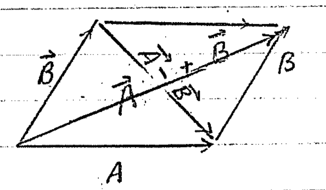
$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \qquad (4)$$

3. 討論，(1) 兩個向量若大小及方向相等則稱為相等，因此我們在下列討論中總可以把矢尾置於坐標系統之原點

(2) 此一定義適合於一度、二度及三度空間，由定義可見即是在三度空間中 $\vec{A}$, $\vec{B}$, 及 $\vec{A}+\vec{B}$ 三向量在同一平面上，由簡單之平面幾何，我們得知 $|\vec{A}+\vec{B}| = (|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta_{AB})^{1/2}$ 此處 $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{A}+\vec{B}|$ 為向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$, 及 之大小，θ_{AB} 是 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 向量間之夾角

(3) 取 $\vec{A}=\vec{B}$，則利用向量相加法則 $\vec{A}+\vec{A}$ 為一向量其大小為 $\vec{A}$ 之兩倍而方向與 $\vec{A}$ 相同，$\vec{A}+\vec{A}$ 當然應該是 $2\vec{A}$，因此我們自然的有 $r\vec{A}$ 之定義，同時由此定義，我們可以將任一向量 $\vec{A}$ 寫成 $A\hat{u}_A$ 此處 $\hat{u}_A$ 為一向量其方向與 $\vec{A}$ 相同，而其大小為一單位長度

(4) 另一畫法為



$\vec{B}+(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}$

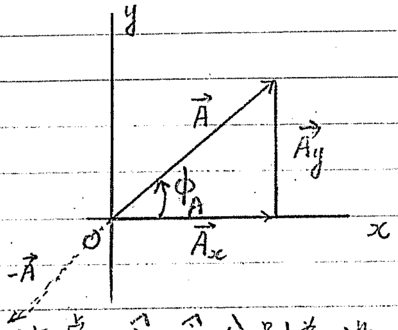
$\vec{A}+\vec{B}$ 及 $\vec{A}-\vec{B}$ 為由 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 所組成之平行四邊形之不同的對角線

分類：
編號：3
總號：

(5) 對易及締合律之證明，可參看任意向量分析之課本

4. 應用

(一) 二度空間之向量，直角坐標



由向量相加之定義，我們可以看出

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} \qquad (5)$$

由討論(2)中 我們得知 $\vec{A_x} = A_x\hat{i}$
$\vec{A_y} = A_y\hat{j}$

此處 $\hat{i}, \hat{j}$ 分別為沿 x 及 y 軸之單位向量

因此，在二度空間中之任意向量可寫成 $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ (6)

所以一個二度空間之向量 $\vec{A}$ 可由一對有順序之數字 (A_x, A_y) 完全決定

注意：(一) A_x 可正也可負　A_x 為負時則 $\vec{A_x}$ 是沿負 x 軸，A_y 同此

(二) $(A_x, A_y) \neq (A_y, A_x)$

角坐標：二度空間之向量 $\vec{A}$ 也可用其大小 $|\vec{A}|$ 及其與 x 軸之交角 θ_A 來決定 (A, θ_A)

注意 (一) $|\vec{A}| \geq 0$　(二) $0 \leq \theta \leq 2\pi$，θ 之量度是由 x 軸反時針方向旋轉來決定

由簡單之平面幾何，我們可找去這兩組坐標間之關係如下

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \theta_A = \tan^{-1} A_y/A_x \;{**} \qquad (7)$$

$$A_x = |\vec{A}|\cos\phi_A, \qquad A_y = |\vec{A}|\sin\phi_A \qquad (8)$$

零向量之定義為其長度為 0，由 (7) 式中很顯然其直角坐標必為 (0,0)

若 $\vec{A}$ 之直角坐標為 (A_x, A_y)，$\vec{B}$ 之直角坐標為 (B_x, B_y)

則 $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$，$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$ (9)

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \qquad (10)$$

** 用此公式應小心，當 $A_y > 0$，$A_x < 0$ 時，θ_A 需取在第二項限，即 $180° \geq \theta \geq 90°$
而當 $A_y < 0$，$A_x > 0$ 時，θ_A 需取在第四項限，即

所以 $\vec{A}+\vec{B}$ 之直角坐標為 $(A_x+B_x,\ A_y+B_y)$

由此一結果及零向量之直角坐標為 $(0,0)$，我們可知 $-\vec{A}$ 之直角坐標為 $(-A_x,\ -A_y)$。由(7),(8)式中我們可得 $-\vec{A}$ 之極坐標應為 $(|\vec{A}|,\ \pi+\theta)$ (11)

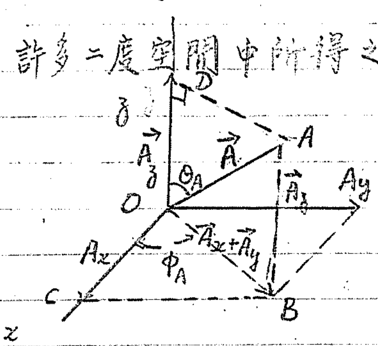
若 $\vec{V_1}=(V_{1x},\ V_{1y})$，$\vec{V_2}=(V_{2x},\ V_{2y})$，…… $\vec{V_i}=(V_{ix},\ V_{iy})$，… $\vec{V_n}=(V_{nx},\ V_{ny})$

利用上面之結果我們可得

$$\vec{V}=\sum_{i=1}^{n}\vec{V_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}V_{ix},\ \sum_{i=1}^{n}V_{iy}\right) \tag{12}$$

(二) 三度空間的向量，直角坐標及角坐標

許多二度空間中所得之結果可很容易地推廣到三度空間



自圖中可看出

$$\vec{A}=\vec{A_x}+\vec{A_y}+\vec{A_z}$$
$$=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \tag{13}$$

$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 分別為沿 x, y, z 軸之單位向量

因此一個三度空間之可由一組順序有關之數字 $(A_x,\ A_y,\ A_z)$ 完全決定

注意 (一) A_x 可正也可負，若 A_x 為負，則 $\vec{A_x}$ 与 $-x$ 軸平行。A_y, A_z 同此。

(二) 三個坐標的順序非常重要。

角坐標：三度空間之向量 $\vec{A}$ 可用其大小 $|\vec{A}|$，其与 z 軸之交角 θ_A 以及 $\vec{A}$ 相量在 xy 平面上之投影(即是 $\vec{A_x}+\vec{A_y}$)与 x 軸之交角 ϕ_A*** 所決定

由向量加法之定義可得

$$|\vec{A}|=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2} \tag{14}$$

$$|\vec{A_x}+\vec{A_y}|=(A_x^2+A_y^2)^{1/2} \tag{15}$$

由簡單的幾何可得

$$\phi_A=\tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad \theta_A=\tan^{-1}\frac{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}{A_z} \tag{16}$$

*** ϕ_A 是由 x 軸依反時針方向旋轉來量度

第三節 向量II－純量積，向量積

1. 簡介

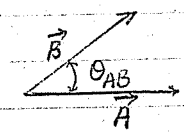
由兩個向量 $\vec{A}$ 及 $\vec{B}$ 我們可以得到其純量積 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 及向量積 $\vec{A}\times\vec{B}$.

因為很多物理量是其他物理量之純量積或向量積，所以在此節中我們將討論它們的定義及所具之性質

2. 基本觀念

(A) 純量積之定義

兩向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 之純點積(或向量點乘)為



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta_{AB}$$ [1] (1)

此處 $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ 分別為 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 向量之大小而 θ_{AB} 則為兩向量間之夾角[2]

注意 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 是一純量

由此定義，很明顯地 $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (對易律) (2)

同時我們可以證明 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$ (分配律)[3] (3)

(B) 向量積之定義

兩向量 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 之向量積為另一個向量 $\vec{C} \equiv \vec{A}\times\vec{B}$

向量 $\vec{C}$ 之大小為 $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta_{AB}$ [5] (4)

其方向是垂直於 $\vec{A}$, $\vec{B}$ 向量所組成之平面，若我們彎右手之四指伸姆指，若以彎曲之四指平行於$\vec{A}$至$\vec{B}$反時針旋轉之方向，則其姆指所指之方向即為 $\vec{A}\times\vec{B}$ 之指向*

由此定義，很明顯地，$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ (對易律不成立) (5)

同時我們可以證明 $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$ (分配律則仍成立)[4] (6)

*需一圖並有右手圖形

3. 討論

(1) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 是 $\vec{A}$ 向量之長度乘以 $\vec{B}$ 向量在 $\vec{A}$ 方向之投影. 假如我們同時將 $\vec{A},\vec{B}$ 兩向量轉動一個角度, 由於 $|\vec{A}|, |\vec{B}|$ 及 θ_{AB} 均不改變 所以 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 也不改變, 也即是 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 在轉動下不變

(2) 但是 $\vec{A},\vec{B}$ 之間之夾角到底應該是 θ_{AB} 或 $2\pi-\theta_{AB}$ 呢? 我們的規則是要求 $\theta_{AB}\le\pi$ 這樣 $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta_{AB}\ge 0$, 所以 $0\le\theta_{AB}\le\pi$ (7)

(3) 我們將證明 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

(A) 首先我們將證明當 $\vec{A}\parallel\vec{B}$, $\vec{A}\parallel\vec{C}$ 時, 上式成立 (這是明顯的正確)

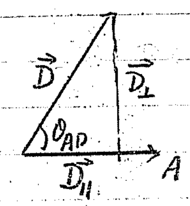
(B) 先取一向量 $\vec{A}$, 則任一向量 $\vec{D}$ 均可寫成

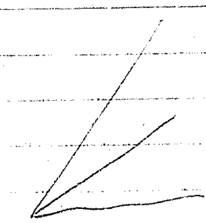
$$\vec{D}=\vec{D}_{\parallel}+\vec{D}_{\perp} \tag{8}$$

此處 $\vec{D}_{\parallel}$ 為一平行於 $\vec{A}$ 之向量, $\vec{D}_{\perp}$ 是垂直於 $\vec{A}$ 平面上之一向量

而且 $\vec{A}\cdot\vec{D}=\vec{A}\cdot\vec{D}_{\parallel}$

證: $\vec{A}, \vec{D}$ 決定一平面





$$\vec{A}\cdot\vec{D}=|\vec{A}||\vec{D}|\cos\theta_{AD}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{D}_{\parallel}=|\vec{A}||\vec{D}_{\parallel}|\underbrace{\cos\theta_{AD_{\parallel}}}_{1}=|\vec{A}||\vec{D}_{\parallel}|$$

$$\vec{D}_{\parallel}=|\vec{D}|\cos\theta_{AD}$$

因此 $\vec{A}\cdot\vec{D}=\vec{A}\cdot\vec{D}_{\parallel}$ (9)

(C) 現在我們將證任意 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 三向量, $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

首先, 我們可將 $\vec{B},\vec{C}$ 寫成

$$\vec{B}=\vec{B}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp},\qquad \vec{C}=\vec{C}_{\parallel}+\vec{C}_{\perp} \tag{10}$$

此處 $\vec{B}_{\parallel}$, $\vec{C}_{\parallel}$ 為平行於 $\vec{A}$ 之向量, $\vec{B}_{\perp}$, $\vec{C}_{\perp}$ 為垂直於 $\vec{A}$ 平面上之向量.

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp}+\vec{C}_{\parallel}+\vec{C}_{\perp})$

$= \vec{A}\cdot(\vec{B}_{\parallel}+\vec{C}_{\parallel}+\vec{B}_{\perp}+\vec{C}_{\perp})$ (此處用向量和之對易律)

$= \vec{A}\cdot(\vec{D}_{\parallel}+\vec{D}_{\perp})$　　$\vec{D}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}+\vec{C}_{\parallel}$ 平行於 $\vec{A}$

$\vec{D}_{\perp} = \vec{B}_{\perp}+\vec{C}_{\perp}$ 為垂直於 $\vec{A}$ 平面上的向量 (11)

$= \vec{A}\cdot\vec{D}_{\parallel}$ (利用第9式)

$= \vec{A}\cdot(\vec{B}_{\parallel}+\vec{C}_{\parallel})$ (利用第11式)

$= \vec{A}\cdot\vec{B}_{\parallel}+\vec{A}\cdot\vec{C}_{\parallel}$ (利用結果(A))

$= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ (利用第9式) (12)

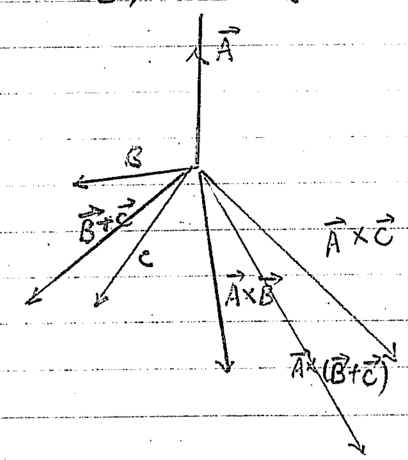
(4) 我們將證明 $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$. 證明之方法與(3)相似

我們在此處採用(3)中所用之符號

(A) 首先我們將證明當 $\vec{A}\perp\vec{B}$, $\vec{A}\perp\vec{C}$ 時，$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

證: $\vec{A}\perp\vec{B}$, $\vec{A}\perp\vec{C}$

$\vec{B}$, $\vec{C}$ 必同在垂直於 $\vec{A}$ 之平面上



$\vec{A}\times\vec{B}$ 是在 $\vec{B}$, $\vec{C}$ 平面上垂直於 $\vec{B}$ 之一向量

$\vec{A}\times\vec{B}$ 可由 $\vec{B}$ 向量在 $\vec{B}$, $\vec{C}$ 平面上轉 90° 並乘以 $|\vec{A}|$ 倍所獲得

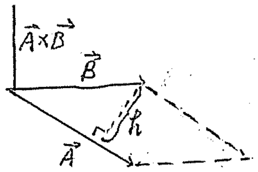
同理 $\vec{A}\times\vec{C}$ 可由 $\vec{C}$ 向量在 $\vec{B}$, $\vec{C}$ 平面上轉 並乘以 $|\vec{A}|$ 倍所獲得

所以 $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$, $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})$ 與 $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{B}+\vec{C}$ 之關係相似

顯然地 $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

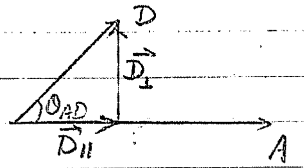
此處 $\vec{A}\perp\vec{B}$, $\vec{A}\perp\vec{C}$ (13)

由 $|\vec{A}\times\vec{B}| = Ah$ = 由 $\vec{A},\vec{B}$ 向量所構成之平行四邊形之面積 其方向是垂直於 $\vec{A},\vec{B}$ 所構成之平面 而其指向是由右手定則決定



分類：
編號： 4
總號：

(B) $\vec{A}\times\vec{D} = \vec{A}\times\vec{D}_{\perp}$ $\qquad \vec{D} = \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}$，$\vec{D}$ 是任一向量



證 $|\vec{A}\times\vec{D}| = |\vec{A}||\vec{D}|\sin\theta_{AD}$

$\longrightarrow \quad |\vec{A}\times\vec{D}_{\parallel}| = |\vec{A}|\,|\vec{D}_{\parallel}| \qquad |\vec{D}_{\parallel}| = |\vec{D}|\sin\theta_{AD}$

因此 $|\vec{A}\times\vec{D}| = |\vec{A}\times\vec{D}_{\parallel}|$

同時 $\vec{A}\times\vec{D}$ 及 $\vec{A}\times\vec{D}_{\parallel}$ 均垂直於由 $\vec{A}$ 及 $\vec{D}$ 所組成之平面，由上圖中，我們可以看出其指向亦同 因此 $\vec{A}\times\vec{D} = \vec{A}\times\vec{D}_{\perp}$ (14)

(C) 現在我們證明任意三個向量，$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

首先將 $\vec{B},\vec{C}$ 寫成

$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \quad , \quad \vec{C} = \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp}$ (15)

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times(\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp})$

$= \vec{A}\times(\vec{B}_{\parallel} + \vec{C}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\perp})$ (此處用向量和之對易律)

$= \vec{A}\times(\vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp})$ $\qquad \vec{D}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{C}_{\parallel}$ 平行於 $\vec{A}$

$\vec{D}_{\perp} = \vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\perp}$ 為垂直於 $\vec{A}$ 之向量 (16)

$= \vec{A}\times\vec{D}_{\perp}$ (利用第14式)

$= \vec{A}\times(\vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\perp})$ (利用第16式)

$= \vec{A}\times\vec{B}_{\perp} + \vec{A}\times\vec{C}_{\perp}$ (利用結果(A))

$= \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$ (利用第14式) (17)

(5) → 寫於此頁之上

4. 應用

(1) 由純量積之定義，若 $\vec{A}\perp\vec{B}$，則 $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$. 反之若 $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$，而且 $|\vec{A}|, |\vec{B}|$ 均

不為 0，則 $\vec{A} \perp \vec{B}$ (18)

(2) 由向量積之定義，若 $\vec{A} \parallel \vec{B}$ 則 $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$。反之若 $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$，而且 $|\vec{A}|, |\vec{B}|$ 均不為零則 $\vec{A}\parallel\vec{B}$ （注意 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是一向量 $\vec{0}$ 為零向量） (19)

(3) $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$ (20)

$\vec{A}\times\vec{A} = \vec{0}$ (21)

(4) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 間之純量積及向量積

利用 (1)，(3) 之結果，我們可得

$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0$ （因為它們互相垂直） (22)

$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ （因為它們均為單位向量） (23)

對一右手坐標系統，由向量積之定義

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$　$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$，$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$　$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$，$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$ (24)

由 (3) 可得

$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$ (25)

(5) 若 $\vec{A}$ 向量之直角坐標為 (A_x, A_y, A_z)

$\vec{B}$ 向量之直角坐標為 (B_x, B_y, B_z)

(a) 將 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 以 $\vec{A}, \vec{B}$ 之直角坐標表出

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + A_yB_x\,\hat{j}\cdot\hat{i} + A_zB_x\,\hat{k}\cdot\hat{i}$$

$$+ A_yB_x\,\hat{j}\cdot\hat{i} + A_y B_y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}\cdot\hat{k}$$

$+ A_z B_x \vec{k}\cdot\vec{i} + A_z B_y \vec{k}\cdot\vec{j} + A_z B_z \vec{k}\cdot\vec{k}$ （此處我們用到純量積滿足分配律）

$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ （利用第(22)及(23)式） (26)

(6) 將 $\vec{A}\times\vec{B}$ 以 $\vec{A},\vec{B}$ 之直角坐標表出

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\vec{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\vec{k})$$

$$= A_x B_x \hat{i}\times\hat{i} + A_x B_y \hat{i}\times\hat{j} + A_x B_z \hat{i}\times\vec{k}$$

$$+ A_y B_x \hat{j}\times\hat{i} + A_y B_y \hat{j}\times\hat{j} + A_y B_z \hat{j}\times\vec{k}$$

$$+ A_z B_x \vec{k}\times\hat{i} + A_z B_y \vec{k}\times\hat{j} + A_z B_z \vec{k}\times\vec{k}$$ 此處我們利用到分配律

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k} \quad (27)$$

這兩個結果非常重要，我們將它重寫一次

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (28)$$

我們將 $\vec{A}\times\vec{B}$ 以行列式寫出

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (29)$$

此式極易記憶是向量積常用之形式

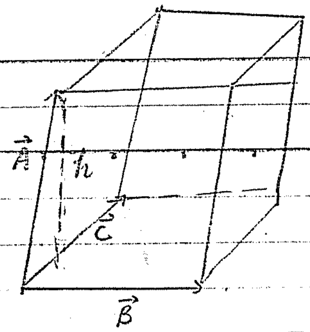
(6) 三重積

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 這是由 $\vec{A}$ 及 $\vec{B}\times\vec{C}$ 兩個向量之純量積 $\vec{B}\times\vec{C}$ 是由 $\vec{B}$ 及 $\vec{C}$ 兩個向量的向量積，因此 $\vec{B}\times\vec{C}$ 也是一向量 由定義

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = |\vec{A}|\,|\vec{B}\times\vec{C}|\cos\theta$$

此處 θ 是 $\vec{A}$ 及 $\vec{B}\times\vec{C}$ 兩向量間之夾角 因此，$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$= |\vec{B}\times\vec{C}|\cdot$ （$\vec{A}$ 在 $\vec{B}\times\vec{C}$ 方向之投影）



由左圖中我們可看出 $|\vec{B}\times\vec{C}|$ 是由 $\vec{B},\vec{C}$ 兩向量所構成之平行四邊形之面積

$\vec{B}\times\vec{C}$ 是垂直於 $\vec{B},\vec{C}$ 所形成之平面的向量，

而 $\vec{A}$ 在 $\vec{B}\times\vec{C}$ 方向是由 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 所構成之平行六面體以 $\vec{B},\vec{C}$ 所形成平行四邊形為底之高. 因此 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$ 是由 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 三向量所構成的平行六面體之体積

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 也可以 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 之直角坐標表出

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B\times C)_x + A_y(B\times C)_y + A_z(B\times C)_z$$

由(56)之結果得

$$(B\times C)_x = B_y C_z - B_z C_y$$

$$(B\times C)_y = B_z C_x - B_x C_z$$

$$(B\times C)_z = B_x C_y - B_y C_x \qquad (30)$$

代入上式我們得

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \qquad (31)$$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 也可以用行列式表示

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (32)$$

這個可利用直接展開之方法證明. 這是一個非常容易記憶之形式.

利用其幾何意義或行列式之特性，我們可以很容易的證明

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

注意：我們可將上式中之括號除去因為 $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ 沒有意義，因此當我們寫 $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ 時一定是 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$.

$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$
$\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$ $\Rightarrow$ $\vec{A}\times\vec{B}$ 垂直於 $\vec{A},\vec{B}$ 所構成之平面

(7) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

這是由 $\vec{A}$ 及 $(\vec{B}\times\vec{C})$ 兩個向量所構成之向量積 因此 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 本身亦為一向量. 它可以寫成

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B\times C)_x & (B\times C)_y & (B\times C)_z \end{vmatrix}$$

向量恒等式.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

證明. $[\vec{A}\times(B\times\vec{C})]_x = A_y(B\times C)_z - A_z(B\times C)_y$

$$= A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)$$

$$= B_x(A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_yB_y + A_zB_z) + A_xB_xC_x - A_xB_xC_x$$

$$= B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

$$= (A\cdot C)B_x - (A\cdot B)C_x = [(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}]_x$$

同法我們可證

$$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_y = [(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}]_y$$

$$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_z = [(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}]_z$$

因此證明此一向量恒等式

5 習題

(1) 若 $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, α, β, γ 分別為 $\vec{a}$ 與 x, y, z 軸之交角 試證

(a) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|a|}$, [E]

(b) $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|a|}$ [J]

分類：	
編號：	9
總號：	

(c) $\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$ [D]

(d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ [G]

α, β, γ 稱為 $\vec{a}$ 向量之指向餘弦 ($0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$)

(2) 若 $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

求使 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 互相垂直時之 a 值 [N]

(3) 若 $\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + \hat{j} - 7\hat{k}$

$\vec{C} = 4\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}$

求 (a) $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ 之指向餘弦 [B]

(b) 求 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ 之大小與其指向餘弦 [F]

(c) 求 $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{B} \times \vec{C}$, $\vec{C} \times \vec{A}$ [L]

(d) 求 $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{B} \cdot \vec{C}$, $\vec{C} \cdot \vec{A}$ [M]

(e) 求 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ [O]

(f) 求 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ [P]

(g) 求 $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ [A]

(4) 若 $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_3$, 試證

(a) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \times \vec{V}_2$ [H]

(b) $\frac{V_1}{\sin\theta_{23}} = \frac{V_2}{\sin\theta_{13}} = \frac{V_3}{\sin\theta_{12}}$ 此處 θ_{ij} (V_{ij}) 是 $\vec{V}_i$ 與 $\vec{V}_j$ 間之夾角 [I]

(5) 將 $\vec{V}_1$ 及 $\vec{V}_2$ 之極坐標分別為 (r_1, θ_1, ϕ_1) 及 (r_2, θ_2, ϕ_2)

(a) 試證此兩個向量間之夾角 θ_{12} 可由下式中求得

$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$ [C]

(b) 利用此結果求在蘭州 (經度 $103°$, 緯度 $37°$) 及台北

（經度 122° 緯度 25° ）兩地垂直方向兩向量間之夾角 [K]

6. 答案

[A] 45 [B] $\cos\alpha_A = \frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta_A = \frac{-2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{30}}$

$\cos\alpha_B = \frac{-3}{\sqrt{59}}$, $\cos\beta_B = \frac{1}{\sqrt{59}}$, $\cos\gamma_B = \frac{-7}{\sqrt{59}}$

$\cos\alpha_C = \frac{4}{\sqrt{101}}$, $\cos\beta_C = \frac{7}{\sqrt{101}}$, $\cos\gamma_C = \frac{6}{\sqrt{101}}$

[C] $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = |V_1||V_2|\cos\theta_{12} = r_1 r_2 \cos\theta_{12}$

$= V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z}$

$= r_1\sin\theta_1\cos\phi_1\, r_2\sin\theta_2\cos\phi_2 + r_1\sin\theta_1\sin\phi_1\, r_2\sin\theta_2\sin\phi_2$

$+ r_1\cos\theta_1\, r_2\cos\theta_2$

因此 $\cos\theta_{12} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$

[D] $\vec{a}\cdot\hat{k} = |\vec{a}|\cos\gamma = a_z$ [E] $\vec{a}\cdot\hat{i} = |\vec{a}|\cos\alpha = a_x$

[F] $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = 6\hat{i} + 6\hat{j}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = 0$

[G] $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{|\vec{a}|^2}[a_x^2 + a_y^2 + a_z^2] = 1$

[H] $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_3}$ 兩邊乘以 $\vec{V_1}$

$\vec{V_1}\times(\vec{V_1}+\vec{V_2}) = \vec{V_1}\times\vec{V_3} \Rightarrow \vec{V_1}\times\vec{V_2} = V_1\times\vec{V_3}$

$\vec{V_2}\times\vec{V_1} = \vec{V_2}\times\vec{V_3}$

[I] $|V_2\times\vec{V_1}| = |V_1\times\vec{V_3}| = |\vec{V_2}\times V_3|$

$|V_1||V_2|\sin\theta_{12} = |V_1||V_3|\sin\theta_{13} = |\vec{V_2}||\vec{V_3}|\sin\theta_{23}$

兩邊除以 $|V_1||V_2||V_3|$ 即得三角中之正弦定理

[J] $\vec{a}\cdot\hat{j} = |\vec{a}|\cos\beta = a_y$

[K] 蘭州 $\theta = 90° - 37° = 53°$, $\phi = 103°$

台北 $\theta = 90° - 25° = 65°$, $\phi = 122°$

$\cos\theta_{12} = \sin 53°\sin 65°\cos 19° + \cos 53°\cos 65° = 0.938$ $\theta_{12} \simeq 20°$

[L] $\vec{A}\times\vec{B} = 13\vec{i} + 32\vec{j} + 10k$, $\vec{B}\times\vec{C} = 55\vec{i} - 10\vec{j} - 25\vec{k}$

$\vec{C}\times\vec{A} = 20\vec{i} + 26\vec{j} - 41\vec{k}$

[M] $\vec{A}\cdot\vec{B} = -18$, $\vec{B}\cdot\vec{C} = -47$, $\vec{C}\cdot\vec{A} = 12$

[N] $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 3$

[O] 270 [P] $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = 60\vec{i} + 180\vec{j} + 60\vec{k}$

$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = -122\vec{i} + 38\vec{j} + 37\vec{k}$

7. 其他有関問題

(1) 有時我們用 ($A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$) 來表示 $\vec{A}$ 之直角坐標, 其原因在能將兩個向量之純量積及向量積能以較簡單的符號表出

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$$

$$C_1 = C_x = A_y B_z - A_z B_y = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

$$C_2 = C_y = A_z B_x - A_x B_z = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$C_3 = C_z = A_x B_y - B_x B_y = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

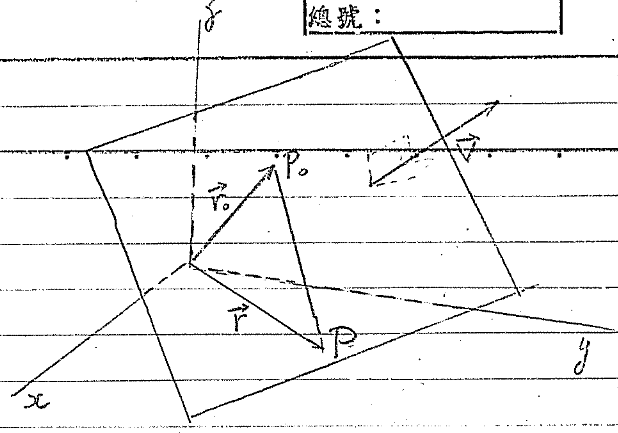
可用 $C_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k$ 表出, 此處

若三個指數中任意兩個相等時 $\epsilon_{ijk} = 0$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$$

(2) 現在我們將討論向量與立體幾何之関係

(a) $\vec{V}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ 是代表一垂直於 $\vec{V}$ 向量且通過 P_0 (其坐標為 $\vec{r}_0$) 之平面



令 P_0 之位坐標為 $\vec{r_0}$ 而在平面上任意一點之位

坐標為 $\vec{r}$

則 $\vec{r}-\vec{r_0}$ 是在該平面之向量，因此

$\vec{V}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0$

若 $\vec{V}=V_1\hat{i}+V_2\hat{j}+V_3\hat{k}$ 則上式可寫為

$V_1(x-x_0)+V_2(y-y_0)+V_3(z-z_0)=0$ 也即是一般解析方面所得之結果

(b) $\vec{V}\times(\vec{r}-\vec{r_0})=\vec{0}$ 是代表通過 P_0（其坐標為 $\vec{r_0}$）而且平行於 $\vec{V}$

之直線公式

證法与 (a) 部分相似

因此 $\vec{r}-\vec{r_0}=\lambda\vec{V}$ 是通過 P_0（其坐標向量為 $\vec{r_0}$）而且平行於 $\vec{V}$ 之

直線公式（此處 λ 為一純量變數）

8. 習題

(1) 用簡單方法表出

(a) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i A_i(B\times\vec{C})_i$$
$$=\sum_{i=1}^{3}A_i\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}B_jC_k$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

(b) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_j(\vec{B}\times C)_k$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_j\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{klm}B_lC_m$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,A_j B_l C_m$$

定理 $\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$

δ_{ij} 之定義 若 $i=j$ 則其值為 1

$i \neq j$ 則其值為 0

證 由 ϵ_{klm} 之定義可得 $\epsilon_{klm} = \epsilon_{lmk}$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm} = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk}$$

此, j 不能為 k 否則其值為 0，i 也不能為 j 否則上式為 0

因此上式只有在 i 不為 j 亦不為 k 時方成立

同理 上式只有在 l 不為 m 亦不為 k 時方成立

因此上式不為 0 時只有兩種可能 (i) $i=l$, $j=m$ 或 $i=m$, $j=l$.

因為 i, j, k, l, m 均只有 1, 2, 3 三種可能值 當(i)時上式值為 1

當(ii)時上式值為 −1. 因此我們得上列之定理

$$[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})]_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}(\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\,A_j B_l C_m$$

$$= \sum_{m=1}^{3} A_m C_m B_i - \sum_{l=1}^{3} A_l B_l C_i$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{C})\,B_i - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,C_i$$

因此我們再度證明 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C}$

(2) 求由 $P=(4,5,-7)$ 點至通過 $Q=(-3,6,12)$ 並平行於向量

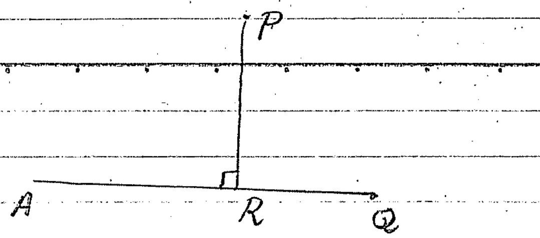
$\vec{V} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ 之直線之距離

解 R 位於通過 Q 並平行於 $\vec{V}$ 之直線上，因此

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_R+3 & y_R-6 & z_R-12 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

其結果可寫成

$$\frac{x_R-3}{4} = \frac{y_R-6}{-1} = \frac{z_R-12}{3}$$



同時R也位於通過 P 而垂直於 $\vec{V}$ 之直線為

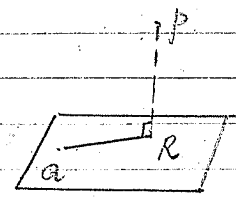
$$4(x_R-4) - (y_R-5) + 3(z_R+7) = 0$$

$\overrightarrow{AQ} \parallel \vec{V}$, $\overrightarrow{PR} \perp \vec{V}$

由上列联立方程式可得解 $\vec{R}$ ，$|\overrightarrow{PR}|$即為所求之結果

(3) 求上式 P 點与通過 Q 且垂直於 $\vec{V}$ 之平面之間的距離

$\vec{R}$ 點是在通過 Q 且垂直於 $\vec{V}$ 之平面上，因此



$$4(x_R+3) - (y_R-6) + 3(z-12) = 0$$

同時 R 也位於通過 $\vec{P}$ 而且平行於 $\vec{V}$ 之直線上，因此

$\overrightarrow{PR} \parallel \vec{V}$
$\overrightarrow{RQ} \perp \vec{V}$

$$\frac{x_R-4}{4} = \frac{y_R-5}{-1} = \frac{z_R+7}{3}$$

由上列联立方程式可求得 $\vec{R}$, $|\overrightarrow{PR}|$ 即為所求之結果

(4) (a) 寫出通過 P 點同時平行於 $\vec{V_1} = -1\,\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ 之直線方程式

(b) 寫出通過 Q 點同時垂直於 $\vec{V_2} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ 之平面方程式

(c) 求直線 (a) 与平面 (b) 之交點

(d) 求直線 (a) 与平面 (b) 間之交角 (P, Q 与 (2) (3) 部分同)

解 (a) $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+7}{-4}$

(b) $(x+3) - (y-6) + 2(z-12) = 0$

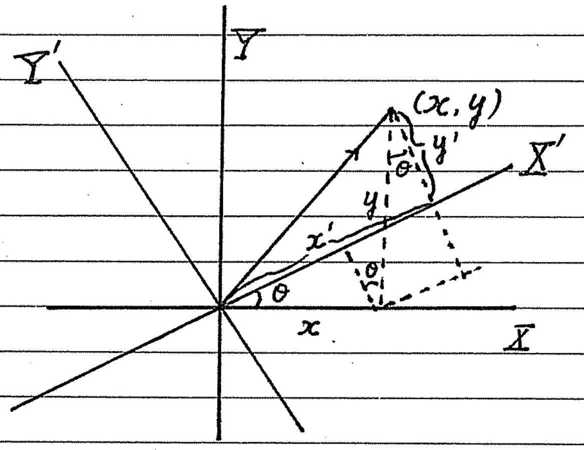
(c) $\vec{R} = (x_R, y_R, z_R)$ 是上列联立方程式之解

(d) 直线与平面之交角即是 $\overrightarrow{RP}$ 及 $\overrightarrow{RQ}$ 之間之交角，此交角可由其純量積求得

分類：
編號：
總號：

純量及向量之定義；純量積

我們以二度空間之向量來說明。此節之結果可自然地推廣至三度空間



若一點 P 在 XY 座標系統中為 (x, y)，則它在 X'Y' 座標系統中為 (x', y')

X'Y' 系統是由 XY 轉動 θ 角所得

則由上圖中可知

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

若 (V_x, V_y) 在以上座標轉換中滿足

$$V_x' = V_x\cos\theta + V_y\sin\theta$$
$$V_y' = -V_x\sin\theta + V_y\cos\theta$$

則 $\vec{V} = (V_x, V_y)$ 為一向量

若 A 在以上座標轉換中維持不變，則 A 為純量

定理. 若 $\vec{A}, \vec{B}$ 為兩向量，則 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 為純量

證明. $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$

$$A_x'B_x' + A_y'B_y' = (A_x\cos\theta + A_y\sin\theta)(B_x\cos\theta + B_y\sin\theta) + (-A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)(-B_x\sin\theta + B_y\cos\theta)$$

$$= A_xB_x(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + A_yB_x(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) + A_xB_y(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) + A_yB_y(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y$$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}$ 是純量

分類：	
編號：	
總號：	

注意 $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = 1$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|\,|\vec{A}\times\vec{C}|\ \sin P = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

$|\vec{A}\times\vec{B}| \rightarrow \sin r \rightarrow$ 弧度

$\sin P \rightarrow$ $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$ 間之夾角

弧 r 在 $\vec{A},\vec{B}$ 所形成之平面上　　弧 q 在 $\vec{A},\vec{C}$ 所形成之平面上

$$\Rightarrow \quad \sin r \ \sin q \ \sin P = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

同理

$$\sin p \ \sin r \ \sin Q = \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$$

$$\sin q \ \sin p \ \sin R = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad \sin r \sin q \sin P = \sin p \sin r \sin Q = \sin q \sin p \sin R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

應用：

1. $\vec A\times(\vec B\times\vec C)=\vec B(\vec A\cdot\vec C)-\vec C(\vec A\cdot\vec B)$ 與 $\vec A$ 垂直(兩邊與 $\vec A$ 作純量積)
   (i) 將公式兩邊之分點算出來比較，即可得證
   (ii) $(\vec A\times\vec B)\times\vec C=\vec B(\vec A\cdot\vec C)-\vec A(\vec B\cdot\vec C)$ 與 $\vec C$ 垂直
   (iii) 注意 $\vec A\times(\vec B\times\vec C)\neq(\vec A\times\vec B)\times\vec C$

2. $\vec A\times(\vec B\times\vec C)+\vec B\times(\vec C\times\vec A)+\vec C\times(\vec A\times\vec B)=0$

3. 若 P, Q, R 是三個不在一直線上的點，其位置向量分別為 $\vec a, \vec b, c$，
   則 $\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a$ 與 P, Q, R 所成之平面垂直

   設 $\vec r$ 是 P, Q, R 所形成平面上一點
   $\vec r-\vec a$，$\vec b-\vec a$，$\vec c-\vec a$ 均在 P, Q, R 所形成之平面上
   因此 $(\vec r-\vec a)\cdot(\vec b-\vec a)\times(\vec c-\vec a)=0$
   $\Rightarrow (\vec r-\vec a)\cdot(\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a)=0$
   $\Rightarrow \vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a$ 與 P, Q, R 所形成的平面上任一向量垂直
   $\downarrow$
   與 P, Q, R 所形成的平面垂直

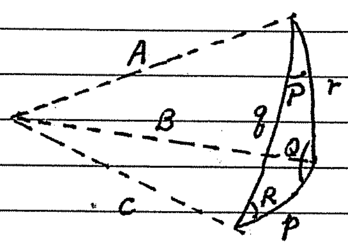
4. $\vec a, \vec b, \vec c$ 三向量 $(\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)\neq 0)$ 與 $\vec a', \vec b', \vec c'$ 稱為互反向量系統，若 $\vec a\cdot\vec a'=\vec b\cdot\vec b'=\vec c\cdot\vec c'=1$
   $\vec a'\cdot\vec b=\vec a'\cdot\vec c=\vec b'\cdot\vec a=\vec b'\cdot\vec c=\vec c'\cdot\vec a=\vec c'\cdot\vec b=0$

   (i) 解：$\vec a'=\dfrac{\vec b\times\vec c}{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)}$，$\vec b'=\dfrac{\vec c\times\vec a}{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)}$，$\vec c'=\dfrac{\vec a\times\vec b}{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)}$

   (ii) $\vec a'\cdot(\vec b'\times\vec c')=\dfrac{1}{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)}$

   (iii) 任一向量可寫為
   $$\vec r=(\vec r\cdot\vec a')\vec a+(\vec r\cdot\vec b')\vec b+(\vec r\cdot\vec c')\vec c$$
   $\downarrow$
   書上之習題

5.



單位半徑 $|\vec A|=|\vec B|=|\vec C|=R=1$

$\vec A\times\vec B\times(\vec C\times\vec D)$
$=\vec B(\vec A\cdot(\vec C\times\vec D))-\vec A(\vec B\cdot(\vec C\times\vec D))$

取 $\vec C=\vec A$，$\vec D=\vec C$ $\Rightarrow (\vec A\times\vec B)\times(\vec A\times\vec C)=(\vec A\cdot\vec B\times\vec C)\vec A$

分類：
編號：
總號：

Want to show $\vec{A}\times\vec{B}$ transforms as a vector under rotation

我們在此證明 $\vec{A}\times\vec{B}$ 有向量轉換之性質

$$A_x' = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta$$
$$A_y' = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta \qquad \text{rotation by angle } \theta \text{ around } z \text{ axis}$$
$$A_z' = A_z$$

$$B_x' = B_x \cos\theta + B_y \sin\theta$$
$$B_y' = -B_x \sin\theta + B_y \cos\theta$$
$$B_z' = B_z$$

$$(\vec{A}'\times\vec{B}')_x = A_y' B_z' - A_z' B_y'$$
$$= (-A_x \sin\theta + A_y \cos\theta) B_z - A_z(-B_x \sin\theta + B_y \cos\theta)$$
$$= \underbrace{(A_y B_z - A_z B_y)}_{(\vec{A}\times\vec{B})_x} \cos\theta + \underbrace{(A_z B_x - A_x B_z)}_{(\vec{A}\times\vec{B})_y} \sin\theta$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_x \cos\theta + (\vec{A}\times\vec{B})_y \sin\theta$$

it has the required transformation property

因此它有所需之轉換性質

One can easily show 同理可證 $(\vec{A}'\times\vec{B}')_y = -(\vec{A}\times\vec{B})_x \sin\theta + (\vec{A}\times\vec{B})_y \cos\theta$

$$(\vec{A}'\times\vec{B}')_z = (\vec{A}\times\vec{B})_z$$

分類：
編號：
總號：

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{C} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{B}$

Magnitudes must be equal.

$$AC \sin\theta_{AC} = AB \sin\theta_{AB} = CB \sin\theta_{CB}$$

$$\frac{\sin\theta_{AC}}{B} = \frac{\sin\theta_{AB}}{C} = \frac{\sin\theta_{CB}}{A}$$

正弦定理

方向餘弦

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

平面，直線

點與直線之距離　　　三度空間

點與面之距離

面積的向量表象

向量之微分

分類:
編號:
總號:

向量恆等式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

Proof

Alternative argument

(i) Linear combination of $\vec{B}$, $\vec{C}$

$\hat{n}$ ↑ $\vec{B}\times\vec{C} \perp \vec{B},\vec{C}$ plane

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \perp \hat{n}$ ↓ must be in $\vec{B},\vec{C}$ plane.

(ii) $(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}$ $\vec{A}$ must occur

$\vec{A}\cdot\vec{C}$ or $\vec{A}\cdot\vec{B}$

↑ since we want scalar ↗

(iii) $\vec{A}\cdot[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})] = 0$ the sign between these two terms is negative

(iv) determine the sign

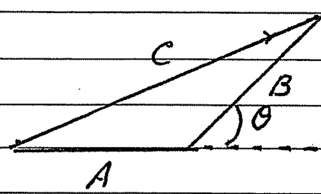
$$\underbrace{\hat{i}\times(\underbrace{\hat{j}\times\hat{i}}_{-\hat{k}})}_{\hat{j}} = \hat{j} - \underbrace{(\hat{i}\cdot\hat{j})}_{0}\hat{i}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

$$\hat{i}\times(\hat{j}\times\hat{j}) = 0 \qquad (\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

Applications:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

↓ 餘弦定理

分類：
編號：
總號：

向量之微分

$\vec{A}(t)$ 是一向量

兩個向量相減

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

若 $\vec{A}(t)$ 以直角座標表示

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$$

則

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \hat{i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_x(t+\Delta t) - A_x(t)}{\Delta t}$$

$$+ \hat{j} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_y(t+\Delta t) - A_y(t)}{\Delta t}$$

$$+ \hat{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_z(t+\Delta t) - A_z(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

在此，我們設

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 與時間無關

例 $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

$$= A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$+ \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + \frac{dA_z}{dt}B_z$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})_x = \frac{d}{dt}(A_yB_z - A_zB_y)$$

$$= A_y\frac{dB_z}{dt} - A_z\frac{dB_y}{dt}$$

$$+ \frac{dA_y}{dt}B_z - \frac{dA_z}{dt}B_y$$

$$= \left(\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_x + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}\right)_x$$

同理可證 y, z 分量

分類：
編號：
總號：

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{u}$$

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

$m(\vec{A}\times\vec{B})$ 純量与一向量相乘

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\begin{aligned} &= A_xB_x\,\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\times\hat{k} \\ &+ A_yB_x\,\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\,\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}\times\hat{k} \\ &+ A_zB_x\,\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\,\hat{k}\times\hat{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

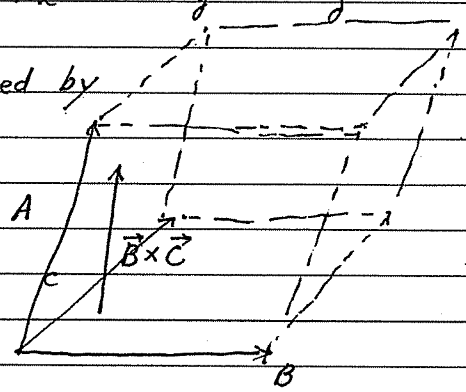
$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

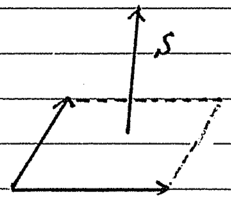
$$= \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

Volume formed by



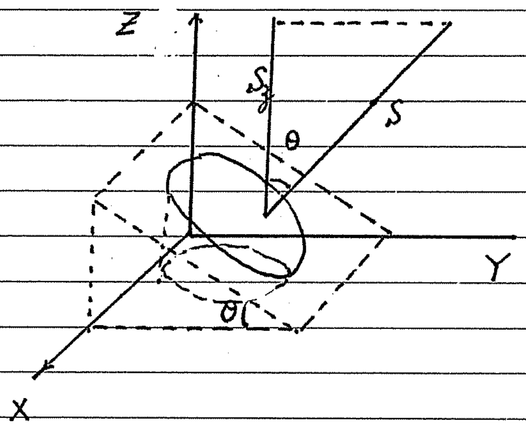
面積的向量表象

平面



大小是面積, 方向与平面垂直

向外



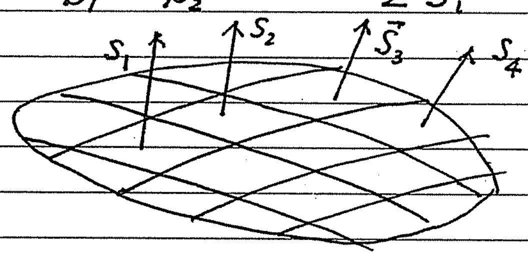
S_z 是該面積在 XY 面上之投影

$S_z = S\cos\theta$

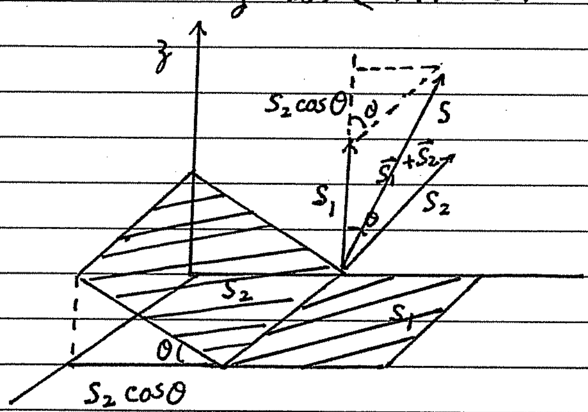
$S\cos\theta$

若表面並非一平面則可將表面分割成很多小平面, 並且定義該表面面積向量 $\vec{S}$ 為各小平面面積向量之和

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \cdots = \sum \vec{S}_i$$



S_z 仍是該表面在 XY 面之投影

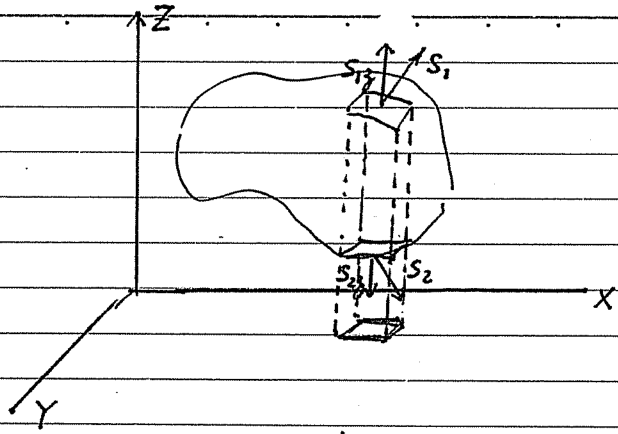


$$S_z = S_1 + S_2\cos\theta$$

面積在 XY 平面之投影

分類：
編號：
總號：

封閉面



$\vec{S}_1$，$\vec{S}_2$ 在 XY 平面上之投影大小相同方向相反

$S_{1z} = -S_{2z}$

$\Rightarrow \sum S_{iz} = S_z = 0$

同理 $S_x = 0$，$S_y = 0$

$\Rightarrow \vec{S} = 0$

利用指標符號

(i) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B}\times\vec{C})_k$$

$$= \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} A_j \sum_l \sum_m \epsilon_{klm} B_l C_m$$

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\Rightarrow (\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i = \sum_j \sum_l \sum_m \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} A_j B_l C_m$$

$$= \sum_{j,l,m} \delta_{il}\delta_{jm} A_j B_l C_m - \sum_{j,l,m} \delta_{im}\delta_{jl} A_j B_l C_m$$

$$\sum_l \delta_{il} B_l = B_i$$

$$= \sum_j A_j C_j B_i - \sum_j A_j B_j C_i$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{C}) B_i - (\vec{A}\cdot\vec{B}) C_i$$

因此,上式得證

(ii) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = \sum_i (\vec{A}\times\vec{B})_i (\vec{C}\times\vec{D})_i$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} A_j B_k \sum_l \sum_m \epsilon_{ilm} C_l D_m$$

$$= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta_{jl}\delta_{km} A_j B_k C_l D_m - \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta_{jm}\delta_{kl} A_j B_k C_l D_m$$

$$= \sum_j A_j C_j \sum_m B_m D_m - \sum_j A_j D_j \sum_l B_l C_l$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{\ell})$$

附录 D　复数的运算

1. 复数的表示法

复数 $\widetilde{A}$ 是一个二维数，它对应于复平面中的一个坐标为 (x, y) 的点，或对应于复平面中的一个长度为 A、仰角为 φ 的矢量（见图 D－1）。与此相应地复数有下列两种表示法：

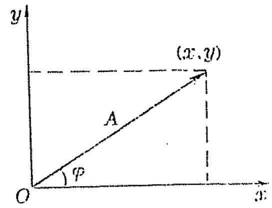


图 D－1

$$\begin{cases} \widetilde{A} = x + \mathrm{i}y, & \text{(D.1)} \\ \widetilde{A} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & \text{(D.2)} \end{cases}$$

式中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$（欧拉公式，详见第 3 节）。(D.1) 式是复数的直角坐标表示，对应点的横坐标 x 为复数的实部，记作 $x = \mathrm{Re}\,\widetilde{A}$；纵坐标 y 为复数的虚部，记作 $y = \mathrm{Im}\,\widetilde{A}$. (D.2) 式是复数的极坐标表示，对应矢量的长度 A 为复数的模或绝对值，记作 $A = |\widetilde{A}|$；仰角 φ 为复数的辐角，记作 $\varphi = \arg\widetilde{A}$. 两种表示法之间有如下换算关系：[1]

$$\begin{cases} A = \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{(D.3)} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}. & \text{(D.4)} \end{cases}$$

或反过来，有

$$\begin{cases} x = A\cos\varphi, & \text{(D.5)} \\ y = A\sin\varphi. & \text{(D.6)} \end{cases}$$

单位虚数 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 有如下性质：

$$\mathrm{i}^2 = -1, \qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \qquad \frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}.$$

复数 $\widetilde{A} = x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的共轭 $\widetilde{A}^*$ 定义为

$$\widetilde{A}^* = x - \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{(D.7)}$$

所以

$$\widetilde{A}\widetilde{A}^* = A^2 = x^2 + y^2. \qquad \text{(D.8)}$$

即一对共轭复数的乘积等于模的平方。

两个复数 $\widetilde{A}_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$、$\widetilde{A}_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ 相等的充要

---

[1] 通常把反三角函数的符号，如 $\arctan\varphi$，理解为 φ 在主值区间 $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ 取，这里应该认为 φ 在从 $-\pi$ 到 π 的所有象限中取值。至于它在哪个象限，要根据 x 和 y 的正负来确定。

条件为

$$\begin{cases}\text{实部相等：} x_1 = x_2, \\ \text{虚部相等：} y_1 = y_2.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\text{模相等：} \quad A_1 = A_2, \\ \text{辐角相等：} \varphi_1 = \varphi_2 .\end{cases}$$

2. 复数的四则运算

（1）加减法

$$\widetilde{A}_1 \pm \widetilde{A}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{D. 9}$$

即实部、虚部分别加减。

（2）乘法

$$\widetilde{A}_1 \cdot \widetilde{A}_2 = (A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}) \cdot (A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}) = A_1 A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{D. 10}$$

即模相乘，辐角相加。或者

$$\widetilde{A}_1 \cdot \widetilde{A}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{D. 11}$$

（3）除法

$$\frac{\widetilde{A}_1}{\widetilde{A}_2} = \frac{A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{D. 12}$$

即模相除，辐角相减。或者

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} &= \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + \mathrm{i}\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}.\end{aligned} \tag{D. 13}$$

倒数运算可以看作是除法的特例：

$$\frac{1}{\widetilde{A}} = \frac{1}{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \tag{D. 14}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{1}{\widetilde{A}} &= \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}.\end{aligned} \tag{D. 15}$$

3. 欧拉公式

现在介绍一下欧拉公式是如何得来的。因为

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{x} = 1 + \dfrac{x}{1\,!} + \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} + \cdots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} - \dfrac{x^6}{6\,!} + \cdots, \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!} - \cdots.\end{cases}$$

在 e^{x} 的展开式中把 x 换成 $\pm\mathrm{i}x$，注意到 $(\pm\mathrm{i})^2 = -1$，$(\pm\mathrm{i})^3 = \mp\mathrm{i}$，$(\pm\mathrm{i})^4 = 1$，…，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x} &= 1 \pm \mathrm{i}\,\frac{x}{1\,!} - \frac{x^2}{2\,!} \mp \mathrm{i}\,\frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \cdots\right) \pm \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3\,!}\cdots\right),\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x} = \cos x \pm \mathrm{i}\sin x, \tag{D. 16}$$

这就是欧拉公式。下面给出几个常用的三角函数与复指数函数之间的变换公式。从欧拉公式可以反解出：

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}), \tag{D. 17}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}), \tag{D. 18}$$

由此立即得到

$$\tan\varphi = -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}. \tag{D. 19}$$

4. 简谐量的复数表示

简谐量

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

也可用一个复数

$$\widetilde{s}(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$$

的实部或虚部来表示。上式右端又可写为 $(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \widetilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，其中

$$\widetilde{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

称为复振幅，它集振幅 A 和初相位 φ_0 于一身。于是，简谐振动的复数表示可写为

$$\widetilde{s}(t) = \widetilde{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} . \tag{D. 20}$$

用复数也可计算同频简谐量的叠加问题。譬如我们要计算两简谐量

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ 和 } s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

的叠加，$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 都是对应复数量

$$\widetilde{s_1}(t)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_1)} \quad 和 \quad \widetilde{s_2}(t)=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_2)}$$

的实部，所以它们的叠加 $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$ 就是相应复数叠加

$$\widetilde{s}(t)=\widetilde{s}_1(t)+\widetilde{s}_2(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$$

的实部：

$$s(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$

如果 $\widetilde{s}(t)$ 代表位移的话，则速度和加速度为

$$\widetilde{v}=\frac{\mathrm{d}\widetilde{s}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\omega\widetilde{s},$$

$$\widetilde{a}=\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{s}}{\mathrm{d}t^2}=(\mathrm{i}\omega)^2\widetilde{s}=-\omega^2\widetilde{s},$$

亦即，对 t 求导数相当于乘上一个因子 $\mathrm{i}\omega$，运算起来十分方便。

我们有时候需要计算两个同频简谐量乘积在一个周期里的平均值，如平均功率，这也可以用复数来运算。设两个同频简谐量为

$$\begin{cases} a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1), \\ a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\Phi_2), \end{cases}$$

它们的乘积在一个周期内的平均值等于

$$\overline{a_1a_2}=\frac{1}{T}\int_0^T a_1(t)a_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega A_1A_2}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\omega t+\Phi_1)\cos(\omega t+\Phi_2)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega A_1A_2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[\cos(\Phi_1-\Phi_2)+\cos(2\omega t+\Phi_1+\Phi_2)]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A_1A_2}{2}\cos(\Phi_1-\Phi_2).$$

如果用相应的复数

$$\begin{cases} \widetilde{a_1}(t)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_1)} \\ \widetilde{a_2}(t)=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_2)} \end{cases}$$

来计算的话，下列公式给出同样的结果：

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\widetilde{a_1}\widetilde{a_2}^*)=\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\Phi_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\Phi_2)}]$$

$$=\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi_1-\Phi_2)}]=\frac{A_1A_2}{2}\cos(\Phi_1-\Phi_2).$$

所以今后我们将用下式来计算两简谐量乘积的平均值：

$$\overline{a_1a_2}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\widetilde{a_1}\widetilde{a_2}^*). \tag{D.21}$$

习　题

D－1. 计算下列复数的模和辐角。

(1) $(1+2\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$；

(2) $(3+\mathrm{i})-[1+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}]$；

(3) $(2+3\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})$；

(4) $(-2+7\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})$.

D－2. 计算下列复数的实部和虚部。

(1) $(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$；

(2) $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$；

(3) $\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(4) $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

D－3. 用复数求两个简谐量 $a(t)=A\cos(\omega t+\varphi_a)$ 和 $b(t)=B\cos(\omega t+\varphi_b)$ 乘积的平均值 $\overline{a(t)b(t)}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T a(t)b(t)\,\mathrm{d}t\ (T=2\pi/\omega)$：

	A	φ_a	B	φ_b	平均值
(1)	2	$\pi/3$	1	$2\pi/3$	
(2)	6	$\pi/4$	2	0	
(3)	3	$\pi/3$	1	$-2\pi/3$	
(4)	0.2	$4\pi/5$	7	$6\pi/5$	

附录 C 二阶常系数微分方程

二阶线性常系数微分方程

$$a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+cx=d \tag{C.1}$$

的解由两部分相加而成。一部分是非齐次方程式的特解

$$x=\frac{d}{c}, \tag{C.2}$$

另一部分是齐次方程式

$$a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+cx=0 \tag{C.3}$$

的通解。通解可如下求得，首先设(C.3)式解的形式为

$$x=\mathrm{e}^{\gamma t}, \tag{C.4}$$

将(C.4)式代入(C.3)式即可看出，要(C.4)式能够满足(C.3)式，γ 必须满足

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0. \tag{C.5}$$

解此二次代数方程式(C.5)，即得

$$\gamma=-\alpha\pm\beta, \tag{C.6}$$

其中

$$\alpha=\frac{b}{2a},\quad \beta=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}, \tag{C.7}$$

令

$$\lambda=\frac{b^2}{4ac}, \tag{C.8}$$

λ 称为阻尼度。下面按 λ 的不同值分三个情形讨论：

(1) 当 $\lambda>1$ 时，$\frac{b^2}{4a^2}>\frac{c}{a}$，$\beta$ 为实数，(C.5)式有两个实根：

$$\gamma_1=-\alpha+\beta \quad 和 \quad \gamma_2=-\alpha-\beta,$$

在此情况下(C.3)式的通解为

$$x=A\,\mathrm{e}^{(-\alpha+\beta)t}+B\,\mathrm{e}^{(-\alpha-\beta)t}=\mathrm{e}^{-\alpha t}(A\,\mathrm{e}^{\beta t}+B\,\mathrm{e}^{-\beta t}), \tag{C.9}$$

式中 A、B 为任意常数，由起始条件决定。

(2) 当 $\lambda=1$ 时，$\frac{b^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$，$\beta=0$，这时(C.5)式的两个实根重合，

$$\gamma_1=\gamma_2=-\alpha.$$

在此情况下(C.3)式的通解为

$$x=(A'+B't)e^{-\alpha t}, \tag{C.10}$$

式中 A'、B' 为任意常数，由起始条件决定。

(3) 当 $\lambda<1$ 时，$\frac{b^2}{4a^2}<\frac{c}{a}$，$\beta$ 为虚数，令 $\beta=\mathrm{i}\omega$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，则

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}, \tag{C.11}$$

这时(C.5)式有两个复数根：

$$\gamma_1=-\alpha+\mathrm{i}\omega \quad 和 \quad \gamma_2=-\alpha-\mathrm{i}\omega.$$

在此情况下(C.3)式的通解为

$$x=A''\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega)t}+B''\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{i}\omega)t}=\mathrm{e}^{-\alpha t}(A''\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+B''\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \tag{C.12}$$

式中 A''、B'' 为任意常数，由起始条件来决定。若用另外两个任意常数 K 和 φ 来代替 A'' 和 B''：

$$K=2\sqrt{A''B''},\quad \varphi=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{A''}{B''},$$

或反过来

$$A''=\frac{K}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\quad B''=\frac{K}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},$$

则

$$x=\frac{K\,\mathrm{e}^{-\alpha t}}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}]=K\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi). \tag{C.13}$$

此解具有衰减振荡的形式，振荡频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}, \tag{C.14}$$

周期为

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\Big/\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}, \tag{C.15}$$

当 $b\to0$ 时，$\alpha=b/2a\to0$，方程式的解变为等幅振荡的形式：

$$x=K\cos(\omega_0t+\varphi), \tag{C.16}$$

式中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{c}{a}}, \tag{C.17}$$

这时振荡的频率和周期分别变为

$$\nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{a}},\quad T_0=\frac{1}{\nu_0}=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}, \tag{C.18}$$

微分方程式(C.1)、(C.3)各种解的形式示于图 C－1 和图 C－2，其中图 C－1 所示为非齐次方程式(C.1)在以下起始条件下三种解的形式，

$$t=0\ 时\ x=0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0. \tag{C.19}$$

图 C－2 所示则为齐次方程式(C.3)在以下起始条件下三种解的形式，

$$t=0\ 时\ x=x_0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0. \tag{C.20}$$

由图 C－1 和 C－2 可见，当 $t\to\infty$ 时，x 趋于某一稳定值$\left(\dfrac{d}{c}\text{或}0\right)$。在 $\lambda>1$ 时过程是非周期性的；在 $\lambda<1$ 时，过程是衰减振荡式的。$\lambda=1$ 的情形是前两者转折点，这时 x 达到稳定值的过程最短，这种情形称为临界情形。

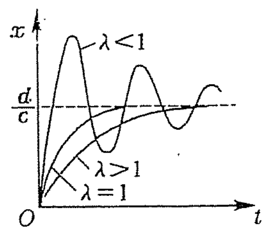


图 C－1 非齐次方程的三种解

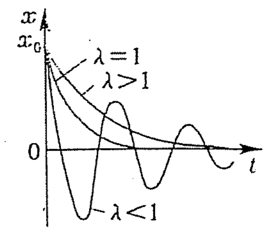


图 C－2 齐次方程的三种解

§ 丁-5 二次常係數均勻線型微分方程

現在我們要講一種在物理裡面應用得非常普遍的微分方程式，稱爲二次常係數均勻線型微分方程。這種微分方程，通常在處理波動或振盪一類問題的時候，是常常會遇到的。

這種微分方程的標準形式，是：

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0. \qquad (丁\cdot22)$$

a, b, c 都是已知的常數。這種微分方程有一個很重要的性質，那就是：如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是(丁·22)的解的話，則很顯然地。$m_1y_1(x)+m_2y_2(x)$ 也是這個微分方程的解，(這是均勻線型微分方程的特性，並不限於二次，也並不限於常係數。) m_1 和 m_2 是兩個任意常數。因此，如果我們能够找到(丁·22)的兩個特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，並且 $y_2(x)$ 不是 $y_1(x)$ 和一常數的乘積，則 $m_1y_1(x)+m_2y_2(x)$ 就是(丁·22)的通解。這是由於(丁·22)是一個二次微分方程，它祗有二個任意常數。

我們可以用符號 D 來表示微分算符 $\frac{d}{dx}$. (丁·22)可被改寫爲：

$$(aD^2+bD+c)y=0. \qquad (丁\cdot23)$$

由直接的計算，我們知道，如果 a 是一個常數，則：

$$aDy=D(ay). \qquad (丁\cdot24)$$

因此，(丁·23)式 y 前面的括弧實在可以被分解爲：

$$a(D-k_1)(D-k_2)y=0, \qquad (丁\cdot25)$$

k_1 和 k_2 是二次代數方程式：

$$ak^2+bk+c=0. \qquad (丁\cdot26)$$

的兩個根。我們稱(丁·26)爲(丁·22)的輔助方程式。它對(丁·22)的解是很重要的。

現在我們先假定 $k_1 \neq k_2$，則由於(丁·24)，

$$(D-k_1)(D-k_2)y=(D-k_2)(D-k_1)y; \qquad (丁\cdot27)$$

並且，我們留意：

$$De^{kx}=\frac{d}{dx}e^{kx}=ke^{kx},$$

k 爲一個常數。因此：

$$(D-k)e^{kx}=0. \qquad (丁\cdot28)$$

從(丁·27)和(丁·28)，我們就可以看出：e^{k_1x} 和 e^{k_2x} 就是(丁·22)的兩個特解。由於 $k_1 \neq k_2$，因此，(丁·22)的通解就是：

$$y(x)=m_1e^{k_1x}+m_2e^{k_2x}. \qquad (丁\cdot29)$$

有的時候，(丁·26)的根會是複數。在那種情形之下，爲了整齊起見，我們可以利用複數的恒等式：(參閱附錄甲，(甲·64)式。)

$$\left.\begin{aligned} e^{ikx}&=\cos kx+i\sin kx, \\ e^{-ikx}&=\cos kx-i\sin kx. \end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot30)$$

如果(丁·26)的根是一對共軛複數 $p\pm iq$，則(丁·22)的通解就成爲：

$$y(x)=e^{px}(n_1\cos qx+n_2\sin qx). \qquad (丁\cdot31)$$

n_1 和 n_2 是任意常數。(當然也可以是複數。)(丁·31)也可以被寫成：

$$\left.\begin{aligned} &y(x)=Ae^{px}\sin(qx+\varphi), \\ &A=\sqrt{n_1{}^2+n_2{}^2},\ \varphi=\tan^{-1}\frac{n_1}{n_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot32)$$

如果(丁·26)的兩個根相等的話，上面的方法不能使我們得到通解。如果 k 是(丁·26)的重根，那末，(丁·25)卽可被分解爲：

$$(D-k)^2y=0, \qquad (丁\cdot33)$$

因此，我們僅得到一個特解 e^{kx}. 可是我們再留意一下就會發現：

$$(D-k)xe^{kx}=e^{kx},$$

因此：

$$(D-k)^2xe^{kx}=0. \qquad (丁\cdot34)$$

因此，如果輔助方程式的根是一個重根 k，則(丁·22)的通解就是：

$$y(x)=m_1e^{kx}+m_2xe^{kx}. \qquad (丁\cdot35)$$

【例丁-6】 解：$(4D^2-4D+1)y=0$.

【解】 輔助方程式是：

$$4k^2-4k+1=0.$$

這個代數方程式的根是 $k=\frac{1}{2}$，是重根。因此這個微分方程的通解是：

$$y(x)=m_1e^{\frac{1}{2}x}+m_2xe^{\frac{1}{2}x}.$$

這一節所講的方法，可以被推廣到任何次數的常係數均勻線型微分方程式，並不一定限於二次。可是由於二次微分方程在物理方面用得特別多，故我們在這一節專門談它。

§ 丁-6 二次常係數非均勻線型微分方程

在這一節內，我們把上節的限制稍微放寬一些，我們討論有這種形式的微分方程：

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x). \qquad (丁\cdot36)$$

$f(x)$為一已知函數。這種形式的微分方程稱為"二次常係數非均勻線型微分方程。所謂"不均勻"，指的是(丁·36)的左邊每一項都包含着 y 或是 y 的導數(其乘冪各為1)，而在右邊只是一個已知函數，而並不包含 y. 對這種微分方程來說，我們不再能從它的兩個特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 去合成 $m_1y_1(x)+m_2y_2(x)$ 作爲通解。可是，它也有一些很方便的性質。

我們先使(丁·36)式右邊的 $f(x)$ 爲零，如此得出一個均勻微分方程。(我們稱之爲(丁·36)的補充方程式(Complementary equation)，令其通解爲 y_c，再令 y_p 爲(丁·36)的一個特解，則由於：

$$\left.\begin{aligned}&\left(a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c\right)y_c=0,\\&\left(a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c\right)y_p=f(x).\end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot37)$$

因此，$y=y_c+y_p$ 也是(丁·36)式的解，在 y_c 內已經包含有兩個任意常數，故我們只要想辦法先去找到(丁·36)的一個特解，再加上其補充微分方程的通解，即得到(丁·36)的通解。

求非均勻微分方程式的特解的方法，比較麻煩。在 $f(x)$形式簡單的情況下，有時我們可以直接用觀察的方法去求解。在運用觀察法時，最重要的就是必須記住算符$(D-k)$運算於一些特殊函數上的結果。如：

$$\left.\begin{aligned}&(D-k)x^n=nx^{n-1}-kx^n,\\&(D-k)e^{mx}=(m-k)e^{mx},\\&(D-k)\sin mx=m\cos mx-k\sin mx,\\&(D-k)\cos mx=-m\sin mx-k\cos mx,\\&(D-k)x^ne^{mx}=[(m-k)x^n+nx^{n-1}]e^{mx}.\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot38)$$

一般來說，$(D-k)$運算於指數函數上會得同原來的指數函數(除了乘上一個係數之外。)$(D-k)$運算於三角函數時會得到一連串三角函數的混合。$(D-k)$運算於一個多項式($a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$)上就會得出另一個多項式，具有不同的係數。我們可以利用這些關係去求不均勻方程式的特解。(當 $f(x)$ 是特別簡單的時候。)讓我們看下面的例子：

【例丁-7】 解：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{3x}.$$

【解】 這個微分方程的補充方程式的解是：

$$y_c=m_1e^x+m_2e^{2x}.$$

現在主要的工作是要去求特解。因爲：

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-3\frac{d}{dx}+2\right)=(D^2-3D+2)=(D-1)(D-2).$$

由觀察得此特解爲：

$$y_p=\frac{1}{2}e^{3x}.$$

故這個微分方程的解是：

$$y=m_1e^x+m_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}.$$

【例丁-6】 解：$(4D^2-4D+1)y=0$.

【解】 輔助方程式是：

$$4k^2-4k+1=0.$$

這個代數方程式的根是 $k=\frac{1}{2}$，是重根。因此這個微分方程的通解是：

$$y(x)=m_1e^{\frac{1}{2}x}+m_2xe^{\frac{1}{2}x}.$$

這一節所講的方法，可以被推廣到任何次數的常係數均勻線型微分方程式，並不一定限於二次。可是由於二次微分方程在物理方面用得特別多，故我們在這一節專門談它。

§ 丁-6 二次常係數非均勻線型微分方程

在這一節內，我們把上節的限制稍微放寬一些，我們討論有這種形式的微分方程：

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x). \qquad (丁\cdot36)$$

$f(x)$ 爲一已知函數。這種形式的微分方程稱爲"二次常係數非均勻線型微分方程。所謂"不均勻"，指的是（丁·36）的左邊每一項都包含着 y 或是 y 的導數（其乘冪各爲1），而在右邊只是一個已知函數，而並不包含 y. 對這種微分方程來說，我們不再能從它的兩個特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 去合成 $m_1y_1(x)+m_2y_2(x)$ 作爲通解。可是，它也有一些很方便的性質。

我們先使（丁·36）式右邊的 $f(x)$ 爲零，如此得出一個均勻微分方程。（我們稱之爲（丁·36）的補充方程式（Complementary equation），令其通解爲 y_c，再令 y_p 爲（丁·36）的一個特解，則由於：

$$\left.\begin{aligned}&\left(a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c\right)y_c=0,\\&\left(a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c\right)y_p=f(x).\end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot37)$$

因此，$y=y_c+y_p$ 也是（丁·36）式的解，在 y_c 內已經包含有兩個任意常數，故我們只要想辦法先去找到（丁·36）的一個特解，再加上其補充微分方程的通解，即得到（丁·36）的通解。

求非均勻微分方程式的特解的方法，比較麻煩。在 $f(x)$ 形式簡單的情況下，有時我們可以直接用觀察的方法去求解。在運用觀察法時，最重要的就是必須記住算符 $(D-k)$ 運算於一些特殊函數上的結果。如：

$$\left.\begin{aligned}&(D-k)x^n=nx^{n-1}-kx^n,\\&(D-k)e^{mx}=(m-k)e^{mx},\\&(D-k)\sin mx=m\cos mx-k\sin mx,\\&(D-k)\cos mx=-m\sin mx-k\cos mx,\\&(D-k)x^ne^{mx}=[(m-k)x^n+nx^{n-1}]e^{mx}.\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (丁\cdot38)$$

一般來說，$(D-k)$ 運算於指數函數上會得同原來的指數函數（除了乘上一個係數之外。）$(D-k)$ 運算於三角函數時會得到一連串三角函數的混合。$(D-k)$ 運算於一個多項式 $(a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n)$ 上就會得出另一個多項式，具有不同的係數。我們可以利用這些關係去求不均勻方程式的特解。（當 $f(x)$ 是特別簡單的時候。）讓我們看下面的例子：

【例丁-7】 解：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{3x}.$$

【解】 這個微分方程的補充方程式的解是：

$$y_c=m_1e^x+m_2e^{2x}.$$

現在主要的工作是要去求特解。因爲：

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-3\frac{d}{dx}+2\right)=(D^2-3D+2)=(D-1)(D-2).$$

由觀察得此特解爲：

$$y_p=\frac{1}{2}e^{3x}.$$

故這個微分方程的解是：

$$y=m_1e^x+m_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}.$$

向量恒等式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

Proof

Alternative argument

(i) Linear combination of $\vec{B}$, $\vec{C}$

$\vec{B}\times\vec{C} \perp \vec{B},\vec{C}$ plane, $\vec{B}\times\vec{C} = \hat{n}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \perp \hat{n}$ → must be in $\vec{B},\vec{C}$ plane

(ii) $(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}$ — $\vec{A}$ must occur

$\vec{A}\cdot\vec{C}$ or $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ← since we want scalar

(iii) $\vec{A}\cdot[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})] = 0$ — the sign between these two terms is negative

(iv) determine the sign

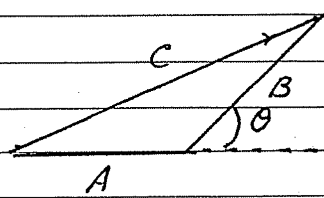
$$\underbrace{\hat{i}\times(\underbrace{\hat{j}\times\hat{i}}_{-\hat{k}})}_{\hat{j}} = \hat{j} - (\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{j}}_{=0})\hat{i}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

$$\hat{i}\times(\hat{j}\times\hat{j}) = 0 \qquad (\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

Applications:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

↓

餘弦定理

分類：
編號：
總號：

向量之微分

$\vec{A}(t)$ 是一向量

兩個向量相減

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

若 $\vec{A}(t)$ 以直角座標表示

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\,\hat{i} + A_y(t)\,\hat{j} + A_z(t)\,\hat{k}$$

則

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \hat{i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_x(t+\Delta t) - A_x(t)}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_y(t+\Delta t) - A_y(t)}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_z(t+\Delta t) - A_z(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

在此,我們設

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 與時間無關

例 $F(t)$, $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

$$= A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt} + \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + \frac{dA_z}{dt}B_z$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})_x = \frac{d}{dt}(A_y B_z - A_z B_y)$$

$$= A_y\frac{dB_z}{dt} - A_z\frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_y}{dt}B_z - \frac{dA_z}{dt}B_y$$

$$= \left(\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_x + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}\right)_x$$

同理可證 y, z 分量

分類：
編號：
總號：

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \ \hat{u}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$m(\vec{A} \times \vec{B})$ 純量與一向量相乘

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} &= A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} \\ &+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} \\ &+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

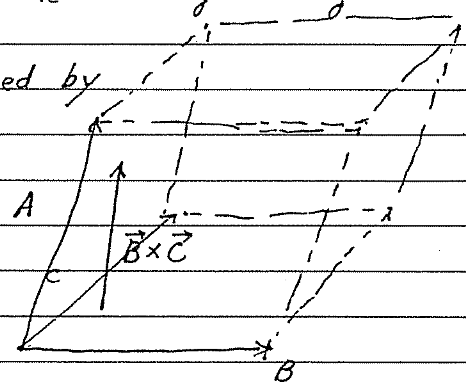
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

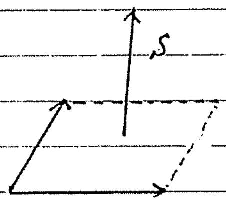
$$= \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

Volume formed by



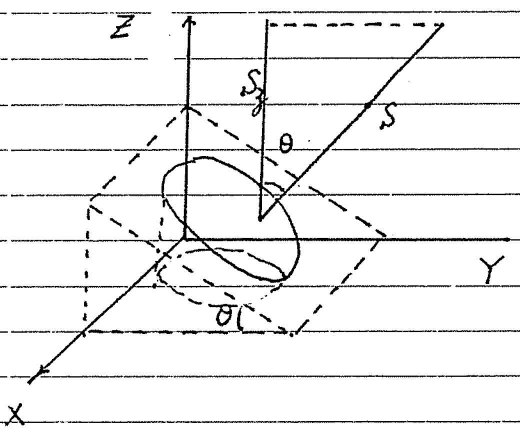
面積的向量表象

平面



大小是面積, 方向和平面垂直

向外

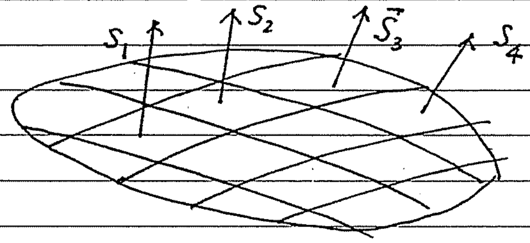


S_z 是該面積在 XY 面上之投影

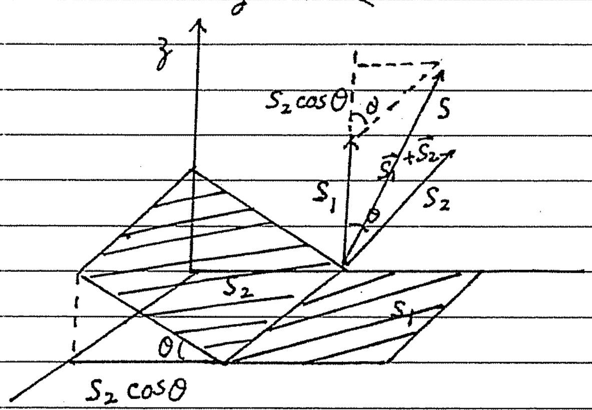
$= S\cos\theta$ 　　 $S\cos\theta$

若表面並非一平面則可將表面分割成很多小平面, 並且定義該表面面積向量 $\vec{S}$ 為各小平面面積向量之和

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \cdots = \sum \vec{S}_i$$



S_z 仍是該表面在 XY 面之投影

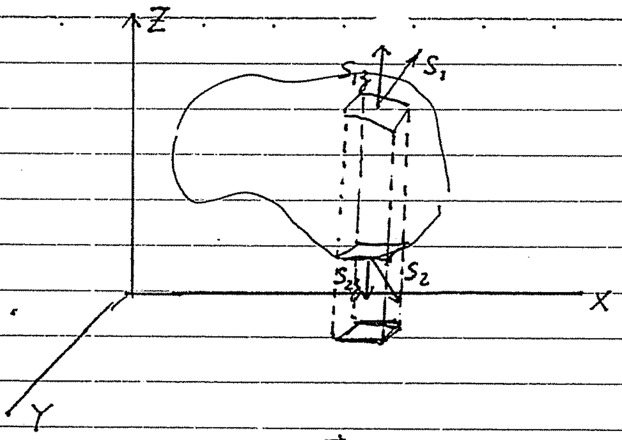


$S_z = S_1 + S_2 \cos\theta$

面積在 XY 平面之投影

分類：	
編號：	
總號：	

封閉面



$\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ 在 XY 平面上之投影大小相同方向相反

$S_{1z} = -S_{2z}$

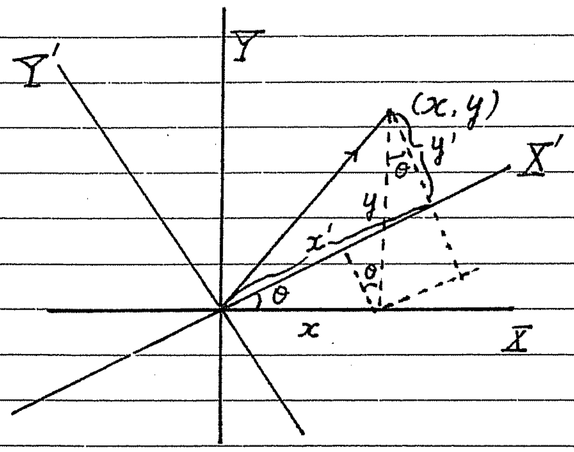
$\Rightarrow \sum S_{iz} = S_z = 0$

同理 $S_x = 0$, $S_y = 0$

$\Rightarrow \vec{S} = 0$

純量及向量之定義；純量積

我們以二度空間之向量來說明。此節之結果可自然地推廣至三度空間



若一點 P 在 XY 座標系統中為 (x, y)，則它在 X'Y' 座標系統中為 (x', y')

X'Y' 系統是由 XY 轉動 θ 角所得

則由上圖中可知

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

若 (V_x, V_y) 在以上座標轉換中滿足

$$V_x' = V_x\cos\theta + V_y\sin\theta$$
$$V_y' = -V_x\sin\theta + V_y\cos\theta$$

則 $\vec{V} = (V_x, V_y)$ 為一向量

若 A 在以上座標轉換中維持不變，則 A 為純量

定理：若 $\vec{A}, \vec{B}$ 為兩向量，則 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 為純量

證明：$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$

$$A_x' B_x' + A_y' B_y' = (A_x\cos\theta + A_y\sin\theta)(B_x\cos\theta + B_y\sin\theta) + (-A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)(-B_x\sin\theta + B_y\cos\theta)$$

$$= A_x B_x(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + A_y B_x(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) + A_x B_y(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) + A_y B_y(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= A_x B_x + A_y B_y$$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}$ 是純量

注意 $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = 1$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|\,|\vec{A}\times\vec{C}|\,\sin P = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

$|\vec{A}\times\vec{B}| \downarrow \sin r \downarrow$ 弧度

$\sin P \downarrow$ $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$ 間之夾角

弧 r 在 $\vec{A},\vec{B}$ 所形成之平面上　　弧 q 在 $\vec{A},\vec{C}$ 所形成之平面上

$$\Rightarrow \quad \sin r \ \sin q \ \sin P = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

同理

$$\sin p \ \sin r \ \sin Q = \vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$$

$$\sin q \ \sin p \ \sin R = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad \sin r \sin q \sin P = \sin p \sin r \sin Q = \sin q \sin p \sin R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

分類：
編號：
總號：

應用：

1. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ 與 $\vec{A}$ 垂直（兩邊與 $\vec{A}$ 作純量積）
   (i) 將公式兩邊之分點算出來比較，即可得證
   (ii) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$ 與 $\vec{C}$ 垂直
   (iii) 注意 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

2. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

3. 若 P, Q, R 是三個不在一直線上的點，其位置向量分別為 $\vec{a}, \vec{b}, c$，
   則 $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$ 與 P, Q, R 所成之平面垂直

   設 $\vec{r}$ 是 P, Q, R 所形成平面上一點
   $\vec{r}-\vec{a}$ ，$\vec{b}-\vec{a}$，$\vec{c}-\vec{a}$ 均在 P, Q, R 所形成之平面上
   因此 $(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = 0$
   $\Rightarrow (\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}) = 0$
   $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$ 與 P, Q, R 所形成的平面上任一向量垂直
   $\downarrow$
   與 P, Q, R 所形成的平面垂直

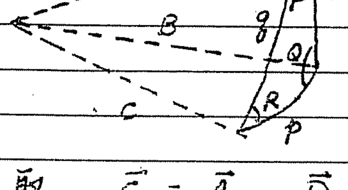
4. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量 $(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \neq 0)$ 與 $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ 稱為互反向量系統，若 $\vec{a}\cdot\vec{a}' = \vec{b}\cdot\vec{b}' = \vec{c}\cdot\vec{c}' = 1$
   $\vec{a}'\cdot\vec{b} = \vec{a}'\cdot\vec{c} = \vec{b}'\cdot\vec{a} = \vec{b}'\cdot\vec{c} = \vec{c}'\cdot\vec{a} = \vec{c}'\cdot\vec{b} = 0$

   (i) 解： $\vec{a}' = \dfrac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$ ，$\vec{b}' = \dfrac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$ ，$\vec{c}' = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$

   (ii) $\vec{a}'\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}') = \dfrac{1}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$

   (iii) 任一向量可寫為
   $\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{a}')\vec{a} + (\vec{r}\cdot\vec{b}')\vec{b} + (\vec{r}\cdot\vec{c}')\vec{c}$
   $\downarrow$
   書上之習題

5.



單位半徑 $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = R = 1$

$\vec{A}\times\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})$
$= \vec{B}(\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})) - \vec{A}(\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D}))$

取 $\vec{C} = \vec{A}$，$\vec{D} = \vec{C}$ $\Rightarrow$ $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})\vec{A}$

分類：
編號：
總號：

Want to show $\vec{A}\times\vec{B}$ transforms as a vector under rotation

我們在此證明 $\vec{A}\times\vec{B}$ 有向量轉換之性質

$$A_x' = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta$$
$$A_y' = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \qquad \text{rotation by angle } \theta \text{ around } z \text{ axis}$$
$$A_z' = A_z$$

$$B_x' = B_x\cos\theta + B_y\sin\theta$$
$$B_y' = -B_x\sin\theta + B_y\cos\theta$$
$$B_z' = B_z$$

$$(\vec{A}'\times\vec{B}')_x = A_y' B_z' - A_z' B_y'$$
$$= (-A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)B_z - A_z(-B_x\sin\theta + B_y\cos\theta)$$
$$= \underbrace{(A_yB_z - A_zB_y)}_{(\vec{A}\times\vec{B})_x}\cos\theta + \underbrace{(A_zB_x - A_xB_z)}_{(\vec{A}\times\vec{B})_y}\sin\theta$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_x\cos\theta + (\vec{A}\times\vec{B})_y\sin\theta$$

it has the required transformation property

因此它有所需之轉換性質

One can easily show 同理可證

$$(\vec{A}'\times\vec{B}')_y = -(\vec{A}\times\vec{B})_x\sin\theta + (\vec{A}\times\vec{B})_y\cos\theta$$
$$(\vec{A}'\times\vec{B}')_z = (\vec{A}\times\vec{B})_z$$

分類：
編號：
總號：

$r\vec{A}$ $\quad r>0$ 方向與 $\vec{A}$ 相同，大小是 $\vec{A}$ 的 r 倍

$r<0$ 方向與 $\vec{A}$ 相同，大小是 $\vec{A}$ 的 $|r|$ 倍

$r=0$ 是零向量

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$m(\vec{A}\cdot\vec{B})$ 是兩個純量相乘

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= A_xB_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + A_yB_x\,\hat{j}\cdot\hat{i} + A_zB_x\,\hat{k}\cdot\hat{i}$$
$$+ A_yB_y\,\hat{i}\cdot\hat{j} + A_yB_y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + A_zB_y\,\hat{k}\cdot\hat{j}$$
$$+ A_zB_x\,\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

由此可證 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 是一純量

$\vec{A}$ 可用球座標

$$A_x = |\vec{A}|\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = |\vec{A}|\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = |\vec{A}|\cos\theta$$

地球上兩點間的距離

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\,[\,\underbrace{\sin\theta_A\cos\phi_A\sin\theta_B\cos\phi_B + \sin\theta_A\sin\phi_A\sin\theta_B\sin\phi_B}_{\sin\theta_A\sin\theta_B\cos(\phi_A-\phi_B)} + \cos\theta_A\cos\theta_B\,]$$

$|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ 均為 R

$$\cos\theta_{AB} = \sin\theta_A\cos\phi_A\sin\theta_B\cos\phi_B + \sin\theta_A\sin\phi_A\sin\theta_B\sin\phi_B + \cos\theta_A\cos\theta_B$$

距離 $= R\,\theta_{AB}$

θ_{AB} 以 radian（弧度）

$$A_z = |\vec{A}| \cos\theta_A \qquad (17)$$

$$|\vec{A}_x + \vec{A}_y| = |\vec{A}| \sin\theta_A$$

$$A_x = |\vec{A}_x + \vec{A}_y| \cos\phi_A = |\vec{A}| \sin\theta_A \cos\phi_A \qquad (18)$$

$$A_y = |\vec{A}_x + \vec{A}_y| \sin\phi_A = |\vec{A}| \sin\theta_A \sin\phi_A \qquad (19)$$

注意 (一) $|\vec{A}| \geq 0$ (二) $0 \leq \theta_A \leq \pi$ $A_z > 0$ 則 $\frac{\pi}{2} \geq \theta_A \geq 0$

$A_z < 0$ 則 $\pi \geq \theta_A \geq \frac{\pi}{2}$

(三) $0 \leq \phi_A \leq 2\pi$

零向量之定義是 $(0, 0, 0)$ (20)

若 $\vec{A}$ 之直角坐標為 (A_x, A_y, A_z)，$\vec{B}$ 之直角坐標為 (B_x, B_y, B_z)

則 $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$，$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

因此 $\vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad (21)$$

(此處我們用了對易及締合律)

而其直角坐標為 $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

由此一結果及零向量之直角坐標為 $(0, 0, 0)$，我們可知 $-\vec{A}$ 之直角坐標為 $(-A_x, -A_y, -A_z)$

由第 式中，我們可看 $A_x \to -A_x$，$A_y \to -A_y$，$A_z \to -A_z$

之轉換要求 $|-\vec{A}| = |\vec{A}|$，$A_z \to -A_z$ 要求 $\cos\theta_{-A} = -\cos\theta_A$

而 $0 \leq \theta_A, \theta_{-A} \leq \pi$，因此 $\theta_{-A} = \pi - \theta_A$，~~因此~~ 而 $A_x \to -A_x$，$A_y \to -A_y$

現在是等於要求 $\sin\phi_{-A} = -\sin\phi_A$，$\cos\phi_{-A} = -\cos\phi_A$，因此 $\phi_{-A} = \pi + \phi_A$

所以 $-\vec{A}$ 之角坐標為 $(|\vec{A}|, \pi - \theta_A, \pi + \phi_A)$ (22)

$$r\vec{A} = (rA_x, rA_y, rA_z) \tag{23}$$

若 $\vec{V_1} = (V_{1x}, V_{1y}, V_{1z})$, $\vec{V_2} = (V_{2x}, V_{2y}, V_{2z})$ … $\vec{V_i} = (V_{ix}, V_{iy}, V_{iz})$ … $\vec{V_n} = (V_{nx}, V_{ny}, V_{nz})$

則利用以上之結果我們可得

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \text{ 之直角坐標為 } \left(\sum_{i=1}^{n} V_{ix}, \sum_{i=1}^{n} V_{iy}, \sum_{i=1}^{n} V_{iz}\right) \tag{24}$$

注意 (一)角坐標之兩個坐標之單位不同，而且 $\vec{A}+\vec{B}$ 之角坐標 $(|\vec{A}+\vec{B}|, \theta_{A+B}, \phi_{A+B})$ 也不是 $(|\vec{A}|+|\vec{B}|, \theta_A+\theta_B, \phi_A+\phi_B)$ 但是在討論一些有圓對稱之問題時，角坐標卻非常有用)

(二) 當三度空間之向量局限於 $z=0$ 之平面時，其直角坐標變成 $(A_x, A_y, 0)$ ，而其角坐標變成 $(|\vec{A}|, \pi/2, \phi_A)$ 而且

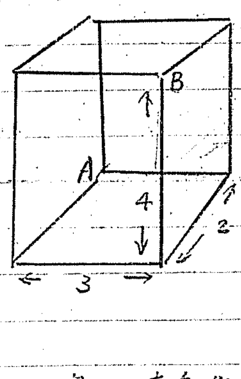
$$A_x = |\vec{A}| \cos\phi_A \qquad A_y = |\vec{A}| \sin\phi_A$$

此結果與二度空間向量時之結果相同

5. 習題

(1) 一個人向西南走了四公里，然後向東走了四公里，最後又向西北走了六公里。取向東之方向為 x 軸向北之方向為 y 軸。
(a) 將這些位移用 $\hat{i}$ 及 $\hat{j}$ 單位向量表出 (B)
(b) 將位移和寫成向量之形態 (E)
(c) 求位移和之大小 (L)
(d) 求位移和之方向 (Q)

(2) 一個房子之長度為 3米 寬度為 2米，高為 4米



有一飛虫由 A 飛抵 B 點
(a) 其所作之位移大小為何？ (A)
(b) 此大小是否 A B 間之最短之距離？ (F)
(c) 將此位移寫成向量之形態 (M)

(3) $\vec{R}$ 向量之直角坐標為 $(2, 5, -3)$ ， $\vec{S}$ 向量之直角坐標為 $(2, -5, 0)$

分類：	
編號：	7
總號：	

(a) 求 $\vec{R}$ 及 $\vec{S}$ 之角坐標 (C)

(b) 求 $-\vec{R}$ 之直角及角坐標 (G)

(c) 求 $\vec{R}+\vec{S}$ 之直角及角坐標 (K)

(d) 求 $\vec{R}-\vec{S}$ 之直角及角坐標 (N)

(e) 求 $3\vec{S}$ 之直角坐標 (H)

(f) 求 $3\vec{R}-2\vec{S}$ 之直角坐標 (O)

(4) $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ 是三個向量在何種情況下，它們能滿足下列之公式

(a) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$，同時 $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$ (D)

(b) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$ (I)

(c) $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$ (P)

(d) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$，同時 $|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{C}|$ (J)

6. 答案

(A) $\sqrt{29}$ 米 (B) $-2\sqrt{2}\,\hat{i}-2\sqrt{2}\,\hat{j}$； $5\hat{i}$，$-3\sqrt{2}\,\hat{i}+3\sqrt{2}\,\hat{j}$

(C) $\vec{R}$ 之角坐標為 ($\sqrt{38}$，$\cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{38}}$ θ_R (在第二項限)，$\tan^{-1}$ 負 $\frac{5}{2}$ (第一項限)
$\vec{S}$ 〃〃〃〃〃 ($\sqrt{29}$，$90°$，$\tan^{-1}\frac{-5}{2}$ (第四項限)

(D) $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 平行 (E) $-5(\sqrt{2}-1)\hat{i}+\sqrt{2}\,\hat{j}$，(F) 是，(G) $-\vec{R}$ 之直角坐標為 $(-2, -5, +3)$，角坐標為 $(\sqrt{38}, \pi-\theta_R, \pi+\phi_R)$

(H) $(6, 15, -3)$，(I) $\vec{B}=\vec{0}$ (J) $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ 同時 $\vec{A}$，$\vec{B}$ 之夾角為 $120°$ $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ 是等邊三角形之三邊 (K) $(4, 0, -3)$，$(5, \cos^{-1}[\frac{-3}{5}]$ (第二項限，$0°$) (L) 2.51 (M) $3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ (取 A 為原點)

(N) $(0, 10, -3)$ (O) $2\hat{i}+25\hat{j}-9\hat{k}$ (P) $\vec{A}$，$\vec{B}$ 之夾角為 $90°$

(Q) 與 x 軸成 $145°36'$ 角

7. 其他有關問題

(1) 在習題(2)中若該飛蟲失去飛行之能力而只能沿牆，地板或天花板爬行此時它由A至B所走之最短距離為何？

(2) 利用向量之方法來證明下列三角等式

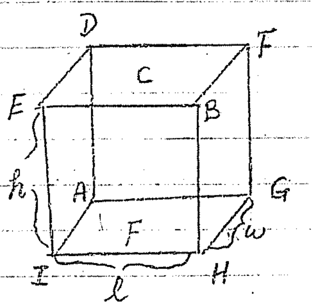
(a) $\sum_{n=0}^{N} \cos \frac{2\pi n}{N} = 1$

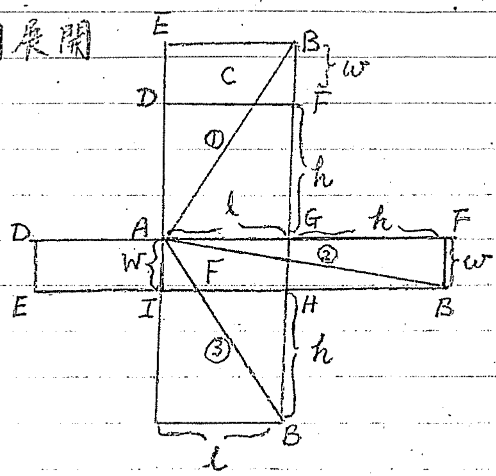
(b) $\sum_{n=0}^{N} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0$

8. 解答

(1) 這一題是提供給我們一些我們對三度空間的了解.（工學院的學生在投影幾何中會遭遇到此類問題）

我們首先將此房間展開





得右圖*，現在我們來比較由A至B之三條直線之距離

① $[l^2 + (h+w)^2]^{1/2} = [3^2 + (2+4)^2]^{1/2}$米 $= [9+36]^{1/2}$米 $= 3\sqrt{5}$米

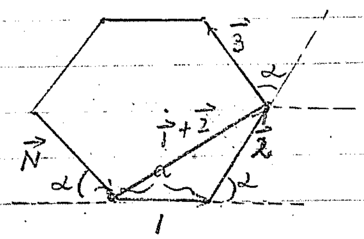
② $[(l+h)^2 + w^2]^{1/2} = [(3+4)^2 + 2^2]^{1/2}$米 $= [49+4]^{1/2}$米 $= \sqrt{53}$米

③ $[l^2 + (h+w)^2]^{1/2} = 3\sqrt{5}$米

所以其最短距離為①或③線，一不能飛行之蟲由A至B所爬行之最短距離為$3\sqrt{5}$米

* 此圖畫得不好，需重畫
可用鞋子之紙盒拆開來解說

(2) 利用向量之方法來證這些三角公式，我們首先討論下列簡單之幾何問題



我們先來討論 $\vec{N}$ 邊之正多角形

(圖左，我們以正六邊形為例)

若是我們將每邊加上一箭頭，則每邊可看成一個向量。由向量相加之定義可知 $\vec{1}+\vec{2}$ 是如圖所示。同時，很顯然的

$$\vec{1}+\vec{2}+\cdots \vec{N}=\vec{0} \qquad (23)$$

若是我們取 $\vec{1}$ 為 x 軸，則第 i 個向量與 x 軸之交角由上圖很容易的可看出應為 $(i-1)\alpha$。此處 α 是 $\vec{1}$ 與 $\vec{2}$ 之夾角* (由對稱性，我們可看出 $\vec{i}$ 與 $\overrightarrow{i-1}$ 均應為 α)。同時 $N\alpha=2\pi^{**}$ 所以 $\alpha=\frac{2\pi}{N}$

用兩度空間之直角坐標，第 i 個向量可用 $\left(a\cos\frac{(i-1)2\pi}{N}, a\sin\frac{(i-1)2\pi}{N}\right)$

此處 a 為正多邊形之邊長。$\vec{0}=(0,0)$

第(23)式現在可寫成 $\sum_{i=1}^{N} a\cos\frac{(i-1)2\pi}{N}=0$，$\sum_{i=1}^{N} a\sin\frac{(i-1)2\pi}{N}=0$ (24)

令 $i=n+1$，此式可寫成 $\sum_{n=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi n}{N}=0$ 及 $\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{2\pi n}{N}=0$ (25)

因此 $\sum_{n=0}^{N}\cos\frac{2\pi n}{N}=\cos\frac{2\pi N}{N}+\sum_{n=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi n}{N}=1$ (26)

$$\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{2\pi n}{N}=\sin\frac{2\pi N}{N}+\sum_{n=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi n}{N}=0$$

** $\vec{1}$ 與 $\vec{N}$ 之夾角為 $2\pi-\alpha$

因此 $(N-1)\alpha=2\pi-\alpha$，也即是說 $N\alpha=2\pi$。

在討論繞射現象時將利用解此題所用的技巧

分類:	
編號:	
總號:	

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{C} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{B}$

Magnitudes must be equal.

$$AC \sin\theta_{AC} = AB \sin\theta_{AB} = CB \sin\theta_{CB}$$

$$\frac{\sin\theta_{AC}}{B} = \frac{\sin\theta_{AB}}{C} = \frac{\sin\theta_{CB}}{A}$$

正弦定理

方向餘弦

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

平面，直線

點與直線之距離　　三度空間

點與面之距離

面積的向量表象

向量之微分