

第四章 相對運動

簡介 考慮兩個觀察者及一個物體，兩個觀察者各選擇一坐標系統來描述

此一物體之運動，在此章中將討論在兩個不同坐標系統中描述此物體之

運動量間之關係。當然此結果與兩坐標系統之原點及其坐標間之關係有關

在第一節中我們將討論兩個坐標系統中坐標方向不變只是原點之間有

相對運動之特殊情形，在第二節中我們將討論兩坐標系統之坐標為等速

轉動之特殊情形。若兩觀察者及此物體間之相對運動中任一速度趨近於光

速時，則我們必須考慮相對論之效應，此一問題將留到以後討論

第一節 相對直線運動

1. 簡介 在此節中我們將討論兩個觀察者作相對運動之特殊情況

2. 基本觀念 我們首先將介紹一些符號，小心地運用這些符號將有助於了

解此節內要討論之觀念

$\vec{r}_{Ao}(t)$ 代表由 O 點至 A 點之向量也即是物體 A 在觀察者 O 為原點之坐

標系統中之位置向量，它是時間 t 之函數

$\vec{r}_{Ao'}(t)$ 代表由 O' 點至 A 點之向量也即是物體 A 在觀察者 O' 為原點之坐

標系統中之位置向量，它是時間 t 之函數

$\vec{r}_{O'o}(t)$ 代表由 O 點至 O' 點之向量也即是觀察者 O' 在觀察者 O 為原點之

坐標系統中之位置向量，它也是時間之函數

由向量之定義中，我們可得基本公式

$$\vec{r}_{Ao}(t) = \vec{r}_{Ao'}(t) + \vec{r}_{O'o}(t) \quad (1)$$

其次我們將以觀察者 O 為原點取單位向量 $\hat{i}$ 及 $\hat{j}$ 定一坐標系統 S

此處我們假設 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 均非時間之函數。在此坐標系統中 $\vec{r}_{Ao}, \vec{r}_{o'o}(t)$

可寫成

$$\vec{r}_{Ao}(t) = x_{Ao}(t) \hat{i} + y_{Ao}(t) \hat{j} + z_{Ao}(t) \hat{k} \quad (2)$$

$$\text{及 } \vec{r}_{o'o}(t) = x_{o'o}(t) \hat{i} + y_{o'o}(t) \hat{j} + z_{o'o}(t) \hat{k} \quad (3)$$

同樣的我們可以取觀察者 O' 為原點，單位向量 $\hat{i}', \hat{j}'$ 及 $\hat{k}'$ 是坐標系統 S'

$$\vec{r}_{Ao'}(t) = x_{Ao'}(t) \hat{i}' + y_{Ao'}(t) \hat{j}' + z_{Ao'}(t) \hat{k}' \quad (4)$$

要想找出在這兩不同坐標中物理量間之關係我們必須了解 (i) $\vec{r}_{o'o}(t)$

(ii) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 及 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 間之關係⁽²⁾⁽³⁾ 現在我們考慮最簡單之情況

也即是 $\hat{i} = \hat{i}', \hat{j} = \hat{j}', \hat{k} = \hat{k}'$ ，則方程式 (1) 可寫成

$$x_{Ao'}(t) = x_{Ao}(t) + x_{o'o}(t)$$

$$y_{Ao'}(t) = y_{Ao}(t) + y_{o'o}(t)$$

$$z_{Ao'}(t) = z_{Ao}(t) + z_{o'o}(t) \quad (5)$$

將上式對 t 微分並寫成向量形式，可得

$$\vec{v}_{Ao'}(t) = \vec{v}_{Ao}(t) + \vec{v}_{o'o}(t) \quad (6)$$

將此式對 t 再微分可得

$$\vec{a}_{Ao'}(t) = \vec{a}_{Ao}(t) + \vec{a}_{o'o}(t) \quad (4) \quad (7)$$

3. 討論

(1) 由向量之定義可得

$$\vec{r}_{o'o}(t) = -\vec{r}_{o'o'}(t)$$

因此公式可寫成

$$\vec{r}_{Ao}(t) = \vec{r}_{Ao'}(t) + \vec{r}_{o'o'}(t)$$

(2) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 及 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 間之關係可寫成

$$\hat{i}' = a_{11}\hat{i} + a_{12}\hat{j} + a_{13}\hat{k}$$

$$\hat{j}' = a_{21}\hat{i} + a_{22}\hat{j} + a_{23}\hat{k}$$

$$\hat{k}' = a_{31}\hat{i} + a_{32}\hat{j} + a_{33}\hat{k}$$

a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) 可以是時間之函數。例如在下節中 S' 坐標系統對 S 坐標作等速轉動時 a_{ij} 即為時間之函數

(3) 在 S 及 S' 系統中之時間 t 及 t' 可以不同。在特殊相對論中 $t \neq t'$

我們在此章中不討論相對論效應故 $t = t'$

(4) 當兩觀察者間之運動為等速運動時 $\vec{V}_{0'0}$ 為一固定向量而非時間之函數。因此 $\vec{a}_{0'0}(t) = 0$ 。在此特殊下，在 S 及 S' 坐標系統中之加速度相同。此種坐標系統之轉換稱為伽里略轉換。

3. 應用

若一物體 A 在坐標系統 S 中其位置向量之時間變化為

$$\vec{r}_{A0} = 5t^2 \hat{i} \frac{\text{km}}{\text{sec}^2} + 8 \hat{j} \text{ km}$$

同一物體在坐標系統 S' 中其位置向量之時間變化為

$$\vec{r}_{A0'} = 7t^2 \hat{i} \frac{\text{km}}{\text{sec}^2} - 3t^{-1} \hat{k} \text{ km sec}$$

則由公式 (1) 中可解得

$$\vec{r}_{0'0}(t) = 2t^2 \hat{i} \text{ km/sec}^2 - 8 \hat{j} \text{ km} - 3t^{-1} \hat{k} \text{ km sec}$$

兩坐標系統間之相對速度

$$\vec{V}_{0'0}(t) = 4t \hat{i} \frac{\text{km}}{\text{sec}^2} + 3t^{-2} \hat{j} \text{ km sec}$$

兩坐標系統間之相對加速度為

$$\vec{a}_{0'0}(t) = 4 \hat{i} \frac{\text{km}}{\text{sec}^2} - 6t^{-3} \hat{j} \text{ km sec}$$

4. 習題

1. 若一飛機駕駛員將它的飛機對準以每小時 120 公里的速度(此速度是對空氣而言)向正西飛行. 若有一東北風以每小時 40 公里的速度吹動. 問兩小時此一飛機離正西方向之距離為何? [E]

2. 若一汽船在靜水中之速率為 5 米/秒. 我們欲以此船渡過寬 2400 米之河流. 其流速為每秒 3 米/秒

(i) 若此船欲抵正對岸, 其方向應為何? [F]

(ii) 過河所需之時間為何? [K]

(iii) 若欲順流向下行 2400 米, 然後再逆流回至出發點, 其所需之時間為何?

[B]

(iv) 若欲以最短之時間過河, 船行之方向應為何? [C] 其所需之時間又為何? [H]

3. 若物體 A 在坐標系統 S 中之位置向量為

$$\vec{r}_{Ao} = (6t^2 \text{ m/sec}^2 - 4t \text{ m/sec}) \hat{i} + (-3t^3 \text{ m/sec}^3) \hat{j} + 3m \hat{k}$$

在坐標系統 S' 中之位置向量為

$$\vec{r}_{Ao'} = (6t^2 \text{ m/sec}^2 + 3t \text{ m/sec}) \hat{i} + (-3t^3 \text{ m/sec}^3) \hat{j} + 3m \hat{k}$$

(i) 何時此兩坐標重疊? [D]

(ii) 求 $\vec{v}_{o'o}$ [J]

(iii) 求在 $t = 3$ 秒時 O 及 O' 之距離為何? [I]

(iv) 求在 $t = 3$ 秒時 $\vec{r}_{Ao}$ 及 $\vec{r}_{Ao'}$ 間之夾角 [L]

4. 飛向柏林的飛機必須在一極窄的空中航道上飛行. 在靜空中

分類：

編號： 5

總號：

飛機之速率為每小時 240 公里 現在由廣播中得知有每小時 40 公里之風

但卻沒有提及風之方向 駕駛員發現經過適當調整後他仍能以在靜空中

之速度沿看空中航道飛行

(1) 求風向與空中航道間之夾角 [G]

(2) 求航向與空中航道間之夾角 [A]

5. 答案

[A] 12°

[B] 25 分鐘

[C] 與河岸成 90°

[D] $t=0$ 時

[E] 56.6 公里

[F] 與順流方向成 127° 角

[G] 82°

[H] 8 分鐘

[I] 21 米

[J] $(-7 \text{ m/sec})?$

[K] 10 分鐘

[L] 10.46°

第2節 均勻相對轉動運動

1. 簡介：討論兩個坐標系統作均勻相對轉動之特殊情形

2. 基本觀念：設 S 及 S' 為兩個坐標系統，其原點 O 及 O' 位於一點。在 S 坐標中其坐標單位向量 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 不為時間之函數， S' 中 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 則對一固定方向 $\vec{\omega}$ 為軸作等速轉動，其角速度之大小為 $|\vec{\omega}|$ 。一物體 A 之位置向量在 S 坐標系統中可寫成

$$\vec{r}_{Ao}(t) = x_{Ao}(t) \hat{i} + y_{Ao}(t) \hat{j} + z_{Ao}(t) \hat{k} \quad (1)$$

上式中 $x_{Ao}(t), y_{Ao}(t), z_{Ao}(t)$ 均為時間之函數，但是 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 却不是時間之函數。令 $\vec{r} = (x_{Ao}(t)=x, y_{Ao}(t)=y, z_{Ao}(t)=z)$

物體 A 在 S' 坐標系統中之位置向量可寫成

$$\vec{r}_{Ao'}(t) = x_{Ao'}(t) \hat{i}' + y_{Ao'}(t) \hat{j}' + z_{Ao'}(t) \hat{k}' \quad (2)$$

上式中 $x_{Ao'}(t), y_{Ao'}(t), z_{Ao'}(t)$ 及 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 均為時間之函數

令 $\vec{r}'(t) = (x_{Ao'}(t)=x', y_{Ao'}(t)=y', z_{Ao'}(t)=z')$ 是 A 在 S' 系統中之位置向量⁽¹⁾

將 (1) 及 (2) 式對 t 微分，吾人得

$$\frac{d\vec{r}_{Ao}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = \vec{v} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{Ao'}}{dt} &= \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}' \\ &\quad \text{在 } S' \text{ 系統中隨 } \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}' \text{ 轉動座標中所見之速度} \\ &\quad + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} \\ &\quad \text{由於座標隨時間變化而引起之結果} \end{aligned}$$

$\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 對一方向 $\vec{\omega}$ 作等速轉動，其角速度為 $|\vec{\omega}|$ ，則^{(2), (3)}

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' \quad (4)$$

因此 $\frac{d\vec{r}_{Ao'}}{dt} = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}' + x' \vec{\omega} \times \hat{i}' + y' \vec{\omega} \times \hat{j}' + z' \vec{\omega} \times \hat{k}'$

$$+ j' \vec{\omega} \times j' \quad (5)$$

$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}'$ 是物體在 S' 坐標系統中之速度

$$\frac{d\vec{r}_{Ao'}}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ao'} \quad (6)$$

由上節中我們得知當 O 与 O' 位於一異時 $\vec{r}_{Ao} = \vec{r}_{Ao'} \quad (\vec{r} = \vec{r}')$

$$\text{因此} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ao} \quad (7)$$

此式代表在兩個坐標系統中所觀察之速度間之關係

將 (7) 式再對時間上微分可得

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (8)$$

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}' \quad (9)$$

將第 (9) 式微分可得

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{k}' \\ &\quad + \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\hat{k}'}{dt} \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (10)$$

此式中 $\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{k}'$ 為此物體在 S' 坐標系統中所觀察之加速度

將第 (8) 及 第 (10) 式合併可得

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (11)$$

將上式為第 (7) 式合併可得⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (12)$$

此式表示出在兩個不同坐標系統中所觀察之加速度間之關係

第(12)式可改寫成

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (13)$$

$-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 稱為離心加速度, $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ 稱為克勞雷加速度 (6), (7)

3. 討論:

(1) 在此節中必需小心了解每一項之物理意義 同時必需了解每一物理

量到底是在那一個坐標系統所量度的 $\vec{r}'(t) = x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}'$

$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ $\vec{r}'(t)$ 是在時間 t 時由 O' 莫至物體 A

之向量 $\vec{r}(t)$ 是在時間 t 時由 O 莫至物體 A 之向量 因為 O 莫為

O' 莫為同一莫, 所以 $\vec{r}(t) \neq \vec{r}'(t)$ 但是由於 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 通常為 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

不同所以 x', y', z' 及 x, y, z 通常也不相同 要想找出 x, y, z

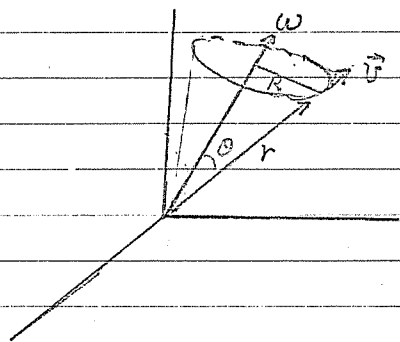
與 x', y', z' 間之關係必須首先找出 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 與 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 間之關係

(2) $\vec{\omega}$ 是一固定向量與時間無關, 通常是將它寫在 S 坐標系統中, 在

此系統中其分量 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 均不是時間之函數

(3) 任一通過原莫之向量以原莫為軸心對一固定方向 $\vec{\omega}$ 以等加速度 $k\omega$

轉動則其頂莫之速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



此莫之軌跡位於一 $\perp$ 於 $\vec{\omega}$ 方向之平面上

因此 $\vec{v} \perp \vec{\omega}$

因為此一向量之大小不變

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0 \Rightarrow 2\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = 0 \text{ 或是 } \vec{r} \cdot \vec{v} = 0, |\vec{r}| \neq 0 \text{ (後則)}$$

以上之各式顯然不需要證明 所以 $\vec{r}$ 必須垂直於 $\vec{v}$

所以 $\vec{v}$ 垂直於 $\vec{\omega}$ 及 $\vec{r}$ ，因此 $\vec{v}$ 之方向是平行或反平行於 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 。

我們採用右手定則，由圖中我們可看出 $\vec{v}$ 是平行於 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 。

因為其角速度為 $|\vec{\omega}|$ 所以在 Δt 時間內所行之距離為 $R\omega \Delta t$ 。

此處 $R = |\vec{r}| \sin \theta$ ， θ 為 $\vec{\omega}$ 及 $\vec{r}$ 間之夾角，所以 $|\vec{v}| = R\omega$

$$= |\vec{r}| |\vec{\omega}| \sin \theta = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

所以 $\vec{v}$ 為 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 之方向力大小均相同，因此 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

以上之公式是對任何經原點對 $\vec{\omega}$ 方向作等角速度 $|\vec{\omega}|$ 轉動之向量均成立。

主 $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ 也屬此類向量，應用以上公式得

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}', \quad \text{及} \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

(4) 注意這是一向量公式。 $\vec{v}'$ 是在 S' 坐標系統中之速度向量。

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$ 。若 $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ 均以單位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表出，則

由上式中得來的 $\vec{v}'$ 也是 $\vec{v}'$ 向量以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表出。若要以 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ 表出，而求得 $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ 則必須找出 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 及 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$

間之關係。

(5) 注意第 (12), (13) 式均為向量公式。

(6) 離心加速度及克勞雷加速度均是由觀察者間之轉動運動而產生。

而非由任何外力加於此粒子上所引起之加速度。因此有些書上

用離心力或克勞雷力這些名詞嚴格來說並非正確。我們將避免

這些名詞。

(7) 當 $\vec{v}' = 0$ 或 $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$ 時，克勞雷加速度不存在；當 $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$

時離心加速度不存在。

分類:

編號: 5

總號:

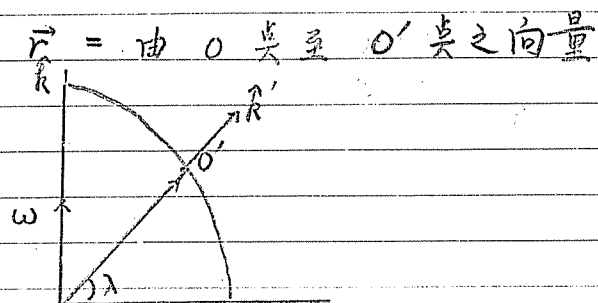
4. 應用

在此節中最重要的應用是將地球轉動的效應考慮進去。此處我們嚴格的來說有三個坐標系統 S , S' 及 S'' 。 S 坐標系統位於地球之質心 O 。坐標之單位向量 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 是固定的向量不是時間之函數, S' 坐標系統之原點是地球表面之一點 O' , 其單位坐標向量 $\hat{k}'$ 是沿 $\overrightarrow{OO'}$ 方向, $\hat{i}'$ 是沿北的方向, $\hat{j}'$ 是向西之方向, 由於地球自轉的關係 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 是時間之函數。 S'' 坐標系統之原點位於地心 O , 而其單位坐標向量 $\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''$ 有 $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 相同。由第一節中之結果得知 $\vec{v}' = \vec{v}''$ 及 $\vec{a}' = \vec{a}''$ 所以當我們討論加速度時 S', S'' 坐標系統結果相同。 S, S'' 兩坐標系統則原點位於同一點只是兩個坐標系統間之等角速度轉動, 因此可直接利用此節之結果。

在 S 坐標系統中我們取地心 O 及北極之方向為 z 軸。因為地球是

繞此軸以角速度 $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \text{ rad/sec} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$

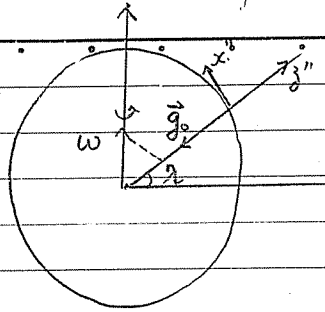
轉動因此 $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$



$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

此處未加'的物量是在 S 坐標系統中所量度加'的則是在 S' 坐標系統所量度者

取 S'' 坐標系統中之坐標系統如下



$\hat{r}''$ 是沿地心至地面之向量

取地心至北極之向量位於 x'', z'' 平面上

則 $\hat{i}''$ 可取指向北極, 用右手定則 $\hat{j}''$ 是指向西方

$$\hat{i}' = \hat{i}'', \quad \hat{j}' = \hat{j}'', \quad \hat{k}' = \hat{k}'', \quad \vec{\omega} = \omega \cos \lambda \hat{i}' + \omega \sin \lambda \hat{k}' \quad \lambda = \text{緯度}$$

離心加速度 $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = -r \omega \cos \lambda \hat{j}'$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda \hat{i}' + (-\omega^2 r \cos^2 \lambda) \hat{k}'$$

$$\vec{a}' = -\tilde{g}_0 \hat{k}' - [\omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda] \hat{i}' + \omega^2 r \cos^2 \lambda \hat{k}'$$

↳ 在隨地球轉動坐標中測得之加速度

在 S 坐標系統中 $\vec{a} = -g_0 \hat{r}$ $\hat{r}$ 是沿地心至地面之向量

$$\vec{a}' = -(g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda) \hat{k}' - \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda \hat{i}'$$

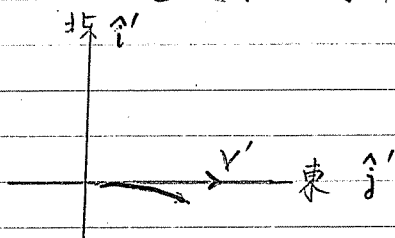
克勞雷加速度 $-2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$

與在物體在 S' 坐標系統之速度有關

若一河流在北半球向東流則在 S' 坐標系統中 $\vec{v}' = -v' \hat{j}'$

$$\text{則 } -2(\vec{\omega} \times \vec{v}') = -v' \omega \sin \lambda \hat{i}' + \omega v' \cos \lambda \hat{k}'$$

因此克勞雷加速度有一向南之分向量



所以在北半球向東流之河流其右岸所受之侵蝕會比其左岸所受之侵蝕為烈

分類：

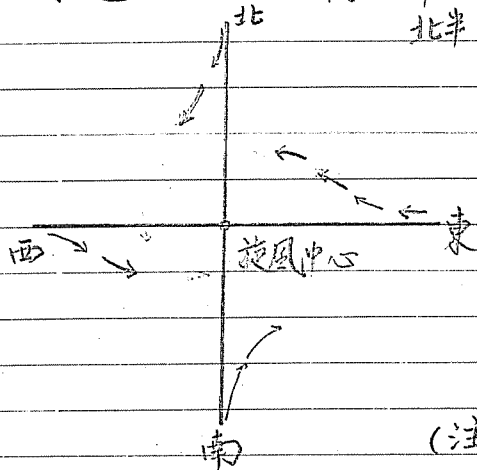
編號： 7

總號：

在北半球中若一物體之方向為向東進行則其克勞雷加速度有沿南之分向量

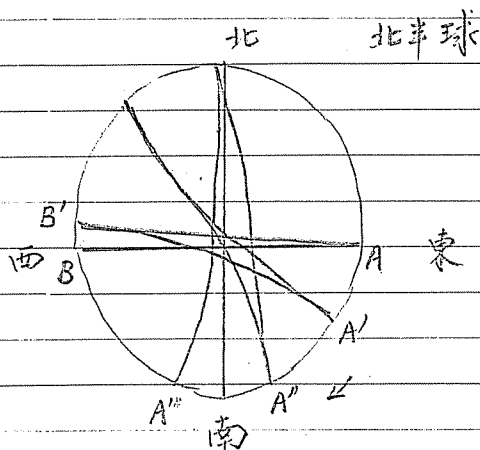
有沿東之分向量

所以當風趨向於一低氣壓中心時會反時鐘旋轉如下圖所示



(注意，在每一處均有一向旋風中心之加速度
此一加速度恒大於克勞雷加速度)

佛肖單擺



由 A 處向西出發由於克勞雷加速度

有沿北之分量擺在完成一次擺動

將不會到達 B 處反而到達 B' 處

而由 B' 回來時則到達 A' 處，

以此類推，在 1851 年佛肖用 67 米

長的單擺證實了此現象他發現 A 處沿反時鐘方向每小時轉 $11^{\circ}15'$

同時此一實驗也證實了地球的自轉

4. 習題

1. 一粒子在北緯 45° 以對地球 500 米/秒之速度向南進行

(a) 求其離心加速度 (c)

(b) 求其克勞雷加速度 (b)

2. 一物體在北緯 41° 由 200 米高度自由下落，求其落點其向地心方面。

之距離為何？ (A)

5. 答案

(A) 東方 3.27 厘米處 (B) $5.15 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$ 向西

(C) $-1.67 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2 \hat{i}' + 1.67 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2 \hat{k}'$

6. 例題

在北半球緯度 λ° 處以 v_0 之速度向上拋出一物體，求當該物體落回地面時其位置向西移動了多少？

若向上拋時之速度為 V' 則其克勞雷加速度為

$$-2\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

$$= -2 \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ \omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & V' \end{vmatrix}$$

$$= 2\omega V' \cos \lambda \hat{j}' \quad \text{向西之加速度}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = 2\omega V' \cos \lambda$$

V' 是沿 $\hat{j}'$ 軸之速度，它滿足之公式為

$$V' = v_0 - gt$$

$$\text{因此} \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = 2\omega (v_0 - gt) \cos \lambda$$

$$\text{積分一次得} \quad \frac{dy'}{dt} = 2\omega (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2) \cos \lambda + C$$

在 $t=0$ 時只有沿 $\hat{j}'$ 軸之速度，因此 $t=0$ 時 $\frac{dy'}{dt} = 0$

將上兩式合併可得 $C=0$

$$\frac{dy'}{dt} = 2\omega (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2) \cos \lambda$$

將此式再積分一次，同時記住當 $t=0$ 時 $y=0$ ，可得

$$y' = 2\omega(\frac{1}{2}v_0 t^2 - \frac{1}{6}gt^3) \cos\lambda$$

當該物體到達最高點時其時間為 $t_0 = \frac{v_0}{g}$ (由 $v'=0$ 解出)

代入 y' 及 $\frac{dy'}{dt}$ 之公式, 可得當該物體抵達最高點時

$$y' = \frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \omega \cos\lambda \quad \checkmark$$

$$\frac{dy'}{dt} = 2\omega(v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{v_0}{g})^2) \cos\lambda = \omega \frac{v_0^2}{g} \cos\lambda \quad \checkmark$$

現在我們討論該物體之下落部分

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = 2\omega v' \cos\lambda$$

$$v' = -g(t-t_0)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega[g(t-t_0)] \cos\lambda$$

積分一次得

$$\frac{dy'}{dt} = -2\omega[\frac{1}{2}gt^2 - gt_0 t] \cos\lambda + C$$

$$\text{當 } t=t_0 = \frac{v_0}{g} \text{ 時 } \frac{dy'}{dt} = \omega \frac{v_0^2}{g} \cos\lambda$$

$$\text{因此 } \omega \frac{v_0^2}{g} \cos\lambda = + \omega g \frac{v_0^2}{g^2} \cos\lambda + C$$

$$\text{所以 } C=0$$

將 $\frac{dy'}{dt} = -2\omega[\frac{1}{2}gt^2 - gt_0 t] \cos\lambda$ 再積分一次

$$y' = -2\omega[\frac{1}{6}gt^3 - \frac{1}{2}gt_0 t^2] \cos\lambda + C'$$

$$\text{當 } t=t_0 = \frac{v_0}{g} \text{ 時 } y' = \frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \omega \cos\lambda$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \omega \cos\lambda = -2\omega[\frac{1}{6}g \frac{v_0^3}{g^3} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^3}{g^3}] \cos\lambda + C'$$

$$\text{由上可解得 } C'=0$$

$$y' = -2\omega[\frac{1}{6}gt^3 - \frac{1}{2}gt_0 t^2] \cos\lambda$$

$$\text{落地時 } t = \frac{2v_0}{g}$$

分類：

編號： 10

總號：

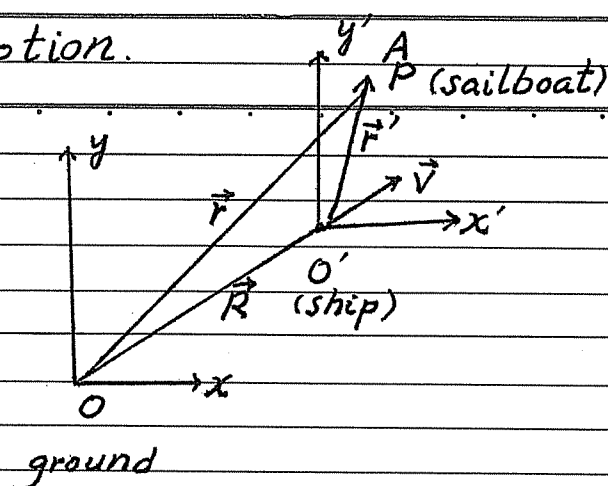
所以 $y' = -2\omega \left[\frac{1}{6}g \cdot \frac{8v_0^3}{g^3} - \frac{1}{2}g \frac{v_0}{g} \frac{4v_0^2}{g^2} \right] \cos\lambda$

$$= -2\omega \cos\lambda \cdot \frac{v_0^3}{g^2} \left[\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4-6}{3}} - 2 \right] = \frac{4}{3} \omega \cos\lambda \frac{v_0^3}{g^2}$$

因此當該物體落回地面位於其拋出處之西方 $\frac{4}{3} \omega \cos\lambda \frac{v_0^3}{g^2}$.

分類:
編號:
總號:

Relative Motion.



$\vec{r} \equiv$ position vector of sailboat relative to ground

$\vec{r}' \equiv$ position vector of sailboat relative to ship

$\vec{R} \equiv$ position vector of ship relative to ground

At any time t

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

↳ measured in the ship

$\vec{r}, \vec{r}', \vec{R}$ are time dependent

Non-relativistic

$$\vec{r}_{OA} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_{O'A}$$

This is the fundamental equation

O is taken as an origin
with $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ as units

S system

$$\vec{r}_{OA} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

分類:
編號:
總號:

Relative Motion

Motion is relative concept



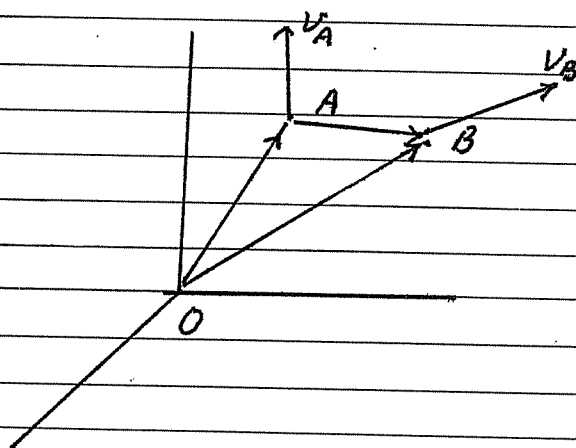
always be referred to
a particular frame of
reference
chosen by the
observer

How observations made by different observers are related

Since two observers may be in relative motion



how they can
correlate
their
measurement



A, B two objects

$$\vec{r}_{BA} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{Bo} \Rightarrow -\vec{r}_B = \vec{r}_{oB}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ao}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{Ao} + \vec{r}_{oB}$$

double subscript notation

$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

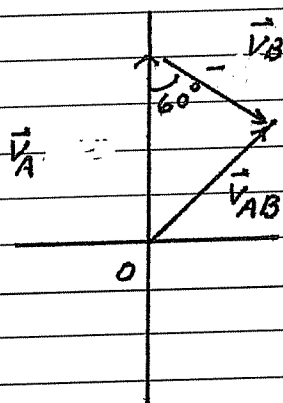
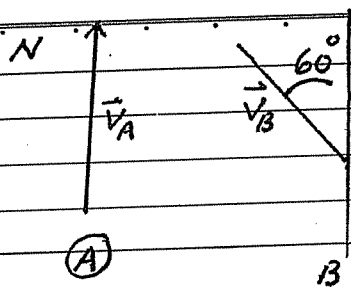
$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{Bo} - \vec{v}_{Ao} \Rightarrow \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{Ao} = \vec{v}_{Bo}$$

Take derivative with respect to t

$$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

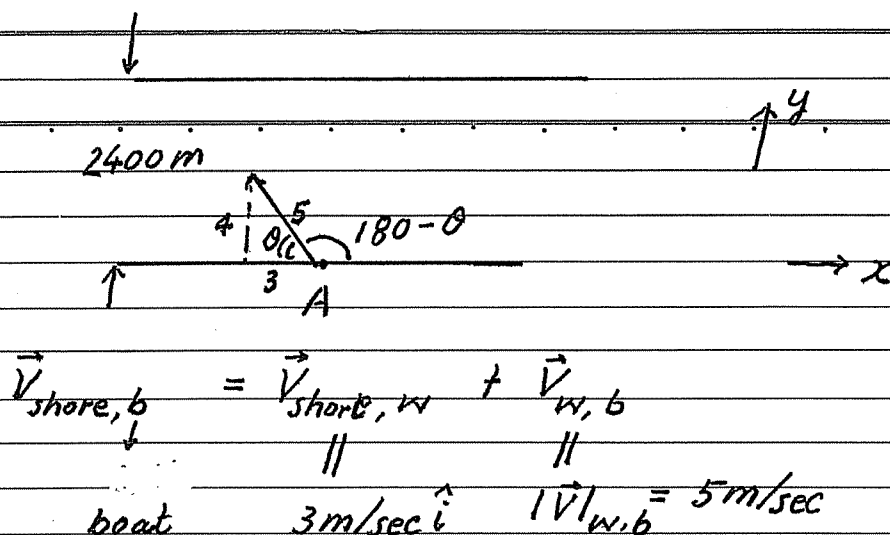
$$\text{Note: } \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{Ao} = \vec{a}_{Bo} \quad \vec{a}_{Bo} - \vec{a}_{Ao}$$

Example



$\vec{v}_{AB}$ is the relative velocity between A, B

分類:
編號:
總號:



$$\vec{V}_{shore, b} = \vec{V}_{shore, w} + \vec{V}_{w, b}$$

boat 3 m/sec 5 m/sec

$$(\vec{V}_{shore, b})_x = 0 \quad (V_{w, b})_x = -3 \text{ m/sec}$$

$$|V_{w, b}| = 5 \text{ m/sec}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \quad \theta = 180^\circ - \sin^{-1} \frac{4}{5} \quad (F)$$

$$T = \frac{2400}{4} = 600 \text{ sec} = 10 \text{ min} \quad (K)$$

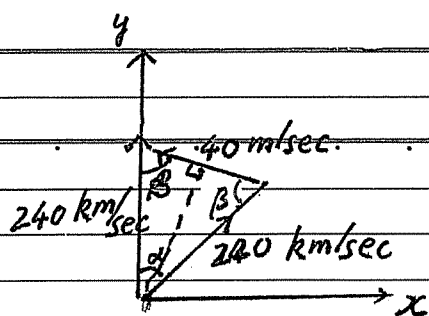
順流而下	$V = 5 + 3 = 8$	$2400/8 = 300$
逆流而上	$V = 5 - 3 = 2$	$2400/2 = 1200$
		$1500 \text{ sec} = 25 \text{ min.} \quad (B)$

最短時間，與 x 位置無關 $y = 0 \rightarrow 2400$

y 方向之速度最大 5 m/sec 方向對岸垂直 (C)

時間 $\frac{2400}{5} = 480 \text{ sec} = 8 \text{ 分鐘}$

分類:
編號:
總號:



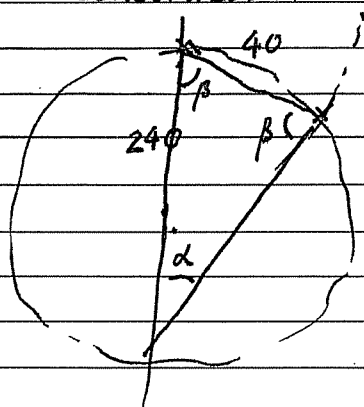
$$\vec{V}_{\text{land, plane}} = \vec{V}_{\text{lab, a}} + \vec{V}_{\text{a, plane}}$$

$\Downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 y 方向 風速 大小
 大小 大小 大小
 240 km/hr 40 km/hr 240

求 β $\cos \beta = \frac{20}{240} = \frac{1}{12}$ [G]

求 α $\alpha = 180^\circ - 2\beta$ [A]

Construction



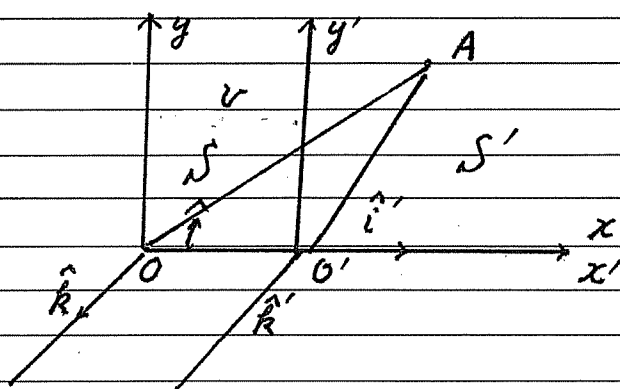
三角形

知道三邊長度

一邊之方向

分類:
編號:
總號:

Galilean transformation



$t=0$

$O O'$ coincides

$$\begin{array}{ccccc} \vec{OA} & = & \vec{OO'} & + & \vec{O'A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vec{r} & & vt & & \vec{r'} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$$

Assume

$$t' = t$$

time measurements
are independent
of
the observer

$$\vec{v} = v \hat{i}$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Galilean transformation.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ and } \vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

$$\vec{v'} = \vec{v} - v$$

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a'} = \vec{a}$$

According to Galilean transformation, the acceleration of a particle is measured is the same in uniform relative translational motion

$\vec{a'}$ is invariant under Galilean transformation.

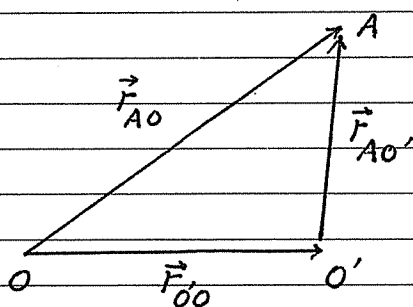
分類：
編號：
總號：

相對運動

$\vec{r}_{Ao}(t)$ $O \rightarrow A$ 之向量，物体 A 在觀察者 O 為原點之座標系統 S 中之位置向量 x, y, z, t

$\vec{r}_{Ao'}(t)$ $O' \rightarrow A$ 之向量

$\vec{r}_{O'o}(t)$ $O \rightarrow O'$ 之向量，物体 B 在觀察者 O' 為原點之座標系統 S' 中之位置向量 x', y', z', t'



$$\vec{r}_{Ao} = \vec{r}_{Ao'} + \vec{r}_{O'o} \quad \text{此式是基本公式} \quad \vec{r}_{O'o} = -\vec{r}_{o'o}$$

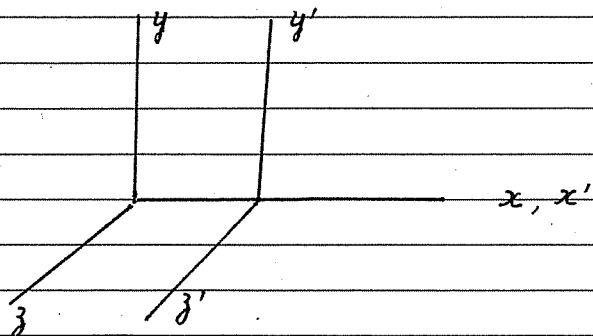
$\vec{r}_{Ao}, \vec{r}_{Ao'}, \vec{r}_{O'o}$ 均可為時間 t 之函數

取 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 為沿 x, y, z 方向之單位向量 $= \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 為沿 x', y', z' 方向之單位向量 $t = t'$

$$x_{Ao}(t) = x_{Ao'}(t) + x_{O'o}(t)$$

$$y_{Ao}(t) = y_{Ao'}(t) + y_{O'o}(t)$$

$$z_{Ao}(t) = z_{Ao'}(t) + z_{O'o}(t)$$



通常取為 0

$$x_{O'o}(t) = x_o + vt$$

$$y_{O'o}(t) = 0$$

$$z_{O'o}(t) = 0$$

$$x_{Ao}(t) = x_{Ao'}(t) + vt$$

$$x = x' + vt \Rightarrow x' = x - vt$$

$$y_{Ao}(t) = y_{Ao'}(t)$$

$$\rightarrow y = y' \rightarrow y' = y$$

分類：
編號：
總號：

$$j_{AO}(t) = j_{AO'}(t)$$

$$\rightarrow j = j' \rightarrow j' = j$$

以上之特殊轉換稱為伽里略轉換

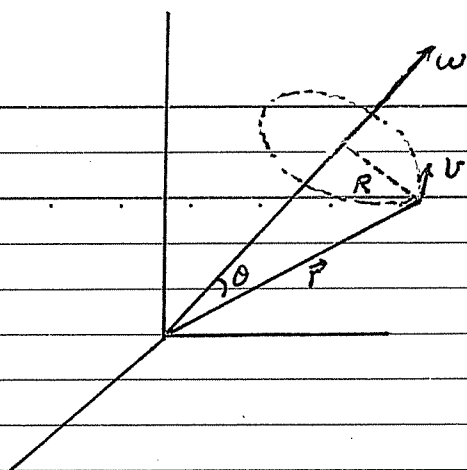
回到 $\vec{r}_{AO}(t) = \vec{r}_{AO'}(t) + \vec{r}_{O'O}(t)$

$$\Rightarrow \vec{v}_{AO}(t) = \vec{v}_{AO'}(t) + \vec{v}_{O'O}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{AO}(t) = \vec{a}_{AO'}(t) + \vec{a}_{O'O}(t)$$

主要的是要認清 O, O', A

分類:
編號:
總號:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v \perp \vec{\omega}$$

$$v \perp \vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\downarrow$$

$$|\vec{r}|, |\vec{v}| \text{ 均不為 } 0$$

$$\vec{r} \perp \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{\omega} \times \vec{r}$$

由右手定則

$$R = |\vec{r}| \sin \theta$$

$$|\vec{v}| = R\omega = \omega |\vec{r}| \sin \theta = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

因此得證

$$S \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, t$$

$$S' \quad \hat{i}'(t), \hat{j}'(t), \hat{k}'(t), t$$

$$\frac{d\vec{r}_{Ao'}}{dt} = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}'$$

$$+ x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}_{Ao'}}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ao'}$$

$\downarrow$
 $\vec{r}_{Ao}$

$\vec{r}_{oo'} = 0$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ao} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}' = \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{k}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}'$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 離心加速度 克勞雷加速度

應用

地球表面座標 S'

$\longleftrightarrow$
 只差一固定
 位 移
 向 量

$\downarrow$
 輔助座標系統

S
 $\downarrow$
 以地心為原點
 之固定座標系統

$\swarrow$
 隨地球轉動
 地面之座標
 系統

細節及應用將在第五章中

討 論

§ 6. 相对运动

我们观察和描述物体的运动,总是相对于另一物体或物体群而言的,或者说,我们以后者为参考系。作为地球上的居民,我们常不言而喻地选地面或相对于它静止的物体(如房屋、树木)为参考系。但也不尽然,行驶着的火车内的乘客则习惯于选车厢为参考系。参考系的选择,对观察和描述物体的运动是否方便,有时是大有关系的。中国成语“刻舟求剑”所描写的故事,就是一个参考系(舟)选择不当的例子,它难以很好地描述物体(剑)的运动和归向。描述船在急流中行驶,有时以水为参考系是方便的;描述飞机在劲风中航行,有时以空气为参考系是方便的。所以在实际问题中我们常从一个参考系变换到另一参考系。下面我们就来研究参考系之间的变换关系。

假设参考系 K_2 相对于参考系 K_1 的位矢为 $\mathbf{R}$ (见图 1-29), 从而速度 $\mathbf{V}$ 和加速度 $\mathbf{A}$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \\ \mathbf{A} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

若 K_1 和 K_2 中坐标轴始终保持平行,而在参考系 K_1 中质点 P 的位矢、速度、加速度分别为 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{a}_1$,则在参考系 K_2 中其位矢 $\mathbf{r}_2$ 、速度 $\mathbf{v}_2$ 、加速度 $\mathbf{a}_2$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

这是经典力学中的变换式,它们建立在“绝对时空”观念之上。在相对论理

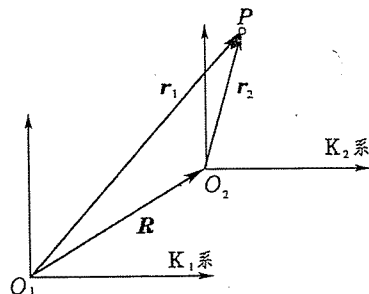


图 1-29 参考系变换

论中,它们将为洛伦兹变换所代替。^①

例题 5 如图 1-30a, 两船 A 和 B 各以速度 v_A 和 v_B 行驶, 它们会不会相撞?

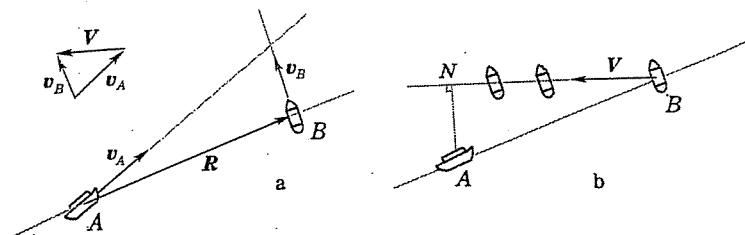


图 1-30 例题 5——两船会不会相撞?

解: 如图 1-30b, 求出 B 相对于 A 的速度 $\mathbf{V} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$, 从 B 引一平行于 $\mathbf{V}$ 方向的直线, 它不与 A 相交, 这表明, 两船不会相撞。若由 A 作此直线的垂线 AN, 其长度就是两船相靠最近的距离。!

在上题中, 若我们坚持用水面作参考系, 答案是不容易看清楚。以 A 为参考系, 则结论一目了然。在图 1-17 所示猎人枪打猴子的例子里, 子弹和猴子都具有向下的加速度 g , 如果我们采用一个也具有向下加速度 g 的物体作参考系, 则在此参考系内猴子是不动的, 而子弹沿着出膛时的方向作匀速直线运动。这时结论一目了然: 只要枪口原来瞄准猴子, 且子弹赶在猴子落地前到达, 猴子总是会被打中的。

例题 6 罗盘显示飞机头指向正东, 空气流速表的读数为 215 km/h, 此时风向正南, 风速 65 km/h. (a) 求飞机相对地面的速度; (b) 若飞行员想朝正东飞行, 机头应指向什么方位?

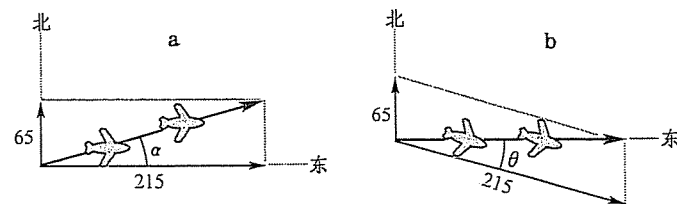


图 1-31 例题 6——飞机在劲风中航行

解: (a) 如图 1-31a 所示, 飞机对地面的速度和方向为

$$v = \sqrt{(215)^2 + (65)^2} \text{ km/h} = 225 \text{ km/h},$$

^① 这里我们隐含了一个假设, 即两个参考系具有共同的时间变量 t 。在日常生活这似乎是无可疑的, 然而在当代物理学中, 我们却不能想当然地作这种“绝对时间”的假设。从相对论的观点看, 这只是一种近似, 尽管通常在远低于光速的情况下, 这是一个很好的近似(详见第八章 §1)。

$$\alpha = \arctan \frac{65}{215} = 16.8^\circ.$$

(b) 如图 1-31b 所示, 机头所指的方位为

$$\theta = \arcsin \frac{65}{215} = 17.6^\circ,$$

其实际航速为

$$v = \sqrt{(215)^2 - (65)^2} \text{ km/h} = 205 \text{ km/h}.$$

例题 7 观察者 E 和物体 P 都绕中心 S 作匀速圆周运动, 但半径和周期不同. 试讨论 S 、 P 相对 E 的运动情况.

解: 设以 S 为参考系时, E 和 P 的速度为 v_E 和 v_P . 变换到以 E 为参考系时, S 的速度为 $v'_S = -v_E$, P 的速度为 $v'_P = v_P - v_E = v_P + v'_S$ 后者是两个匀速圆周运动的叠加, 即一个圆心在另一个圆周上匀速旋转, P 点的轨迹将是圆内旋轮线 (hypocycloid). 描绘这类两个匀速圆周运动的叠加问题比较方便的方式是以大圆作均轮 (deferent), 放在中央静止不动, 以小圆作本轮 (epicycle), 圆心沿均轮旋转. 所以我们要按 $\overline{SE}$ 和 $\overline{SP}$ 的长短, 分两种情形来处理:

(a) $\overline{SE} < \overline{SP}$ 的情形 (图 1-32a):

变换到参系 E 后, S 绕 E 作小圆周运动. P 点在圆心为 C 的本轮上, 其半径 $\overline{CP} = \overline{SE}$. 这时均轮的半径 $\overline{EC} = \overline{SP}$ (见图 1-32b). 在这种情形里, P 和 S 相对 E 的视运动没有密切联系.

(b) $\overline{SE} > \overline{SP}$ 的情形 (图 1-32c):

变换到参考系 E 后, S 绕 E 作大圆周运动, 这大圆就是均轮. P 则绕 S 做小圆周运动, 这小圆便是本轮 (见图 1-32d). 所以在这种情况下, P 到 S 相对于 E 的角距离不会超过小圆的角半径. $\blacksquare$

在此题中 E 、 P 和 S 可分别理解为地球、行星和太阳, 以 S 为参考系代表哥白尼的观点, 以 E 为参考系代表托勒玫的观点. 以后在第七章里我们还要回到这个问题上来.

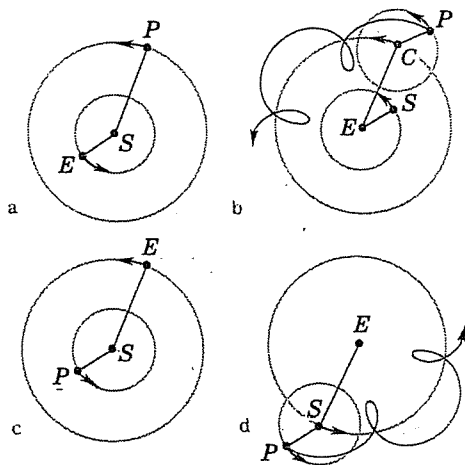


图 1-32 例题 7——圆周运动的叠加

本章提要

力学研究的对象: 机械运动 (宏观物体之间的相对位置变动)

1. 运动学: 只描述物体的运动。

动力学: 研究运动与物体间相互作用的关系。

2. 质点: 忽略物体形状和大小的一种物理模型。

(适用于只涉及平动而不考虑转动和形变的情形)

3. 参考系: 研究物体运动时所参照的物体或彼此不作相对运动的物体群。

坐标系: 参考系的数学抽象。如直角坐标系、极坐标系、自然坐标系等。

4. 时间: 表征物质运动的持续性。1s = 9192631770 ^{133}Cs 辐射周期。

空间: 表征物质运动的广延性。

$$1 \text{ m} = \frac{1}{299792458} \text{ s} \text{ 内光在真空中所运行路程长度。}$$

5. 物质世界的层次和数量级 学物理要“心中有数”

空间尺度, 从核子半径 10^{-15} m 到宇宙引力半径 10^{26} m , 跨越了 42 个数量级。

时间标度, 从 Z^0 粒子的寿命 10^{-25} s 到宇宙的年龄 10^{18} s , 跨越了 44 个数量级。

6. 运动学的基本物理量

$$\begin{array}{l} \text{位矢 } \mathbf{r} \xrightarrow{\text{微分}} \text{速度 } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \xrightarrow{\text{微分}} \text{加速度 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \text{位矢 } \mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt \xleftarrow{\text{积分}} \text{速度 } \mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt \xleftarrow{\text{积分}} \text{加速度 } \mathbf{a} \end{array}$$

要熟悉和运用 s - t 、 v - t 、 a - t 几何图像。

7. 处理曲线运动的基本方法: 选取适当的坐标将运动加以分解, 例如对于平面运动。

$$\begin{array}{l} \text{直角坐标} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}. \end{cases} \quad \text{自然坐标} \begin{cases} \text{切向: } a_t = \frac{dv}{dt}, \\ \text{法向: } a_n = \frac{v^2}{\rho}. \end{cases} \end{array}$$

ρ 为曲率半径, 以圆代曲。

8. 经典力学的平动坐标系变换 (见图 1-28): 非相对论近似

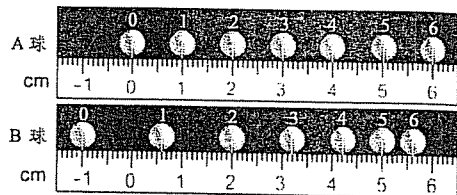
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{A}.$$

物理规律与参考系选择无关 (相对性原理)。

选择合适的参考系可使问题的处理简单明了。

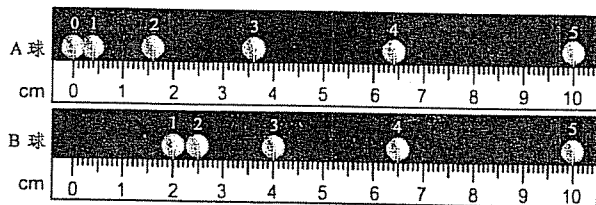
9. 研究质点的运动必须注意其相对性、瞬时性和矢量性。

1-1. 本题图所示为 A、B 两球运动的闪频照相, 图中球上方的数字是时间, 即相同数字表示相同的时刻拍摄两球的影像。两球有过瞬时速度相同的时刻吗? 如果有, 在什么时间? 什么位置? 在时刻 2 和 5 哪个球的速度大?



思考题 1-1

1-2. 本题图所示为 A、B 两球运动的闪频照相, 时间的显示如上题, 与上题不同的是在 0 时刻 B 球静止, 它是在时刻 1 才起步的。

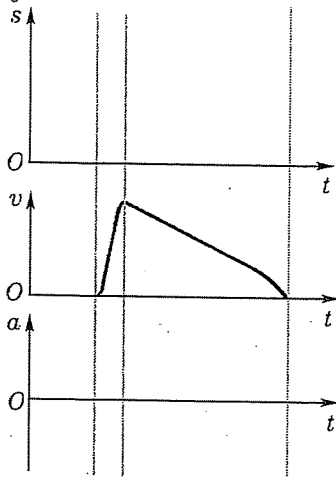


思考题 1-2

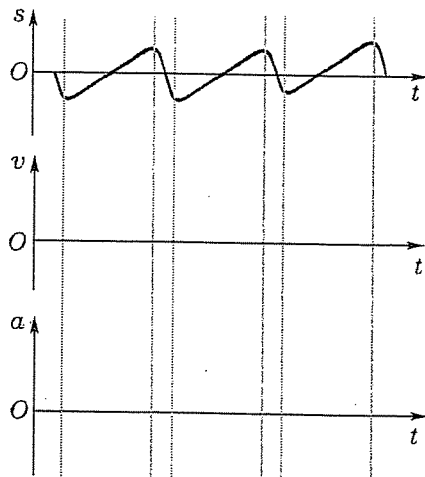
- (1) 判断两球是否在作匀加速运动;
- (2) 哪个球的加速度大?
- (3) 在时刻 5 哪个球达到的终速度大?

1-3. 在粗糙水平桌面上放置一物体, 用棒从旁敲击一下, 它向前滑动一段路程后停下来。本题图给出此过程的 $v-t$ 曲线, 试将相应的 $s-t$ 和 $a-t$ 曲线补画出来。

1-4. 本题图给出干摩擦引起的张弛振动 $s-t$ 曲线, 试将相应的 $v-t$ 和 $a-t$ 曲线补画出来。



思考题 1-3



思考题 1-4

1-5. 有人说: “加速度 $a = \frac{dv}{dt}$, 因此, 若质点在某时刻速度为 0, 对 0 的微商当然为 0, 所以在该时刻质点的加速度必为 0.” 这种说法对吗? 设想一下, 是否可能有 (a) $v=0$ 而 $a \neq 0$, (b) $v > 0$ 而 $a < 0$ 的情形。

1-6. 伽利略奠定力学基础的不朽之作是《关于托勒玫和哥白尼》两大世界体系的对话》(以下简称《对话》)。此书是以三个人对话的形式来写的: 1. 萨尔维亚蒂 (Salviati), 伽利略自己的发言人; 2. 辛普利邱 (Simplicio), 传统亚里士多德观点的代表; 3. 沙格列陀 (Sagredo), 中立而开朗的旁观者。下面摘录书中的一个片段 [方括号内的话是摘引者的]。

萨: ……CA 代表一个斜面, 磨得非常光滑而且很硬, 从这上面我们滚下 [应读作滑下] 一个 …… 圆球。现在假定另外一个完全相同的圆球沿垂直线 [CB] 自由落下。我问你承认不承认, 那个沿斜面 CA 滚下 [滑下] 的圆球到达 A 点时, 它的冲力和另一个沿垂直线 CB 落下的圆球到达 B 点时的冲力相等。

沙: 我当然相信是相等的。……每一圆球所获得的冲力都足以使它回到同样的高度。

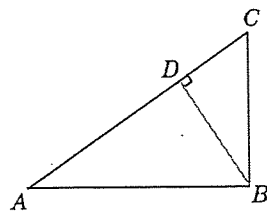
萨: …… 在斜面 CA 上滚下 [滑下] …… 要比沿垂直线落得慢些, 是不是?

沙: 我本来想说肯定是这样, …… 可是如果这样, 又怎样能够 …… 冲力一样 (即同等速度) 呢? 这两条命题好像是矛盾的。

萨: 那么如果我说, 物体沿垂直线和斜面坠落的快慢一样, 在你看来就更加错误了。然而这个命题是完全对的。正像说物体沿垂直线比沿斜面运动得快一样正确。

沙: 我听上去, 这像是两条矛盾的命题, 你呢, 辛普利邱?

辛: 我也一样。



思考题 1-6

上面对话中所用的术语, 如“冲力相等”、“快慢一样”等, 都不是现代物理学的标准术语, 它们的语义是含混不清的。试用现代物理学的标准术语, 如“速度”、“加速度”、“动量”、“动能”等来分析上述两条命题是否矛盾, 孰是孰非?

1-7. 质点作直线运动, 平均速度公式 $\bar{v} = \frac{v_{初} + v_{末}}{2}$ 永远成立吗?

1-8. 质点的位矢方向不变, 它是否一定作直线运动? 质点作直线运动, 其位矢的方向是否一定保持不变?

1-9. $|\Delta \mathbf{r}|$ 和 $|\Delta \mathbf{r}|$ 有区别吗? $|\Delta \mathbf{v}|$ 和 $|\Delta \mathbf{v}|$ 有区别吗? $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = 0$ 和 $\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = 0$ 各代表什么运动?

1-10. 在一段时间间隔 Δt 内 (1) $\Delta \mathbf{r} = 0$, (2) $\Delta \mathbf{r} = 0$, (3) $\Delta s = 0$, 在此期间质点可能作过怎样的运动? 在每一瞬时 (1) $d\mathbf{r} = 0$, (2) $d\mathbf{r} = 0$, (3) $ds = 0$, 质点可能在作怎样的运动?

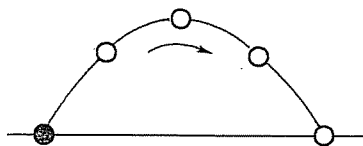
1-11. 在一段时间间隔 Δt 内 (1) $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$, (2) $|\Delta \mathbf{r}| = \pm \Delta x$, 在此期间质点可能作过怎样的运动? 在每一瞬时 (1) $|\mathbf{dr}| = ds$, (2) $|\mathbf{dr}| = \pm dx$, 质点可能在作怎样的运动?

1-12. 质点作匀速圆周运动, 以下各量哪些变, 哪些不变?

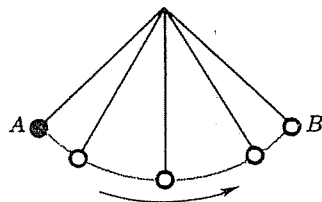
$$(1) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (2) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (3) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t},$$

$$(4) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (5) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (6) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}.$$

1-13. 试分析抛物运动(见本题图)各中间阶段速度和加速度的方向. 速率在哪里最大, 哪里最小? 法向加速度、切向加速度和总加速度呢?



思考题 1-13



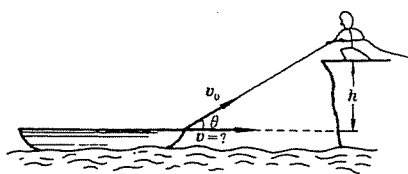
思考题 1-14

1-14. 如本题图所示, 单摆静止地从位置 A 摆到 B, 试分析它在中间各阶段加速度的方向。

1-15. 在测量降雨量时, 有风和无风, 量筒中的积水量相同吗?

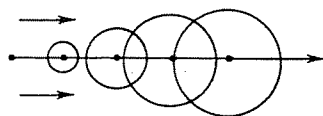
1-16. 如本题图所示, 一人站在河岸上(岸高 h); 手握绳之一端, 绳的另一端系一小船. 那人站着不动, 以手收绳. 设收绳速度 v_0 恒定, 绳与水面的夹角为 θ , 船向岸靠拢的速度 $v = v_0 \cos \theta$ 吗? 船作匀速运动还是加速运动? 加速度为多少?

1-17. 一小船载木箱逆水而行, 经过桥下时, 一个木箱不慎落入水中, 半小时后才发觉, 立即回程追赶, 在桥的下游 5.0 km 处赶上木箱. 设小船顺流和逆流时相对水流的划行速度不变, 问小船回程追赶所需时间, 并求水流速度。



思考题 1-16

1-18. 某人立在桥上, 桥下河水平稳地向前流动. 他将一石子竖直向下投于水中. 试分析, 激起的水波属于下列哪种情况? (1) 同心椭圆, (2) 非同心圆(见本题图), (3) 与水共同前进的同心圆。



思考题 1-18

1-19. 假设烟花爆竹在高空爆炸时, 向四面八方飞出的碎片都具有相同的速率, 经过一定时间后, 这些碎片将联成怎样的曲面?

习 题

1-1. 已知质点沿 x 轴作周期性运动, 选取某种单位时其坐标 x 和时间 t 的数值关系为

$$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

求 $t=0, 3, 6, 9, 12$ 时质点的位移、速度和加速度。

1-2. 已知质点位矢随时间变化的函数形式为

$$\mathbf{r} = R(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}),$$

求 (1) 质点轨迹, (2) 速度和加速度, 并证明其加速度总指向一点。

1-3. 在一定单位制下质点位矢随时间变化的函数数值形式为

$$\mathbf{r} = 4t^2 \mathbf{i} + (2t+3)\mathbf{j},$$

求 (1) 质点轨迹, (2) 从 $t=0$ 到 $t=1$ 的位移, (3) $t=0$ 和 $t=1$ 两时刻的速度和加速度。

1-4. 站台上—观察者, 在火车开动时站在第一节车厢的最前端, 第一节车厢在 $\Delta t_1=4.0$ s 内从他身旁驶过. 设火车作匀加速直线运动, 问第 n 节车厢从他身旁驶过所需的时间间隔 Δt_n 为多少. 令 $n=7$, 求 Δt_n 。

1-5. 一球从高度为 h 处自静止下落. 同时另一球从地面以一定初速度 v_0 上抛. v_0 多大时两球在 $h/2$ 处相碰?

1-6. 一球以初速 v_0 竖直上抛, 经过时间 t_0 后在同一地点以同样速率向上抛出另一小球. 两球在有多高处相遇?

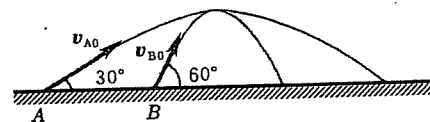
1-7. 一物体作匀加速直线运动, 走过一段距离 Δs 所用的时间为 Δt_1 , 紧接着走过下一段距离 Δs 所用的时间为 Δt_2 . 试证明, 物体的加速度为

$$a = \frac{2 \Delta s}{\Delta t_1 \Delta t_2} \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}.$$

1-8. 路灯距地面的高度为 h_1 , 一身高为 h_2 的人在路灯下以匀速 v_1 沿直线行走. 试证明人影的顶端作匀速运动, 并求其速度 v_2 。

1-9. 设 α 为炮位所在处观看靶子的仰角, β 为炮弹的发射角. 试证明: 若炮弹命中靶点恰为弹道的最高点, 则有 $\tan \beta = 2 \tan \alpha$ 。

1-10. 在同一竖直面内的同一水平线上 A、B 两点分别以 30° 、 60° 为发射角同时抛出两个小球, 欲使两球在各自轨道的最高点相遇, 求 A、B 两点之间的距离. 已知小球 A 的初速为 $v_{A0}=9.8$ m/s。



习题 1-10

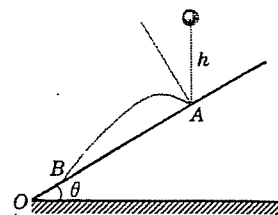
1-11. 飞机以 $v_0=100$ m/s 的速度沿水平直线飞行, 在离地面高 $h=98$ m 时, 驾驶员要把物品投到前方某一地面目标上, 问:

(1) 投放物品时, 驾驶员看目标的视线和竖直线应成什么角度? 此时目标距飞机在下方地点多远?

(2) 物品投出 1 s 后, 物品的法向加速度和切向加速度各为多少?

1-12. 已知炮弹的发射角为 θ , 初速为 v_0 , 求抛物线轨道的曲率半径随高度的变化。

1-13. 一弹性球自静止竖直地落在斜面上的 A 点, 下落高度 $h=0.20\text{m}$, 斜面与水平夹角 $\theta=30^\circ$. 问弹性球第二次碰到斜面的位置 B 距 A 多远。设弹性球与斜面碰撞前后速度数值相等, 碰撞时入射角等于反射角。



习题 1-13

1-14. 一物体从静止开始作圆周运动。切向加速度 $a_t=3.00\text{m/s}^2$, 圆的半径 $R=300\text{m}$. 问经过多少时间物体的加速度 a 恰与半径成 45° 夹角。

1-15. 一物体和探测气球从同一高度竖直向上运动, 物体初速度为 $v_0=49.0\text{m/s}$, 而气球以速度 $v=19.6\text{m/s}$ 匀速上升, 问气球中的观察者分别在第二秒末、第三秒末、第四秒末测得物体的速度各为多少?

1-3 相对运动

一、时间与空间

在图 1-19 中, 小车以较低的速度 v 沿水平轨道先后通过点 A 和点 B . 如站

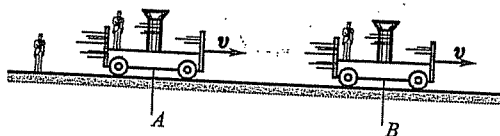


图 1-19 在低速运动时, 时间和空间的测量是绝对的

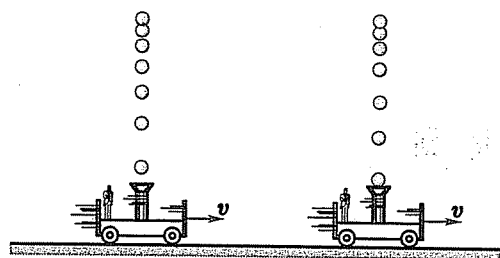
在地面的人测得通过点 A 和点 B 的时间为 $\Delta t = t_B - t_A$; 而站在车上的人测得通过 A 、 B 两点的时间为 $\Delta t' = t'_B - t'_A$, 且两者是相等的, 即 $\Delta t = \Delta t'$. 也就是说, 在两个作相对直线运动的参考系 (地面和小车) 中, 时间的测量是绝对的, 与参考系无关.

同样, 在地面上的人和车上的人测得 A 、 B 两点之间的距离相等, 都等于 AB . 这也就是说, 两个作相对运动的参考系中, 长度的测量也是绝对的, 与参考系无关. 在人们的日常生活和一般科技活动中, 上述关于时间和空间量度的结论是毋庸置疑的. 时间和长度的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础. 以后我们将介绍, 当相对运动的速度接近于光速时, 时间和空间的测量将依赖于相对运动的速度①. 只是由于牛顿力学所涉及物体的运动速度远小于光速, 即 $v \ll c$, 所以在牛顿力学范围内, 时间与空间的测量才可以视为与参考系的选取无关. 然而, 在牛顿力学范围内, 运动质点的位移、速度和运动轨迹则与参考系的选择有关. 本节将着重讨论这方面的问题.

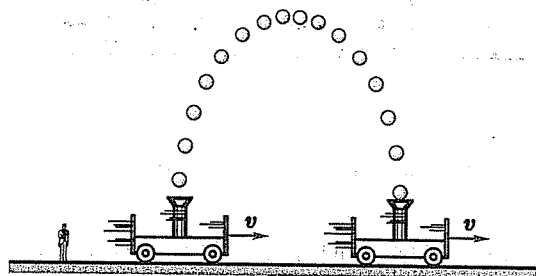
二、相对运动

质点的运动轨迹依赖于观察者 (即参考系) 的例子是很多的. 例如一个人站在作匀速直线运动的车上, 竖直向上抛出一个钢球, 车上的观察者看到钢球竖直

上升并竖直下落[图 1-20(a)],但是,站在地面上的另一人却看到钢球的运动



(a) 车作匀速直线运动时,车上的人观察到钢球作直线运动



(b) 车作匀速直线运动时,地面上的人观察到钢球作抛物线运动

图 1-20 物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系

轨迹为一抛物线[图 1-20(b)].从这个例子可以看出,钢球的运动情况依赖于参考系.这个例子也就是第 1-1 节中所述的运动描述的相对性.

设有两个参考系,一个为 S 系(即 Oxy 坐标系),另一个为 S' 系(即 $O'x'y'$ 坐标系).开始时(即 $t=0$),这两个参考系相重合.有一个质点在 S 系中的位置以 P 表示,而在 S' 系中的位置以 P' 表示.显然,在 $t=0$ 时,点 P 与点 P' 共居于一点[图 1-21(a)].

如果在 Δt 时间内, S' 系沿 x 轴以速度 u 相对 S 系运动的同时,质点运动到点 Q.在这段时间内, S' 系沿 x 轴相对 S 系的位移为 $\Delta D = u\Delta t$.在同样的时间里,在 S 系中,质点从点 P 运动到点 Q,其位移为 Δr ;而在 S' 系中,质点则由点 P' 运动到点 Q,其位移为 $\Delta r'$ [图 1-21(b)].在相等的时间内,显然 Δr 和 $\Delta r'$ 是不相等的.因为在图 1-21(b)中可以看出,从 S 系看来,质点犹如同时参与两种运动:质点除随 S' 系以速度 u 沿 x 轴运动外,还要从点 P' 运动到点 Q.质点在 S 系中的位移 Δr 应等于 S' 系相对 S 系的位移 ΔD 与质点在 S' 系中的位移 $\Delta r'$ 之和,即

$$\Delta r = \Delta r' + \Delta D = \Delta r' + u\Delta t \quad (1-19)$$

上式表明,质点的位移取决于参考系的选择.若 S' 系相对 S 系处于静止状态(即 $u=0$),那么,质点在两参考系中的位移应相等,即 $\Delta r = \Delta r'$.

由位移的相对性可得出速度的相对性.用时间 Δt 除式(1-19),有

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t} + u$$

取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限值,得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + u$$

即

$$v = v' + u \quad (1-20)$$

式中 u 为 S' 系相对 S 系的速度, v' 为质点相对 S' 系的速度, v 为质点相对 S 系的速度.上式的物理意义是:质点相对 S 系的速度等于它相对 S' 系的速度与 S' 系相对 S 系的速度之矢量和(图 1-22).

习惯上,常把视为静止的参考系 S 作为基本参考系,把相对 S 系运动的参考系 S' 作为运动参考系.这样,质点相对基本参考系 S 的速度 v 就叫做绝对速度,质点相对运动参考系 S' 的速度 v' 叫做相对速度,而运动参考系 S' 相对基本参考系 S 的速度 u 叫做牵连速度.于是式(1-20)可理解为:质点相对基本参考系的绝对速度 v ,等于运动参考系相对基本参考系的牵连速度 u 与质点相对运动参考系的相对速度 v' 之和.例如,在匀速前进的平板车上,一人在车上行走.取地面为基本参考系,车为运动参考系;若车相对地的速度(即牵连速度)为 v_{TG} ,人对车的速度(即相对速度)为 v_{MT} ,那么人对地的速度(即绝对速度) v_{MG} 为

$$v_{MG} = v_{MT} + v_{TG}$$

式中 M、G 和 T 分别代表人、地和车.

式(1-20)给出了质点在两个以恒定的速度作相对运动的参考系中速度与参考系间的关系,即质点的速度变换关系式.这个式子叫做伽利略速度变换式,

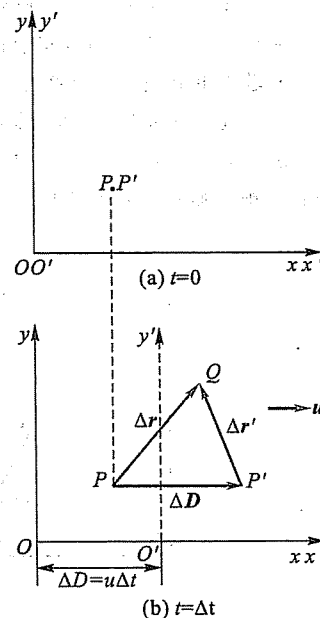


图 1-21 质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

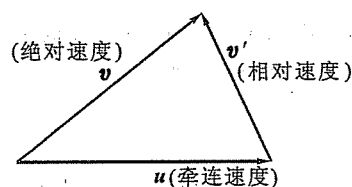


图 1-22 速度的相对性

速度的变换应当遵循洛伦兹速度变换式①.

例 如图 1-23 所示,一实验者 A 在以 $10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台弹射器.此弹射器以与车前进的反方向呈 60° 角斜向上射出一弹丸.此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动.求弹丸上升的高度.

解 设地面参考系为 S 系,其坐标系为 Oxy ,平板车参考系为 S' 系,其坐标系为 $O'x'y'$,且 S' 系以速率 $u=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿 Ox 轴正向相对 S 系运动.由图中所选定的坐标可知,在 S' 系中的实验者 A 射出弹丸的速度 v' 在 x' 、 y' 轴上的分量分别为 v'_x 和 v'_y . 它们与抛出角 α 的关系为

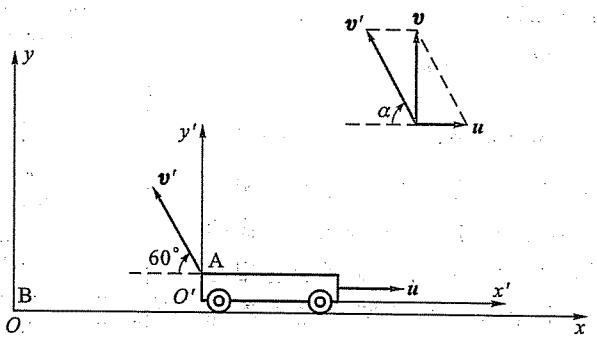


图 1-23

$$\tan \alpha = \frac{v'_y}{v'_x} \tag{1}$$

若以 v 代表弹丸相对 S 系的速度,那么它在 x 、 y 轴上的分量则为 v_x 和 v_y . 由速度变换式(1-20)及题意可得

$$v_x = u + v'_x \tag{2}$$

$$v_y = v'_y \tag{3}$$

由于 S 系(地面)的实验者 B 看到弹丸是铅直向上运动的,故 $v_x=0$. 于是由式(2),有

$$v'_x = -u = -10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

另由式(3)和式(1)可得

$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x| \tan \alpha = 10 \tan 60^\circ = 17.3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由匀变速直线运动公式可得弹丸上升的高度为

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\text{ m}$$

问 题

1-1 在一艘内河轮船中,两个旅客有这样的对话:

甲:我静静地坐在这里好半天了,我一点也没有运动.

乙:不对,你看看窗外,河岸上的物体都飞快地向后掠去,船在飞快前进,你也在很快地运动.

试把他们讲话的含义阐述得确切一些.究竟旅客甲是运动,还是静止?你如何理解运动和静止这两个概念.

1-2 有人说:“分子很小,可将其当作质点;地球很大,不能当作质点”.对吗?

1-3 已知质点的运动方程为 $r = x(t)i + y(t)j$,有人说其速度和加速度分别为

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 你说对吗?

1-4 在习题 1-5 中,有人认为:船速为 $v = v_0 \cos \theta$,由此得出的答案是错的.你知道错在哪里吗?

1-5 如果一质点的加速度与时间的关系是线性的,那么,该质点的速度和位矢与时间的关系是否也是线性的呢?

1-6 一人站在地面上用枪瞄准悬挂在树上的木偶.当击发枪机,子弹从枪口射出时,木偶正好从树上由静止自由下落.试说明为什么子弹总可以射中木偶?

1-7 一质点作匀速率圆周运动,取其圆心为坐标原点.试问:质点的位矢与速度、位矢与加速度、速度与加速度的方向之间有何关系?

1-8 在《关于两门新科学的对话》一书中,伽利略写道:“仰角(即抛射角)比 45° 增大或减小一个相等角度的抛体,其射程是相等的.”你能证明吗?

1-9 下列说法是否正确:

- (1) 质点作圆周运动时的加速度指向圆心;
- (2) 匀速圆周运动的加速度为恒量;
- (3) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动;
- (4) 只有切向加速度的运动一定是直线运动.

1-10 在地球的赤道上,有一质点随地球自转的加速度为 a_E ;而此质点随地球绕太阳公转的加速度为 a_S .设想地球绕太阳的轨道可视为圆形.你知道这两个加速度之比是多少?

1-11 一半径为 R 的圆筒中盛有水,水面低于圆筒的顶部.当它以角速度 ω 绕竖直轴旋转时,水面呈平面还是抛物面?试证之.

1-12 把一小钢球放在大钢球的顶部,让两钢球自距地面高为 h 处.由静止自由下落,与地面上钢板相碰撞.相碰后,小钢球可弹到 $9h$ 的高度.你能用相对运动的概念给予说明吗?设钢球间和钢球与钢板间的碰撞均为完全弹性碰撞.

1-13 如果有两个质点分别以初速 v_{10} 和 v_{20} 抛出, v_{10} 和 v_{20} 在同一平面内且与水平面的夹

习 题

1-1 质点作曲线运动,在时刻 t 质点的位矢为 r ,速度为 v ,速率为 v , t 至 $(t+\Delta t)$ 时间内的位移为 Δr ,路程为 Δs ,位矢大小的变化量为 Δr (或称 $|\Delta r|$),平均速度为 $\bar{v}$,平均速率为 $\bar{v}$.

(1) 根据上述情况,则必有()

(A) $|\Delta r| = \Delta s = \Delta r$

(B) $|\Delta r| \neq \Delta s \neq \Delta r$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$

(C) $|\Delta r| \neq \Delta r \neq \Delta s$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}r \neq \mathrm{d}s$

(D) $|\Delta r| = \Delta s \neq \Delta r$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}r = \mathrm{d}s$

(2) 根据上述情况,则必有()

(A) $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$

(B) $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$

(C) $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$

(D) $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$

1-2 一运动质点在某瞬时位于位矢 $r(x, y)$ 的端点处,对其速度的大小有四种意见,即

(1) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$; (2) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$; (3) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$; (4) $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

下述判断正确的是()

(A) 只有(1)(2)正确

(B) 只有(2)正确

(C) 只有(2)(3)正确

(D) 只有(3)(4)正确

1-3 质点作曲线运动, r 表示位置矢量, v 表示速度, a 表示加速度, s 表示路程, a_t 表示切向加速度.对下列表达式,即

(1) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a$; (2) $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = v$; (3) $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$; (4) $|\mathrm{d}v/\mathrm{d}t| = a_t$.

下述判断正确的是()

(A) 只有(1)、(4)是对的

(B) 只有(2)、(4)是对的

(C) 只有(2)是对的

(D) 只有(3)是对的

1-4 一个质点在做圆周运动时,则有()

(A) 切向加速度一定改变,法向加速度也改变

(B) 切向加速度可能不变,法向加速度一定改变

(C) 切向加速度可能不变,法向加速度不变

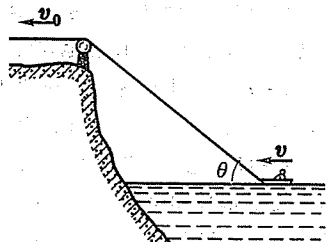
(D) 切向加速度一定改变,法向加速度不变

1-5 如图所示,湖中有一小船,有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动.设该人以匀速率 v_0 收绳,绳不伸长且湖水静止,小船的速率为 v ,则小船作()

(A) 匀加速运动, $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$

(B) 匀减速运动, $v = v_0 \cos \theta$

(C) 匀加速运动, $v = v_0$

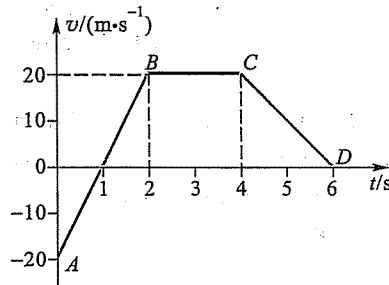


(D) 变减速运动, $v = v_0 \cos \theta$

(E) 匀速直线运动, $v = v_0$

1-6 已知质点沿 x 轴作直线运动,其运动方程为 $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$,式中 x 的单位为 m , t 的单位为 s .求:(1) 质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小;(2) 质点在该时间内所通过的路程;(3) $t = 4 \text{ s}$ 时质点的速度和加速度.

1-7 一质点沿 x 轴方向作直线运动,其速度与时间的关系如图所示.设 $t = 0$ 时, $x = 0$.试根据已知的 $v-t$ 图,画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图.



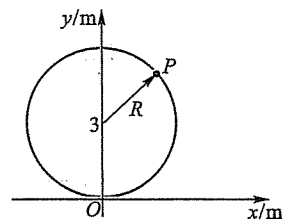
习题 1-7 图

1-8 已知质点的运动方程为 $r = 2ti + (2-t^2)j$,式中 r 的单位为 m , t 的单位为 s .求:(1) 质点的轨迹;(2) $t = 0$ 及 $t = 2 \text{ s}$ 时,质点的位矢;(3) 由 $t = 0$ 到 $t = 2 \text{ s}$ 内质点的位移 Δr 和径向增量 Δr ; (4) 2 s 内质点所走过的路程 s .

1-9 质点的运动方程为 $x = -10t + 30t^2$ 和 $y = 15t - 20t^2$,式中 x, y 的单位为 m , t 的单位为 s .试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

1-10 一升降机以加速度 $1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升,当上升速度为 $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,有一螺丝自升降机的天花板上松脱,天花板与升降机的底面相距 2.74 m .计算:(1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间;(2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

1-11 一质点 P 沿半径 $R = 3.0 \text{ m}$ 的圆周作匀速率运动,运动一周所需时间为 20.0 s ,设 $t = 0$ 时,质点位于 O 点.按图中所示 Oxy 坐标系,求:(1) 质点 P 在任意时刻的位矢;(2) 5 s 时的速度和加速度.



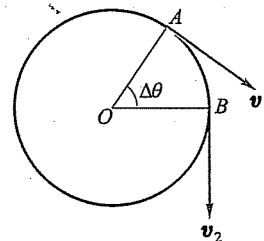
习题 1-11 图

1-12 地面上垂直竖立一高 20.0 m 的旗杆,已知正午时分太阳在旗杆的正上方,求在下午 $2:00$ 时,杆顶在地面上影子速度的大小.在何时时刻杆影将伸展至 20.0 m ?

1-13 质点沿直线运动,加速度 $a = 4 - t^2$,式中 a 的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, t 的单位为 s .如果当 $t = 3 \text{ s}$ 时, $x = 9 \text{ m}$, $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,求质点的运动方程.

1-14 一石子从空中由静止下落,由于空气阻力,石子并非作自由落体运动.现已知加速度 $a = A - Bv$,式中 A, B 为常量.试求石子的速度和运动方程.

1-15 一质点具有恒定加速度 $a = 6i + 4j$,式中 a 的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.在 $t = 0$ 时,其速度为零,位置矢量 $r_0 = 10 \text{ m} i$.求:(1) 在任意时刻的速度和位置矢量;(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图.



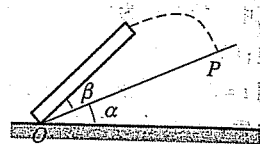
1-16 如右图所示,一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的

为 $\Delta\theta$. (1) 试证 A 和 B 位置之间平均加速度为 $\bar{a} = \sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)} v^2 / (R\Delta\theta)$. (2) 当 $\Delta\theta$ 分别等于 90° , 30° , 10° 和 1° 时, 平均加速度各为多少? 并对结果加以讨论.

1-17 质点在 Oxy 平面内运动, 其运动方程为 $r = 2.0t\mathbf{i} + (19.0 - 2.0t^2)\mathbf{j}$, 式中 t 的单位为 m , t 的单位为 s . 求: (1) 质点的轨迹方程; (2) 在 $t_1 = 1.0\text{ s}$ 到 $t_2 = 2.0\text{ s}$ 时间内的平均速度; (3) $t_1 = 1.0\text{ s}$ 时的速度及切向和法向加速度; (4) $t = 1.0\text{ s}$ 时质点所在处轨道的曲率半径 ρ .

1-18 飞机以 $100\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度沿水平直线飞行, 在离地面高为 100 m 时, 驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处, 问: (1) 此时目标在飞机下方前多远? (2) 投放物品时, 驾驶员看目标的视线和水平线成何角度? (3) 物品投出 2.0 s 后, 它的法向加速度和切向加速度各为多少?

1-19 如图所示, 一小型迫击炮架设在一斜坡的底端 O 处, 已知斜坡倾角为 α , 炮身与斜坡的夹角为 β , 炮弹的出口速度为 v_0 , 忽略空气阻力. 求: (1) 炮弹落地点 P 与点 O 的距离 OP ; (2) 欲使炮弹能垂直击中坡面. 证明 α 和 β 必须满足 $\tan\beta =$



习题 1-19 图

$\frac{1}{2\tan\alpha}$ 并与 v_0 无关.

1-20 一直立的雨伞, 张开后其边缘圆周的半径为 R , 离地的高度为 h , (1) 当伞绕伞柄以匀角速 ω 旋转时, 求证水滴沿边缘飞出后落在地面上半径为 $r = R\sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$ 的圆周上; (2) 读者能否由此定性构想一种草坪上或农田灌溉用的旋转式洒水器的方案?

1-21 一足球运动员在正对球门前 25.0 m 处以 $20.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的初速率罚任意球, 已知球门高为 3.44 m , 若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门, 问他应与地面成什么角度的范围内踢出足球? (足球可视为质点.)

1-22 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0t - \frac{1}{2}bt^2$ 而运动, v_0, b 都是常量. (1) 求 t 时刻质点的总加速度; (2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b ? (3) 当加速度达到 b 时, 质点已沿圆周运行了多少圈?

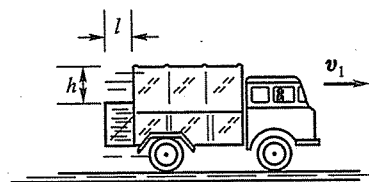
1-23 一半径为 0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内, 其角速度与时间的平方成正比. 在 $t = 2.0\text{ s}$ 时测得轮缘一点的速度值为 $4.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 求: (1) 该轮在 $t' = 0.5\text{ s}$ 的角速度, 轮缘一点的切向加速度和总加速度; (2) 该点在 2.0 s 内所转过的角度.

1-24 一质点在半径为 0.10 m 的圆周上运动, 其角位置为 $\theta = 2 + 4t^3$, 式中 θ 的单位为 rad , t 的单位为 s . (1) 求在 $t = 2.0\text{ s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度. (2) 当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少? (3) t 为多少时, 法向加速度和切向加速度的值相等?

1-25 一无风的下雨天, 一列火车以 $v_1 = 20.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度匀速前进, 在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和垂线成 75° 角下降. 求雨滴下落的速度 v_2 . (设下降的雨滴作匀速运动.)

方向偏于竖直方向之前 θ 角, 速率为 v_2 . 若车后有一长方形物体, 问车速 v_1 为多大时, 此物体正好不会被雨水淋湿?

1-27 一人能在静水中以 $1.10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度划船前进. 今欲横渡一宽为 $1.00 \times 10^3\text{ m}$ 、水流速度为 $0.55\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的大河, (1) 他若要从出发点横渡该河而到达正对岸的一点, 那么应如何确定划行方向? 到达正对岸需多少时间? (2) 如果希望用最短的时间过河, 应如何确定划行方向? 船到达对岸的位置在什么地方?



习题 1-26 图

1-28 一质点相对观察者 O 运动, 在任意时刻 t , 其位置为 $x = vt, y = gt^2/2$, 质点运动的轨迹为抛物线. 若另一观察者 O' 以速率 v 沿 x 轴正向相对于 O 运动. 试问质点相对 O' 的轨迹和加速度如何?

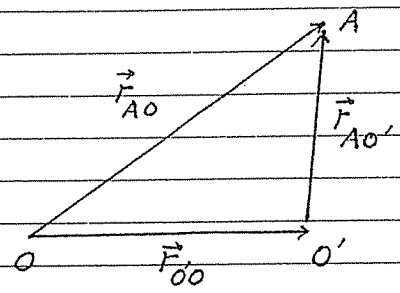
分類：
編號：
總號：

相對運動

$\vec{r}_{AO}(t)$ $O \rightarrow A$ 之向量，物体 A 在觀察者 O 為原點之座標系統 S 中之位置向量 x, y, z, t

$\vec{r}_{AO'}(t)$ $O' \rightarrow A$ 之向量

$\vec{r}_{O'O}(t)$ $O \rightarrow O'$ 之向量，物体 B 在觀察者 O' 為原點之座標系統 S' 中之位置向量 x', y', z', t'



$\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{AO'} + \vec{r}_{O'O}$ 此式是基本公式 $\vec{r}_{O'O} = -\vec{r}_{OO'}$

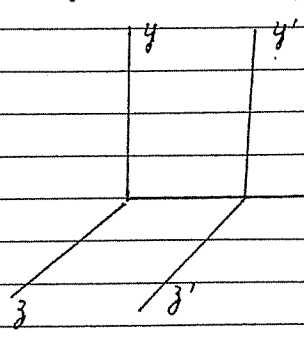
$\vec{r}_{AO}, \vec{r}_{AO'}, \vec{r}_{O'O}$ 均可為時間 t 之函數

取 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 為沿 x, y, z 方向之單位向量 = $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ 為沿 x', y', z' 方向之單位向量 $t = t'$

$x_{AO}(t) = x_{AO'}(t) + x_{O'O}(t)$

$y_{AO}(t) = y_{AO'}(t) + y_{O'O}(t)$

$z_{AO}(t) = z_{AO'}(t) + z_{O'O}(t)$



$x_{O'O}(t) = x_0 + vt$ 通常取為 0

$y_{O'O}(t) = 0$

$z_{O'O}(t) = 0$

$x_{AO}(t) = x_{AO'}(t) + vt$

$x = x' + vt \Rightarrow x' = x - vt$

$y_{AO}(t) = y_{AO'}(t)$

$y = y' \Rightarrow y' = y$

分類：

編號：

總號：

$$t_{AO}(t) = t_{AO'}(t)$$

$$\rightarrow t = t' \rightarrow t' = t$$

以上之特殊轉換稱為伽里略轉換

回到 $\vec{r}_{AO}(t) = \vec{r}_{AO'}(t) + \vec{r}_{O'O}(t)$

$$\Rightarrow \vec{v}_{AO}(t) = \vec{v}_{AO'}(t) + \vec{v}_{O'O}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{AO}(t) = \vec{a}_{AO'}(t) + \vec{a}_{O'O}(t)$$

主要的是要認清 O, O', A