

刚体的转动

在讲过用于质点的牛顿定律及其延伸的概念原理之后,本章讲解刚体转动的规律。这些规律大家在中学课程中没有学过。但是只要注意到一个刚体可以看做是一个质点系,其运动规律应该是牛顿定律对这种质点系的应用,本章内容就并不难掌握。本章将先根据质点系的角动量定理式(3.30)导出对刚体的转动定律,接着说明有刚体时的角动量守恒,然后再讲解功能概念对刚体转动的应用。之后用质心运动定理和转动定律说明一些滚动的规律。最后简要地介绍了进动的原理。

5.1 刚体转动的描述

刚体是固体物件的理想化模型。实际的固体在受力作用时总是要发生或大或小的形状和体积的改变。如果在讨论一个固体的运动时,这种形状或体积的改变可以忽略,我们就把这个固体当做刚体处理。这就是说,刚体是受力时不改变形状和体积的物体。刚体可以看成由许多质点组成,每一个质点叫做刚体的一个质元,刚体这个质点系的特点是,在外力作用下各质元之间的相对位置保持不变。

转动的最简单情况是定轴转动。在这种运动中各质元均作圆周运动,而且各圆的圆心都在一条固定不动的直线上,这条直线叫转轴。转动是刚体的基本运动形式之一。刚体的一般运动都可以认为是平动和绕某一转轴转动的结合。作为基础,本章只讨论刚体的定轴转动。

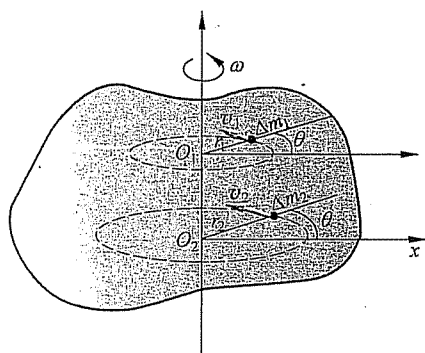


图 5.1 刚体的定轴转动

刚体绕某一固定转轴转动时,各质元的线速度、加速度一般是不同的(图 5.1)。但由于各质元的相对位置保持不变,所以描述各质元运动的角量,如角位移、角速度和角加速度都是一样的。因此描述刚体整体的运动时,用角量最为方便。如在第 1 章讲圆周运动时所提出的,以 $d\theta$ 表示刚体在 dt 时间内转过的角位移,则刚体的角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.1)$$

角速度实际上是矢量,以 ω 表示。它的方向规定为沿轴的方向,其指向用右手螺旋法则确定(图 5.1)。在刚体定轴转动的情况下,角速度的方向只能沿轴取两个方向,相应于刚体转动的两个相反的旋转方向。这种情况下, ω 就可用代数方法处理,用正负来区别两个旋转方向。

刚体的角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.2)$$

离转轴的距离为 r 的质元的线速度和刚体的角速度的关系为

$$v = r\omega \quad (5.3)$$

而其加速度与刚体的角加速度和角速度的关系为

$$a_t = r\alpha \quad (5.4)$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (5.5)$$

定轴转动的一种简单情况是匀加速转动。在这一转动过程中,刚体的角加速度 α 保持不变。以 ω_0 表示刚体在时刻 $t=0$ 时的角速度,以 ω 表示它在时刻 t 时的角速度,以 θ 表示它在从0到 t 时刻这一段时间内的角位移,仿照匀加速直线运动公式的推导可得匀加速转动的相应公式

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (5.6)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (5.7)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad (5.8)$$

例 5.1

一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机(图 5.2),滑轮半径 $r=0.5\text{ m}$,如果升降机从静止开始以加速度 $a=0.4\text{ m/s}^2$ 匀加速上升,且缆索与滑轮之间不打滑,求:

- (1) 滑轮的角加速度。
- (2) 开始上升后, $t=5\text{ s}$ 末滑轮的角速度。
- (3) 在这5 s内滑轮转过的圈数。

解 (1) 由于升降机的加速度和轮缘上一点的切向加速度相等,根据式(5.4)可得滑轮的角加速度

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8\text{ (rad/s}^2\text{)}$$

(2) 利用匀加速转动公式(5.6),由于 $\omega_0=0$,所以5 s末滑轮的角速度为

$$\omega = \alpha t = 0.8 \times 5 = 4\text{ (rad/s)}$$

(3) 利用公式(5.7),得滑轮转过的角度

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10\text{ (rad)}$$

与此相应的圈数是 $\frac{10}{2\pi} = 1.6$ (圈)。

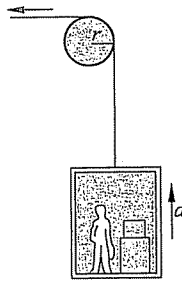


图 5.2 例 5.1 用图

5.2 转动定律

绕定轴转动的刚体的动力学规律是用它的角动量的变化来说明的。作为质点系,它应该服从质点系的角动量定理的一般形式,式(3.30),即

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.9)$$

此式为一矢量式,它沿某一选定的 z 轴的分量式为

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (5.10)$$

式中 M_z 和 L_z 分别为质点系所受的合外力矩和它的总角动量沿 z 轴的分量。

对于绕定轴转动的刚体,它的轴固定在惯性系中,我们就取这转轴为 z 轴。这样便可以用式(5.10)表示定轴转动的刚体的动力学规律。下面就推导对于刚体的 M_z 和 L_z 的具体形式。

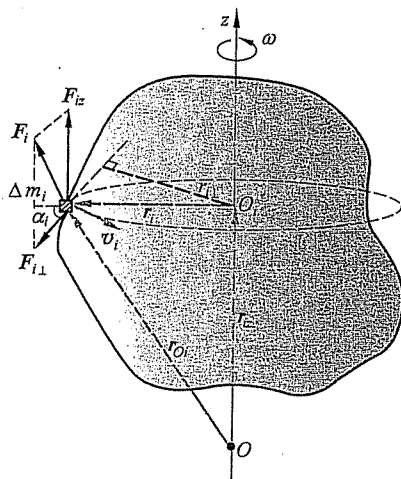


图 5.3 M_z 的计算

先考虑 M_z 。如图 5.3 所示,以 F_i 表示质元 Δm_i 所受的外力。注意式(5.9)和式(5.10)都是对于定点说的。取轴上一点 O , 相对于它来计算 M_i 和 M_z 。将 F_i 分解为垂直和平行于转轴两个分量 $F_{i\perp}$ 和 $F_{i\parallel}$, 则 F_i 对于 O 点的力矩为

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{F}_{i\perp} + \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{F}_{i\parallel}$$

由矢积定义可知,此式最后一项的方向和 z 轴垂直,它在 z 轴方向的分量自然为零。下面看它前面一项在 z 轴方向的分量。

将 $\mathbf{r}_{Oi}$ 分解为垂直和平行于转轴的两个分量 $\mathbf{r}_{i\perp}$ 和 $\mathbf{r}_{i\parallel}$, 则

$$\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{F}_{i\perp} = \mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{F}_{i\perp} + \mathbf{r}_{i\parallel} \times \mathbf{F}_{i\perp}$$

此式中最后一项方向也和 z 轴垂直,它在 z 轴方向的分量也是零。这样 $\mathbf{M}_i$ 的 z 轴分量就是 $\mathbf{r}_{i\perp} \times \mathbf{F}_{i\perp}$ 的 z 轴分量。由于此矢积的两个因子都垂直于 z 轴,所以这一矢积本身就沿 z 轴,其数值就是 M_{iz} 。以 α_i 表示 $\mathbf{r}_{i\perp}$ 和 $\mathbf{F}_{i\perp}$ 之间的夹角,则

$$M_{iz} = r_i F_{i\perp} \sin \alpha_i = r_{i\perp} F_{i\perp}$$

由于这一力矩分量是用转轴到质元 Δm_i 的距离 r_i 计算的,所以它又称做对于转轴的力矩,以区别于对于定点 O 的力矩。

考虑到所有外力,可得作用在定轴转动的刚体上的合外力矩的 z 向分量,即对于转轴的合外力矩为

$$M_z = \sum M_{iz} = \sum r_i F_{i\perp} \sin \alpha_i \quad (5.11)$$

现在考虑 L_z 。如图 5.4 所示, 质元 Δm_i 对于定点 O 的角动量为

$$\mathbf{L}_i = \Delta m_i \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{v}_i$$

方向如图所示, 大小为

$$L_i = \Delta m_i r_{Oi} v_i$$

此角动量沿 z 轴的分量为

$$L_{iz} = L_i \sin \theta = \Delta m_i r_{Oi} v_i \sin \theta$$

由于 $r_{Oi} \sin \theta = r_i$, 为从 Δm_i 到转轴的垂直距离, 而 $v_i = r_i \omega$, 所以

$$L_{iz} = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

整个刚体的总角动量沿 z 轴的分量, 亦即刚体沿 z 轴的角动量为

$$L_z = \sum L_{iz} = \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega \quad (5.12)$$

此式中括号内的物理量 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 是由刚体的各质

元相对于固定转轴的分布所决定的, 与刚体的运动以及所受的外力无关。这个表示刚体本身相对于转轴的特征的物理量叫做刚体对于转轴的转动惯量, 常以 J_z 表示, 即

$$J_z = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (5.13)$$

这样, 式(5.12)又可写为

$$L_z = J_z \omega \quad (5.14)$$

利用此式, 可以将式(5.10)用于刚体定轴转动的形式而写成

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \alpha$$

在约定固定轴为 z 轴的情况下, 常略去此式中的下标而写成

$$M = J \alpha \quad (5.15)$$

此式表明, 刚体所受的对于某一固定转轴的合外力矩等于刚体对此转轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积。这一角动量定理用于刚体定轴转动的具体形式, 叫做刚体定轴转动定律。

将式(5.15)和牛顿第二定律公式 $F=ma$ 加以对比是很有启发性的。前者中的合外力矩相当于后者中的合外力, 前者中的角加速度相当于后者中的加速度, 而刚体的转动惯量 J 则和质点的惯性质量 m 相对应。可以说, 转动惯量表示刚体在转动过程中表现出的惯性。转动惯量这一词正是这样命名的。

相对于质心的转动定律

上面由式(5.9), 即式(3.30), 导出了式(5.15), $M=J\alpha$ 。同样地, 可以由式(3.34), 即对质心系的角动量定理, $M_C = dL_C/dt$ 导出相对于质心的转动定律

$$M_C = J_C \alpha \quad (5.16)$$

其中 J_C 是刚体对于通过其质心的轴的转动惯量, M_C 是外力对于此轴的合外力矩, α 就是刚体在 M_C 的

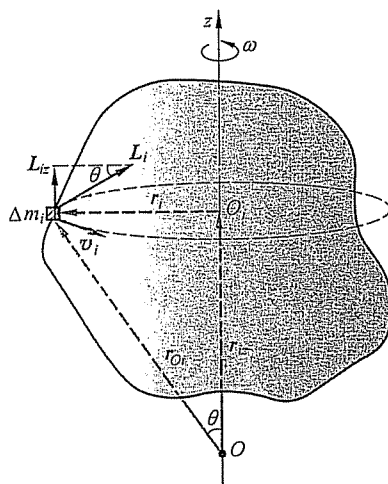


图 5.4 L_{iz} 的计算

作用下绕此轴的角加速度。

注意,式(5.15)和式(5.16)虽然形式上一样,但式(5.16)也适用于整个刚体运动的情况,而且不管其质心是否加速式(5.16)都成立。

5.3 转动惯量的计算

应用定轴转动定律式(5.15)时,我们需要先求出刚体对固定转轴(取为 z 轴)的转动惯量。按式(5.13),转动惯量由下式定义:

$$J = J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

对于质量连续分布的刚体,上述求和应以积分代替,即

$$J = \int r^2 dm$$

式中 r 为刚体质元 dm 到转轴的垂直距离。

由上面两公式可知,刚体对某转轴的转动惯量等于刚体中各质元的质量和它们各自离该转轴的垂直距离的平方的乘积的总和,它的大小不仅与刚体的总质量有关,而且和质量相对于轴的分布有关。其关系可以概括为以下三点:

- (1) 形状、大小相同的均匀刚体总质量越大,转动惯量越大。
- (2) 总质量相同的刚体,质量分布离轴越远,转动惯量越大。
- (3) 同一刚体,转轴不同,质量对轴的分布就不同,因而转动惯量就不同。

在国际单位制中,转动惯量的量纲为 ML^2 ,单位名称是千克二次方米,符号为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

下面举几个求刚体的转动惯量的例子。

例 5.2

圆环。求质量为 m ,半径为 R 的均匀薄圆环的转动惯量,轴与圆环平面垂直并且通过其圆心。

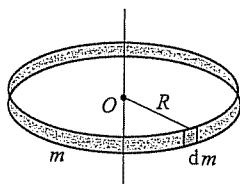


图 5.5 例 5.2 用图

解 如图 5.5 所示,环上各质元到轴的垂直距离都相等,而且等于 R ,所以

$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm$$

后一积分的意义是环的总质量 m ,所以有

$$J = mR^2 \quad (5.17)$$

由于转动惯量是可加的,所以一个质量为 m ,半径为 R 的薄壁圆筒对其轴的转动惯量也是 mR^2 。

例 5.3

圆盘。求质量为 m ,半径为 R ,厚为 l 的均匀圆盘的转动惯量,轴与盘面垂直并通过盘心。

解 如图 5.6 所示,圆盘可以认为是由许多薄圆环组成。取任一半径为 r ,宽度为 dr 的薄圆环。它的转动惯量按例 5.2 计算出的结果为

$$dJ = r^2 dm$$

其中 dm 为薄圆环的质量。以 ρ 表示圆盘的密度, 则有

$$dm = \rho 2\pi r l dr$$

代入上一式可得

$$dJ = 2\pi r^3 l \rho dr$$

因此

$$J = \int dJ = \int_0^R 2\pi r^3 l \rho dr = \frac{1}{2} \pi R^4 l \rho$$

由于

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}$$

所以

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad (5.18)$$

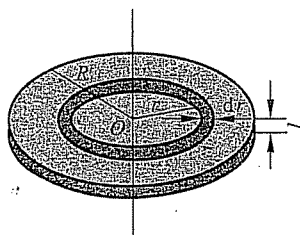


图 5.6 例 5.3 用图

此例中对 l 并不限制, 所以一个质量为 m , 半径为 R 的均匀实心圆柱对其轴的转动惯量也是

$$\frac{1}{2} m R^2.$$

例 5.4

细棒。求长度为 L , 质量为 m 的均匀细棒 AB 的转动惯量:

(1) 对于通过棒的一端与棒垂直的轴;

(2) 对于通过棒的中点与棒垂直的轴。

解 (1) 如图 5.7(a) 所示, 沿棒长方向取 x 轴。取任一长度元 dx 。以 ρ_l 表示单位长度的质量, 则这一长度元的质量为 $dm = \rho_l dx$ 。对于在棒的一端的轴来说,

$$J_A = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho_l dx = \frac{1}{3} \rho_l L^3$$

将 $\rho_l = m/L$ 代入, 可得

$$J_A = \frac{1}{3} m L^2 \quad (5.19)$$

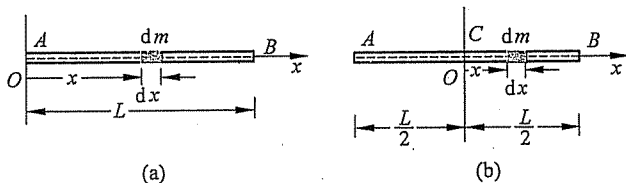


图 5.7 例 5.4 用图

(2) 对于通过棒的中点的轴来说, 如图 5.7(b) 所示, 棒的转动惯量应为

$$J_C = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \rho_l dx = \frac{1}{12} \rho_l L^3$$

以 $\rho_l = m/L$ 代入, 可得

$$J_C = \frac{1}{12} m L^2 \quad (5.20)$$

例 5.4 的结果明显地表示, 对于不同的转轴, 同一刚体的转动惯量不同。我们可以导

出一个对不同的轴的转动惯量之间的一般关系。以 m 表示刚体的质量, 以 J_C 表示它对于通过其质心 C 的轴的转动惯量。若另一个轴与此轴平行并且相距为 d (图 5.8), 则此刚体对于后一轴的转动惯量为

$$J = J_C + md^2 \quad (5.21)$$

这一关系叫做平行轴定理。其证明如下。

如图 5.8 所示, 取 x 轴垂直于两平行转轴并和它们相交。质元 Δm_i 到两个转轴的距离分别用 r_i' 和 r_i 表示。由余弦定理可得

$$r_i^2 = r_i'^2 + d^2 - 2dr_i' \cos \theta_i' = r_i'^2 + d^2 - 2dx_i'$$

式中 $x_i' = r_i' \cos \theta_i'$ 是 Δm_i 相对于质心 C 的 x 坐标值。由转动惯量定义公式 (5.13), 得刚体对于 z 轴的转动惯量为

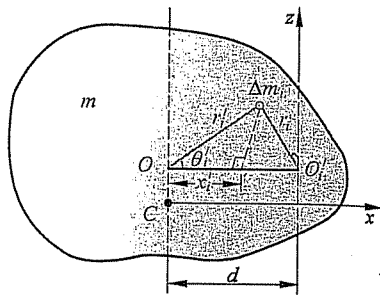


图 5.8 平行轴定理的证明

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i r_i'^2 + \left(\sum_i \Delta m_i \right) d^2 - 2d \sum_i \Delta m_i x_i'$$

按质心的定义, $\sum_i \Delta m_i x_i' = mx_C'$, 而此 x_C' 为质心相对于质心的 x 坐标值, 当然应等于零。上式右侧第一项就是 J_C , 因此上式可表示为

$$J = J_C + md^2$$

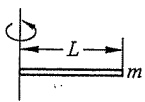
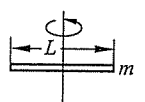
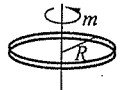
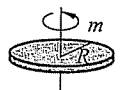
这正是式 (5.21)。

读者可以自己证明, 例 5.4 中的两个结果符合此公式。作为另一个例子, 利用例 5.3 的结果, 可以求出一个均匀圆盘对于通过其边缘一点且垂直于盘面的轴的转动惯量为

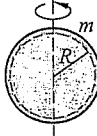
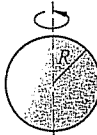
$$J = J_C + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

一些常见的均匀刚体的转动惯量在表 5.1 中给出。

表 5.1 一些均匀刚体的转动惯量

刚体形状	轴的位置	转动惯量
细杆 	通过一端垂直于杆	$\frac{1}{3}mL^2$
细杆 	通过中点垂直于杆	$\frac{1}{12}mL^2$
薄圆环 (或薄圆筒) 	通过环心垂直于环面(或中心轴)	mR^2
圆盘 (或圆柱体) 	通过盘心垂直于盘面(或中心轴)	$\frac{1}{2}mR^2$

续表

刚体形状	轴的位置	转动惯量
薄球壳		直径 $\frac{2}{3}mR^2$
球体		直径 $\frac{2}{5}mR^2$

5.4 转动定律的应用

应用转动定律式(5.15)解题还是比较容易的。不过要特别注意转动轴的位置和指向,也要注意力矩、角速度和角加速度的正负。下面举几个例题。

例 5.5

一个飞轮的质量 $m=60\text{ kg}$, 半径 $R=0.25\text{ m}$, 正在以 $\omega_0=1000\text{ r/min}$ 的转速转动。现在要制动飞轮(图 5.9), 要求在 $t=5.0\text{ s}$ 内使它均匀减速而最后停下来。求闸瓦对轮子的

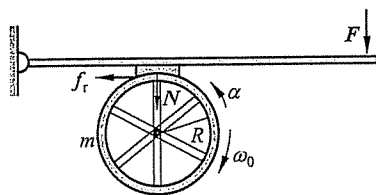


图 5.9 例 5.5 用图

的压力 N 为多大? 假定闸瓦与飞轮之间的滑动摩擦系数为 $\mu_k=0.8$, 而飞轮的质量可以看做全部均匀分布在轮的外周上。

解 飞轮在制动时一定有角加速度, 这一角加速度 α 可以用下式求出:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

以 $\omega_0=1000\text{ r/min}=104.7\text{ rad/s}$, $\omega=0$, $t=5\text{ s}$ 代入可得

$$\alpha = \frac{0 - 104.7}{5} = -20.9\text{ (rad/s}^2\text{)}$$

负值表示 α 与 ω_0 的方向相反, 和减速转动相对应。

飞轮的这一负加速度是外力矩作用的结果, 这一外力矩就是当用力 F 将闸瓦压紧到轮缘上时对轮缘产生的摩擦力的力矩, 以 ω_0 方向为正, 则此摩擦力矩应为负值。以 f_t 表示摩擦力的数值, 则它对轮的转轴的力矩为

$$M = -f_t R = -\mu NR$$

根据刚体定轴转动定律 $M = J\alpha$, 可得

$$-\mu NR = J\alpha$$

将 $J = mR^2$ 代入, 可解得

$$N = -\frac{mR\alpha}{\mu}$$

代入已知数值,可得

$$N = -\frac{60 \times 0.25 \times (-20.9)}{0.8} = 392 \text{ (N)}$$

例 5.6

如图 5.10 所示,一个质量为 M ,半径为 R 的定滑轮(当做均匀圆盘)上面绕有细绳。绳的一端固定在滑轮边上,另一端挂一质量为 m 的物体而下垂。忽略轴处摩擦,求物体 m 由静止下落 h 高度时的速度和此时滑轮的角速度。

解 图中二拉力 T_1 和 T_2 的大小相等,以 T 表示。

对定滑轮 M ,由转动定律,对于轴 O ,有

$$RT = J\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

对物体 m ,由牛顿第二定律,沿 y 方向,有

$$mg - T = ma$$

滑轮和物体的运动学关系为

$$a = R\alpha$$

联立解以上三式,可得物体下落的加速度为

$$a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}g$$

物体下落高度 h 时的速度为

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

这时滑轮转动的角速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}}{R}$$

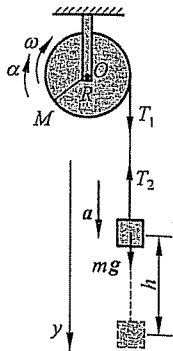


图 5.10 例 5.6 用图

例 5.7

一根长 l , 质量为 m 的均匀细直棒, 其一端有一固定的光滑水平轴, 因而可以在竖直面内转动。最初棒静止在水平位置, 求它由此下摆 θ 角时的角加速度和角速度, 这时棒受轴的力的大小、方向各如何?

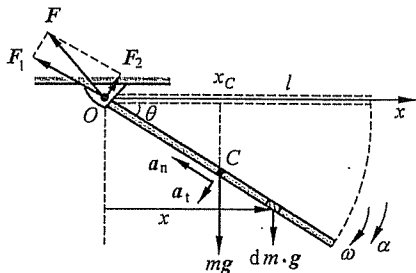


图 5.11 例 5.7 用图

解 讨论此棒的下摆运动时, 不能再把它看成质点, 而应作为刚体转动来处理。这需要用转动定律。

棒的下摆是一加速转动, 所受外力矩即重力对转轴 O 的力矩。取棒上一小段, 其质量为 dm (图 5.11)。在棒下摆任意角度 θ 时, 它所受重力对轴 O 的力矩是 $x dm \cdot g$, 其中 x 是 dm 对轴 O 的水平坐标。整个棒受的重力对轴 O 的力矩就是

$$M = \int x dm \cdot g = g \int x dm$$

由质心的定义, $\int x dm = mx_c$, 其中 x_c 是质心对于轴 O 的 x 坐标。因而可得

$$M = mgx_c$$

这一结果说明重力对整个棒的合力矩就和全部重力集中作用于质心所产生的力矩一样。

由于

$$x_c = \frac{1}{2}l \cos \theta$$

所以有

$$M = \frac{1}{2}mgl \cos \theta$$

代入定轴转动定律式(5.15)可得棒的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgl \cos \theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

又因为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

所以有

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

即

$$\omega d\omega = \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta$$

两边积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta$$

可得

$$\omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{l}$$

从而有

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$

为了求出棒受轴的力, 需考虑棒的质心 C 的运动而用质心运动定理。当棒下摆到 θ 角时, 其质心有

法向加速度:

$$a_n = \omega^2 \frac{l}{2} = \frac{3g \sin \theta}{2l}$$

切向加速度:

$$a_t = \alpha \frac{l}{2} = \frac{3g \cos \theta}{4}$$

以 F_1 和 F_2 分别表示棒受轴的沿棒的方向和垂直于棒的方向的分力, 则由质心运动定理得

法向:

$$F_1 - mg \sin \theta = ma_n = \frac{3}{2}mg \sin \theta$$

切向:

$$mg \cos \theta - F_2 = ma_t = \frac{3}{4}mg \cos \theta$$

由此得

$$F_1 = \frac{5}{2}mg \sin \theta, \quad F_2 = \frac{1}{4}mg \cos \theta$$

棒受轴的力的大小为

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{1}{4}mg\sqrt{99\sin^2\theta + 1}$$

此力与棒此时刻的夹角为

$$\beta = \arctan \frac{F_2}{F_1} = \arctan \frac{\cos\theta}{10\sin\theta}$$

5.5 角动量守恒

用于质点系的角动量定理的分量式(5.10)重写如下:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

如果 $M_z=0$, 则 $L_z=\text{常量}$ 。这就是说, 对于一个质点系, 如果它受的对于某一固定轴的合外力矩为零, 则它对于这一固定轴的角动量保持不变。这个结论叫对定轴的角动量守恒定律。这里指的质点系可以不是刚体, 其中的质点也可以组成一个或几个刚体。一个刚体的角动量可以用 $J\omega$ (即 $J_z\omega$) 求出。应该注意的是一个系统内的各个刚体或质点的角动量必须是对同一个固定轴说的。

定轴转动中的角动量守恒很容易演示。例如让一个人坐在有竖直光滑轴的转椅上, 手持哑铃, 两臂伸平(图 5.12(a)), 用手推他, 使他转起来。当他把两臂收回使哑铃贴在胸前时, 他的转速就明显地增大(图 5.12(b))。这个现象可以用角动量守恒解释如下。把人在两臂伸平时和收回以后都当成一个刚体, 分别以 J_1 和 J_2 表示他对固定竖直轴的转动惯量, 以 ω_1 和 ω_2 分别表示两种状态时的角速度。由于人在收回手臂时对竖直轴并没有受到外力矩的作用, 所以他的角动量应该守恒, 即 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ 。很明显, $J_2 < J_1$, 因此 $\omega_2 > \omega_1$ 。

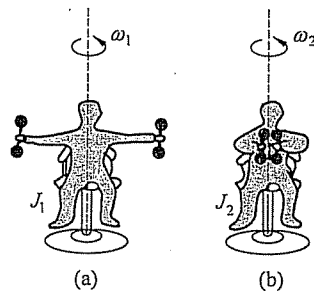


图 5.12 角动量守恒演示

式(5.10)虽然是对定轴转动说的, 但在 3.9 节已经证明, 在物体有整体运动的情况下, 如果考虑它绕通过其质心的轴的转动, 根据式(3.34), 式(5.10)仍然适用, 而与质心做何种运动无关。因此, 只要物体所受的对于通过其质心的轴的合外力矩为零, 它对这根轴的角动量也保持不变。利用角动量守恒定律的这个意义, 可以解释许多现象。例如运动员表演空中翻滚时, 总是先纵身离地使自己绕通过自身质心的水平轴有一缓慢的转动。在空中时就尽量蜷缩四肢, 以减小转动惯量从而增大角速度, 迅速翻转。待要着地时又伸开四肢增大转动惯量以便以较小的角速度安稳地落至地面。

刚体的角动量守恒在现代技术中的一个重要应用是惯性导航, 所用的装置叫回转仪, 也叫“陀螺”。它的核心部分是装置在常平架上的一个质量较大的转子(图 5.13)。常平架由套在一起且分别具有竖直轴和水平轴的两个圆环组成。转子装在内环上, 其轴与内环的轴垂直。转子是精确地对称于其转轴的圆柱, 各轴承均高度润滑。这样转子就具有可以绕其自由转动的三个相互垂直的轴。因此, 不管常平架如何移动或转动, 转子都不会

受到任何力矩的作用。所以一旦使转子高速转动起来,根据角动量守恒定律,它将保持其对称轴在空间的指向不变。安装在船、飞机、导弹或宇宙飞船上的这种回转仪就能指出这些船或飞行器的航向相对于空间某一定向的方向,从而起到导航的作用。在这种应用中,往往用三个这样的回转仪并使它们的转轴相互垂直,从而提供一套绝对的笛卡儿直角坐标系。读者可以想一下,这些转子竟能在浩瀚的太空中认准一个确定的方向并且使自己的转轴始终指向它而不改变。多么不可思议的自然界啊!

上述惯性导航装置出现不过一百年,但常平架在我国早就出现了。那是西汉(公元1世纪)丁缓设计制造但后来失传的“被中香炉”(图 5.14)。他用两个套在一起的环形支架架住一个小香炉,香炉由于受有重力总是悬着。不管支架如何转动,香炉总不会倾倒。遗憾的是这种装置只是用来保证被中取暖时的安全,而没有得到任何技术上的应用。虽然如此,它也闪现了我们祖先的智慧之光。

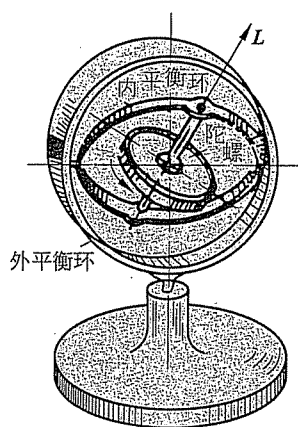


图 5.13 回转仪

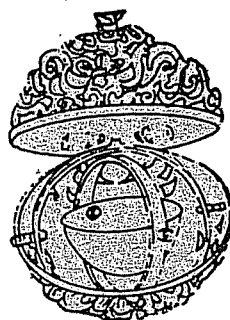


图 5.14 被中香炉

为了对角动量的大小有个量的概念,表 5.2 列出了一些典型的角动量的数值。

表 5.2 典型的角动量的数值

 $J \cdot s$

太阳系所有行星的轨道运动	3.2×10^{43}	玩具陀螺	1×10^{-1}
地球公转	2.7×10^{40}	致密光盘放音	7×10^{-4}
地球自转	5.8×10^{33}	步枪子弹的自旋	2×10^{-3}
直升机螺旋桨(320 r/min)	5×10^4	基态的氢原子中电子的轨道运动	1.05×10^{-34}
汽车轮子(90 km/h)	1×10^2	电子的自旋	0.53×10^{-34}
电扇叶片	1		

例 5.8

一根长 l , 质量为 M 的均匀直棒, 其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。今有一子弹, 质量为 m , 以水平速度 v_0 射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。

解 由于从子弹进入棒到二者开始一起运动所经过的时间极短, 在这一过程中棒的位置基本不

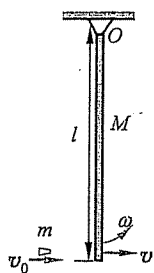


图 5.15 例 5.8 用图

变,即仍然保持竖直(图 5.15)。因此,对于木棒和子弹系统,在子弹冲入过程中,系统所受的外力(重力和轴的支持力)对于轴 O 的力矩都是零。这样,系统对轴 O 的角动量守恒。以 v 和 ω 分别表示子弹和木棒一起开始运动时木棒端点的速度和角速度,则角动量守恒给出

$$mlv_0 = mlv + \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

再利用关系式 $v = l\omega$, 就可解得

$$\omega = \frac{3m}{3m+M} \frac{v_0}{l}$$

将此题和例 3.4 比较一下是很有启发性的。注意,这里,在子弹冲入棒的过程中,木棒和子弹系统的总动量并不守恒。

例 5.9

一个质量为 M , 半径为 R 的水平均匀圆盘可绕通过中心的光滑竖直轴自由转动。在盘缘上站着一个质量为 m 的人,二者最初都相对地面静止。当人在盘上沿盘边走一周时,盘对地面转过的角度多大?

解 如图 5.16 所示,对盘和人组成的系统,在人走动时系统所受的对竖直轴的外力矩为零,所以系统对此轴的角动量守恒。以 j 和 J 分别表示人和盘对轴的转动惯量,并以 ω 和 Ω 分别表示任一时刻人和盘绕轴的角速度。由于起始角动量为零,所以角动量守恒给出

$$j\omega - J\Omega = 0$$

其中 $j = mR^2$, $J = \frac{1}{2}MR^2$, 以 θ 和 Θ 分别表示人和盘对地面发生的角位移,则

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\Theta}{dt}$$

代入上一式得

$$mR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\Theta}{dt}$$

两边都乘以 dt , 并积分

$$\int_0^\theta mR^2 d\theta = \int_0^\Theta \frac{1}{2}MR^2 d\Theta$$

由此得

$$m\theta = \frac{1}{2}M\Theta$$

人在盘上走一周时

$$\theta = 2\pi - \Theta$$

代入上式可解得

$$\Theta = \frac{2m}{2m+M} \times 2\pi$$

将此例题和例 3.5 比较一下,也是很有启发性的。

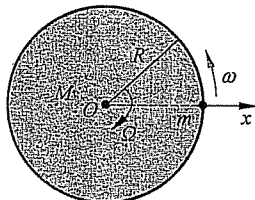


图 5.16 例 5.9 用图

例 5.10

如图 5.17 所示的宇宙飞船对于其中心轴的转动惯量为 $J = 2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 正以 $\omega =$

0.2 rad/s 的角速度绕中心轴旋转。宇航员想用两个切向的控制喷管使飞船停止旋转。每个喷管的位置与轴线距离都是 $r=1.5\text{ m}$ 。两喷管的喷气流量恒定,共是 $q=2\text{ kg/s}$ 。废气的喷射速率(相对于飞船周边) $u=50\text{ m/s}$,并且恒定。问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转。

解 把飞船和排出的废气 m 当做研究系统,可以认为废气质量远小于飞船质量,所以原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量,即

$$L_0 = J\omega$$

在喷气过程中,以 dm 表示 dt 时间内喷出的气体,这些气体对中心轴的角动量为 $dm \cdot r(u+v)$,方向与飞船的角动量方向相同。由于 $u=50\text{ m/s}$,比飞船周边的速率 $v(v=\omega r)$ 大得多,所以此角动量近似地等于 $dm \cdot ru$ 。在整个喷气过程中喷出的废气的总的角动量 L_g 应为

$$L_g = \int_0^m dm \cdot ru = mru$$

式中 m 是喷出废气的总质量。当宇宙飞船停止旋转时,它的角动量为零,系统的总角动量 L_1 就是全部排出的废气的总角动量,即

$$L_1 = L_g = mru$$

在整个喷射过程中,系统所受的对于飞船中心轴的外力矩为零,所以系统对于此轴的角动量守恒,即 $L_0 = L_1$ 。由此得

$$J\omega = mru$$

即

$$m = \frac{J\omega}{ru}$$

而所求的时间为

$$t = \frac{m}{q} = \frac{J\omega}{qru} = \frac{2 \times 10^3 \times 0.2}{2 \times 1.5 \times 50} = 2.67\text{ (s)}$$

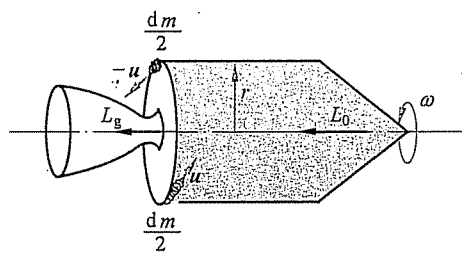


图 5.17 例 5.10 用图

5.6 转动中的功和能

在刚体转动时,作用在刚体上某点的力做的功仍用此力和受力作用的质元的位移的点积来定义。但对于刚体这个特殊质点系,在转动中力做的功可以用一个特殊形式表示,下面来导出这个特殊表示式。

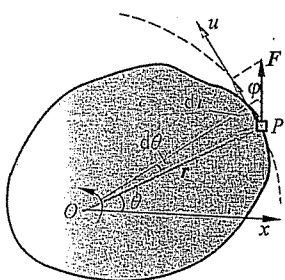


图 5.18 外力矩对刚体做的功

以 F 表示作用在刚体上 P 点的外力(图 5.18),当物体绕固定轴 O (垂直于纸面)有一角位移 $d\theta$ 时,力 F 做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \varphi |d\mathbf{r}| = F \cos \varphi r d\theta$$

由于 $F \cos \varphi$ 是力 F 沿 $d\mathbf{r}$ 方向的分量,因而垂直于 r 的方向,所以 $F \cos \varphi r$ 就是力对转轴的力矩 M 。因此有

$$dA = M d\theta \quad (5.22)$$

即力对转动刚体做的元功等于相应的力矩和角位移的乘积。

对于有限的角位移,力做的功应该用积分

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (5.23)$$

求得。上式常叫力矩的功。它就是力做的功在刚体转动中的特殊表示形式。

力矩做的功对刚体运动的影响可以通过转动定律导出。将转动定律式(5.15)两侧乘以 $d\theta$ 并积分, 可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega$$

演算后一积分, 可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

等式左侧是合外力矩对刚体做的功 A 。作为质点系, 可证明, 绕固定转轴转动的刚体中各质元的总动能, 即刚体的转动动能为(见习题 5.14)

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5.24)$$

这样上式就可写成

$$A = E_{k2} - E_{k1} \quad (5.25)$$

这一公式与质点的动能定理类似, 我们可称之为定轴转动的动能定理。它说明, 合外力矩对一个绕固定轴转动的刚体所做的功等于它的转动动能的增量。

例 5.11

某一冲床利用飞轮的转动动能通过曲柄连杆机构的传动, 带动冲头在铁板上穿孔。已知飞轮的半径为 $r=0.4\text{ m}$, 质量为 $m=600\text{ kg}$, 可以看成均匀圆盘。飞轮的正常转速是 $n_1=240\text{ r/min}$, 冲一次孔转速减低 20%。求冲一次孔, 冲头做了多少功?

解 以 ω_1 和 ω_2 分别表示冲孔前后飞轮的角速度, 则

$$\omega_1 = 2\pi n_1 / 60, \quad \omega_2 = (1 - 0.2)\omega_1 = 0.8\omega_1$$

由转动动能定理式(5.25), 可得冲一次孔铁板阻力对冲头-飞轮做的功为

$$\begin{aligned} A &= E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} J \omega_1^2 (0.8^2 - 1) = \frac{1}{4} m r^2 \omega_1^2 (0.8^2 - 1) \\ &= \frac{1}{3600} \pi^2 m r^2 n_1^2 (0.8^2 - 1) \end{aligned}$$

将已知数值代入, 可得

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3600} \times \pi^2 \times 600 \times 0.4^2 \times 240^2 \times (0.8^2 - 1) \\ &= -5.45 \times 10^3 (\text{J}) \end{aligned}$$

这是冲一次孔铁板阻力对冲头做的功, 它的大小也就是冲一次孔冲头克服此阻力做的功。

如果一个刚体受到保守力的作用, 也可以引入势能的概念。例如在重力场中的刚体就具有一定的重力势能, 它的重力势能就是它的各质元重力势能的总和。对于一个不太

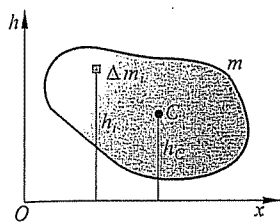


图 5.19 刚体的重力势能

大, 质量为 m 的刚体(图 5.19), 它的重力势能为

$$E_p = \sum_i \Delta m_i g h_i = g \sum_i \Delta m_i h_i$$

根据质心的定义, 此刚体的质心的高度应为

$$h_c = \frac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m}$$

所以上式可以写成

$$E_p = mgh_c \quad (5.26)$$

这一结果说明, 一个不太大的刚体的重力势能和它的全部质量集中在质心时所具有的势能一样。

对于包括有刚体的系统, 如果在运动过程中, 只有保守内力做功, 则这系统的机械能也应该守恒。下面举两个例子。

例 5.12

利用机械能守恒定律重解例 5.6, 求物体 m 下落 h 高度时的速度。

解 仍参看图 5.10。以滑轮、物体和地球作为研究的系统。在物体 m 下落的过程中, 滑轮随同转动。滑轮轴对滑轮的支持力(外力)不做功(因为无位移)。 T_1 拉动物体做负功, T_2 拉动轮缘做正功。由于物体下落距离与轮缘转过的距离相等, 所以这一对外力做的功之和为零。因此, 对于所考虑的系统只有重力这一保守力做功, 所以机械能守恒。

滑轮的重力势能不变, 可以不考虑。取物体的初始位置为重力势能零点, 则系统的初态的机械能为零, 末态的机械能为

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h)$$

机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$$

将关系式 $J = \frac{1}{2}MR^2$, $\omega = \frac{v}{R}$ 代入上式, 即可求得

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

与例 5.6 得出的结果相同。

例 5.13

利用机械能守恒定律重解例 5.7, 求棒下摆 θ 角时的角速度。

解 仍参看图 5.11, 取棒和地球为研究的系统, 由于在棒下摆的过程中, 外力(轴对棒的支持力)不做功, 只有重力做功, 所以系统的机械能守恒。取棒的水平初位置为势能零点, 机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + mg(-h_c) = 0$$

利用公式 $J = \frac{1}{3}ml^2$, $h_c = \frac{1}{2}l\sin\theta$, 就可解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

也与前面结果相同。

* 例 5.14

一圆柱形石滚, 质量为 $M=250\text{ kg}$, 半径为 $R=30\text{ cm}$, 轴半径为 $R_a=5\text{ cm}$ 。今沿轴的上方水平切线方向加以 $F=100\text{ N}$ 的恒定拉力使之沿水平地面无滑动地滚动。求开始拉动后 $\Delta t=5\text{ s}$ 内石滚前进的距离以及它在 $t=5\text{ s}$ 时的前进的速率和滚动的角速率。

解 如图 5.20 所示, 设在 dt 时间内石滚的质心由 C_1 移动到 C , 经过的距离为 ds 。由于只有滚动而无滑动, 石滚的表面上原来与地面上点 P_1 接触的点到现在与地面上点 P 接触的点之间的弧长 $Rd\theta$ 一定等于 ds , 其中 $d\theta$ 是石滚在 dt 时间内转过的角度。由此, 石滚以质心为代表的前进的速率为

$$v_c = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R\omega$$

式中 ω 为石滚转动的角速率。质心运动的加速度为

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

式中 α 为石滚转动的角加速度。

以上是无滑动的滚动中的运动学关系。现在再看动力学关系。这时要注意石滚除受力 F 外, 还必须受到地面在与石滚面接触处 (P 点) 对它的静摩擦力 f 。这是因为如果地面是光滑的, 石滚表面与地面接触的点必然向后滑动。只滚不滑要求该点必然相对地面瞬时静止, 而这就意味着该点受到了地面的静摩擦力, 而且其方向是向前的。据此对石滚用质心运动定律, 式(3.18), 可得

$$F - f = Ma_c = MR\alpha$$

再对石滚的质心用转动定理, 式(5.16), 可得

$$FR_a - fR = J_c\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

联立解上二式可得

$$\alpha = \frac{2F(R - R_a)}{MR^2} = \frac{2 \times 100 \times (0.30 - 0.10)}{250 \times 0.30^2} = 1.78 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

在起动后, $\Delta t=5\text{ s}$ 内石滚前进的距离为

$$s = \frac{1}{2}a_c(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}R\alpha(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \times 0.30 \times 1.78 \times 5^2 = 6.7 \text{ (m)}$$

在 $t=5\text{ s}$ 时, 石滚前进的速率为

$$v_c = a_c t = R\alpha t = 0.30 \times 1.78 \times 5 = 7 \text{ (m/s)}$$

石滚转动的角速率为

$$\omega = \alpha t = 1.78 \times 5 = 8.9 \text{ (rad/s)}$$

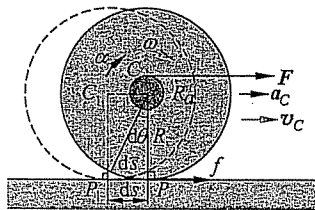


图 5.20 例 5.14 用图

* 例 5.15

一个质量为 m , 半径为 R 的均匀实心圆球在倾角为 θ 的斜面上由静止无滑动地滚下。求它滚下高度 h 时的速率和转动的角速度。

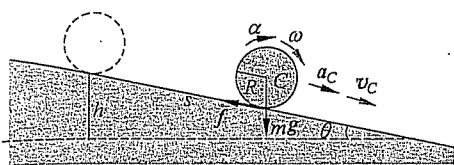


图 5.21 例 5.15 用图

解 如图 5.21 所示。球在滚下时除受重力外, 由于无滑动, 还要受到斜面对它的静摩擦力。如果斜面是光滑的, 球必然向下滑动, 因而此静摩擦力 f 的方向是沿斜面向上的。

对球, 沿斜面方向用质心运动定理式(3.18), 有

$$mg \sin \theta - f = ma_c = mR\alpha$$

对球的质心用转动定理, 式(5.16), 有

$$fR = J_c \alpha = \frac{2}{5} mR^2 \alpha$$

联立解上两式, 可得

$$\alpha = \frac{5g \sin \theta}{7R}$$

由此得

$$a_c = R\alpha = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

二者皆为常量。所以球的质心沿斜面方向匀加速下降, 而且球对通过质心的水平轴匀加速转动。

球下降高度 h 时, 速率为

$$v_c = \sqrt{2a_c s} = \sqrt{2 \times \frac{5}{7} g \sin \theta \times \frac{h}{\sin \theta}} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

转动的角速度为

$$\omega = v_c / R = \sqrt{\frac{10}{7} gh} / R$$

本题也可以用功能关系求解。球原来有重力势能 mgh 。落下高度 h 时具有动能。按柯尼希定理, 式(4.11), 此动能为 $\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$ 。由于下滚过程中静摩擦力不做功, 所以球和地球系统的机械能守恒, 即

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

以 $\omega = v_c / R$ 和 $J_c = \frac{2}{5}mR^2$ 代入, 可解得

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7} gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{7} gh} / R$$

与上一解法的结果相同。

* 5.7 进动

本节介绍一种刚体的转动轴不固定的情况。如图 5.21 所示, 一个飞轮(实验室中常用一个自行车轮)的轴的一端做成球形, 放在一根固定竖直杆顶上的凹槽内。先使轴保持水平, 如果这时松手, 飞轮当然会下落。如果使飞轮高速地绕自己的对称轴旋转起来(这种旋转叫自旋), 当松手后, 则出乎意料地飞轮并不下落, 但它的轴会在水平面内以杆顶为中心转动起来。这种高速自旋的物体的轴在空间转动的现象叫进动。

为什么飞轮的自旋轴不下落而转动呢? 这可以用角动量定理式(5.9)加以解释。根据式(5.9), 可得出在 dt 时间内飞轮对支点的自旋角动量矢量 L 的增量为

$$dL = Mdt \quad (5.27)$$

式中 M 为飞轮所受的对支点的外力矩。在飞轮轴为水平的情况下,以 m 表示飞轮的质量,则这一力矩的大小为

$$M = rmg$$

在图 5.22 所示的时刻, M 的方向为水平而且垂直于 L 的方向,顺着 L 方向看去指向 L 左侧(图 5.23)。因此 dL 的方向也水平向左。既然这增量是水平方向的,所以 L 的方向,也就是自旋轴的方向,就不会向下倾斜,而是要水平向左偏转了。继续不断地向左偏转就形成了自旋轴的转动。这就是说进动现象正是自旋的物体在外力矩的作用下沿外力矩方向改变其角动量矢量的结果。

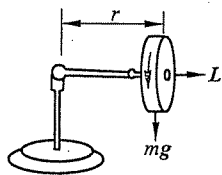


图 5.22 进动现象

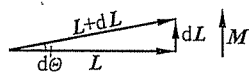


图 5.23 L, M 和 dL 方向关系图(俯视)

在图 5.22 中,由于飞轮所受的力矩的大小不变,方向总是水平地垂直于 L ,所以进动是匀速的。从图 5.23 可以看出,在 dt 时间内自旋轴转过的角度为

$$d\theta = \frac{|dL|}{L} = \frac{Mdt}{L}$$

而相应的角速度,叫进动角速度,为

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{L} \quad (5.28)$$

常见的进动实例是陀螺的进动。在不旋转时,陀螺就躺在地面上(图 5.24(a))。当使它绕自己的对称轴高速旋转时,即使轴线已倾斜,它也不会倒下来(图 5.24(b))。它的轴要沿一个圆锥面转动。这一圆锥面的轴线是竖直的,锥顶就在陀螺尖顶与地面接触处。陀螺的这种进动也是重力矩作用的结果。虽然这时重力的方向与陀螺轴线的方向并不垂直,但不难证明,这时陀螺进动的角速度,即它的自旋轴绕竖直轴转动的角速度,可按下式求出:

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \theta} \quad (5.29)$$

其中 θ 为陀螺的自旋轴与圆锥的轴线之间的夹角。

技术上利用进动的一个实例是炮弹在空中的飞行(图 5.25)。炮弹在飞行时,要受到空气阻力的作用。阻力 f 的方向总与炮弹质心的速度 v_c 方向相反,但其合力不一定通过质心。阻力对质心的力矩就会使炮弹在空中翻转。这样,当炮弹射中目标时,就有可能是弹尾先触目标而不引爆,从而丧失威力。为了避免这种事故,就在炮筒内壁上刻出螺旋线。这种螺旋线叫来复线。当炮弹由于发射药的爆炸被强力推出炮筒时,还同时绕自己的对称轴高速旋转。由于这种旋转,它在飞行中受到的空气阻力的力矩将不能使它翻转,而只是使它绕着质心前进的方向进动。这样,它的轴线将会始终只与前进的方向有不大的偏离,而弹头就总是大致指向前方了。

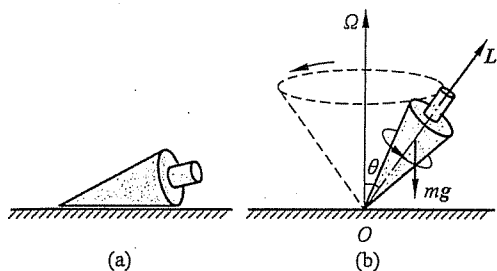


图 5.24 陀螺的进动

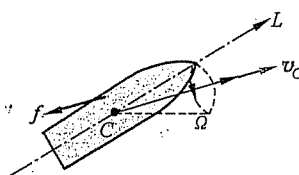


图 5.25 炮弹飞行时的进动

应该指出,在图 5.22 所示的实验中,如果飞轮的自旋速度不是太大,则它的轴线在进动时,还会上上下下周性地摆动。这种摆动叫章动。式(5.28)或式(5.29)并没有给出这种摆动的效果。这是因为我们在推导式(5.28)时做了一个简化,即认为飞轮的总角动量就是它绕自己的对称轴自旋的角动量。实际上它的总角动量 L 应该是自旋角动量和它的进动的角动量的矢量和。当高速旋转时,总角动量近似地等于飞轮的自旋角动量,这样就得出了式(5.28)与式(5.29)。更详尽的分析比较复杂,我们就不讨论了。

提要

1. 刚体的定轴转动:

$$\text{匀加速转动: } \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

2. 刚体定轴转动定律:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

以转动轴为 z 轴, $M_z = M$ 为外力对转轴的力矩之和; $L_z = J\omega$, J 为刚体对转轴的转动惯量,则

$$M = J\alpha$$

3. 刚体的转动惯量:

$$J = \sum m_i r_i^2, \quad J = \int r^2 dm$$

平行轴定理:

$$J = J_C + md^2$$

4. 刚体转动的功和能:

力矩的功:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

转动动能:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

刚体的重力势能:

$$E_p = mgh_C$$

机械能守恒定律: 只有保守力做功时,

$$E_k + E_p = \text{常量}$$

5. 对定轴的角动量守恒: 系统(包括刚体)所受的对某一固定轴的合外力矩为零时, 系统对此轴的总角动量保持不变。

* 6. 进动: 自旋物体在外力矩作用下, 自旋轴发生转动的现象。

7. 规律对比: 把质点的运动规律和刚体的定轴转动规律对比一下(见表 5.3), 有助于从整体上系统地理解力学定律。读者还应了解它们之间的联系。

表 5.3 质点的运动规律和刚体的定轴转动规律对比

质点的运动	刚体的定轴转动
速度 $v = \frac{dr}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$	角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$
质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
力 F	力矩 $M = r_{\perp} F_{\perp}$ ($\perp$ 表示垂直转轴)
运动定律 $F = ma$	转动定律 $M = J\alpha$
动量 $p = mv$	动量 $p = \sum_i \Delta m_i v_i$
角动量 $L = r \times p$	角动量 $L = J\omega$
动量定理 $F = \frac{d(mv)}{dt}$	角动量定理 $M = \frac{d(J\omega)}{dt}$
动量守恒 $\sum_i F_i = 0$ 时, $\sum_i m_i v_i = \text{恒量}$	角动量守恒 $M = 0$ 时, $\sum J\omega = \text{恒量}$
力的功 $A_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	力矩的功 $A_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta$
动能 $E_k = \frac{1}{2} mv^2$	转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
动能定理 $A_{AB} = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$	动能定理 $A_{AB} = \frac{1}{2} J\omega_B^2 - \frac{1}{2} J\omega_A^2$
重力势能 $E_p = mgh$	重力势能 $E_p = mgh_C$
机械能守恒 对封闭的保守系统, $E_k + E_p = \text{恒量}$	机械能守恒 对封闭的保守系统, $E_k + E_p = \text{恒量}$

思考题

5.1 一个有固定轴的刚体, 受有两个力的作用。当这两个力的合力为零时, 它们对轴的合力矩也一定是零吗? 当这两个力对轴的合力矩为零时, 它们的合力也一定是零吗? 举例说明之。

5.2 就自身来说, 你作什么姿势和对什么样的轴, 转动惯量最小或最大?

5.3 走钢丝的杂技演员, 表演时为什么要拿一根长直棍(图 5.26)?

5.4 两个半径相同的轮子,质量相同。但一个轮子的质量聚集在边缘附近,另一个轮子的质量分布比较均匀,试问:

(1) 如果它们的角动量相同,哪个轮子转得快?

(2) 如果它们的角速度相同,哪个轮子的角动量大?

5.5 假定时钟的指针是质量均匀的矩形薄片。分针长而细,时针短而粗,两者具有相等的质量。哪一个指针有较大的转动惯量? 哪一个有较大的动能与角动量?

5.6 花样滑冰运动员想高速旋转时,她先把一条腿和两臂伸开,并用脚蹬冰使自己转动起来,然后她再收拢腿和臂,这时她的转速就明显地加快了。这是利用了什麼原理?

5.7 一个站在水平转盘上的人,左手举一个自行车轮,使轮子的轴竖直(图 5.27)。当他用右手拨动轮缘使车轮转动时,他自己会同时沿相反方向转动起来。解释其中的道理。

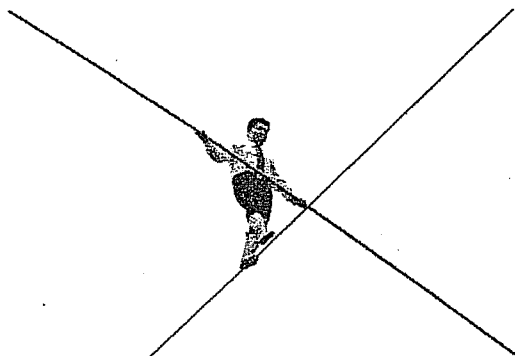


图 5.26 阿迪力走钢丝跨过北京野生动物园上空
(新京报记者陈杰)

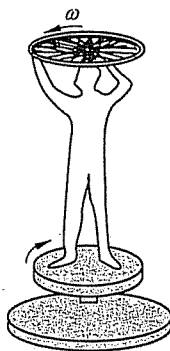


图 5.27 思考题 5.7 用图

5.8 刚体定轴转动时,它的动能的增量只决定于外力对它做的功而与内力的作用无关。对于非刚体也是这样吗? 为什么?

5.9 一定轴转动的刚体的转动动能等于其中各质元的动能之和,试根据这一理由推导转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 。

5.10 杂技节目“转碟”是用直杆顶住碟底突沿内侧(图 5.28)不断晃动,使碟子旋转不停,碟子就不会掉下。为什么? 碟子在旋转的同时,整个碟子还要围绕顶杆转。又是什么? 碟子围着顶杆转时,还会上下摆动,这是什么现象?

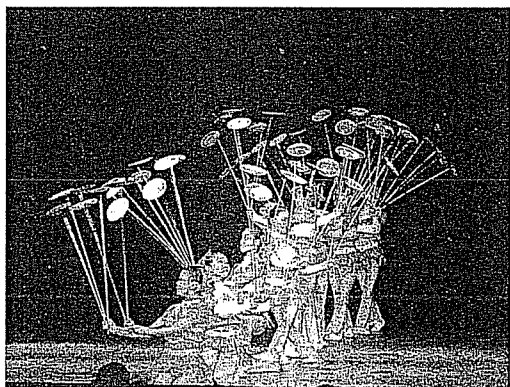


图 5.28 杂技“转碟”

5.11 抖单筒空竹的人在空竹绕水平轴旋转起来时,为了使两段拉线不致扭缠在一起,他自己就要不断旋转自己的身体(图 5.29)。为什么? 图示的人正不断地向右旋转,说明空竹本身是绕自己的轴向

什么方向旋转的(用箭头在空竹上标出)? 抖双筒空竹时,人还需要旋转吗?

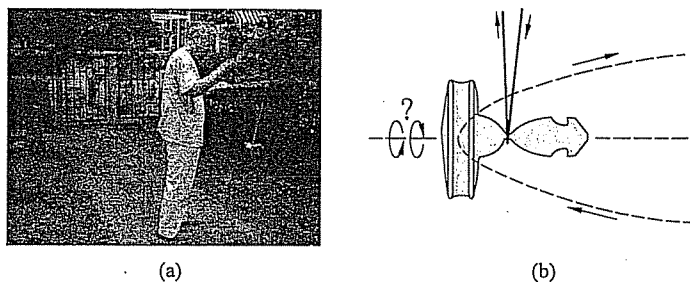


图 5.29 抖空竹

(a) 本书作者做抖空竹游戏; (b) 单筒空竹运动分析图

习题

5.1 掷铁饼运动员手持铁饼转动 1.25 圈后松手,此刻铁饼的速度值达到 $v=25 \text{ m/s}$ 。设转动时铁饼沿半径为 $R=1.0 \text{ m}$ 的圆周运动并且均匀加速,求:

- (1) 铁饼离手时的角速度;
- (2) 铁饼的角加速度;
- (3) 铁饼在手中加速的时间(把铁饼视为质点)。

5.2 一汽车发动机的主轴的转速在 7.0 s 内由 200 r/min 均匀地增加到 3000 r/min 。

- (1) 求在这段时间内主轴的初角速度和末角速度以及角加速度;
- (2) 求这段时间内主轴转过的角度和圈数。

5.3 地球自转是逐渐变慢的。在 1987 年完成 365 次自转比 1900 年长 1.14 s 。求在 1900 年到 1987 年这段时间内,地球自转的平均角加速度。

5.4 求位于北纬 40° 的颐和园排云殿(以图 5.30 中 P 点表示)相对于地心参考系的线速度与加速度的数值与方向。

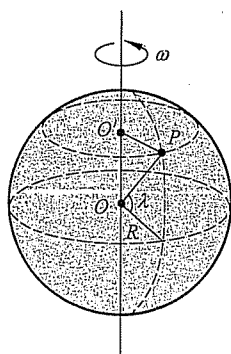


图 5.30 习题 5.4 用图

5.5 水分子的形状如图 5.31 所示。从光谱分析得知水分子对 AA' 轴的转动惯量是 $J_{AA'}=1.93 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 对 BB' 轴的转动惯量是 $J_{BB'}=1.14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。试由此数据和各原子的质量求出氢和氧原子间的距离 d 和夹角 θ 。假设各原子都可当质点处理。

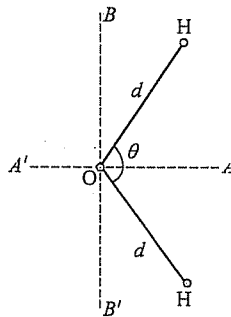


图 5.31 习题 5.5 用图

5.6 C_{60} (Fullerene, 富勒烯) 分子由 60 个碳原子组成, 这些碳原子各位于一个球形 32 面体的 60 个顶角上(图 5.32), 此球体的直径为 71 nm。

(1) 按均匀球面计算, 此球形分子对其一个直径的转动惯量是多少?

(2) 在室温下一个 C_{60} 分子的自转动能为 6.21×10^{-21} J。求它的自转频率。

5.7 一个氧原子的质量是 2.66×10^{-26} kg, 一个氧分子中两个氧原子的中心相距 1.21×10^{-10} m。求氧分子相对于通过其质心并垂直于二原子连线的轴的转动惯量。如果一个氧分子相对于此轴的转动动能是 2.06×10^{-21} J, 它绕此轴的转动周期是多少?

5.8 一个哑铃由两个质量为 m , 半径为 R 的铁球和中间一根长 l 的连杆组成(图 5.33)。和铁球的质量相比, 连杆的质量可以忽略。求此哑铃对于通过连杆中心并和它垂直的轴的转动惯量。它对于通过两球的连心线的轴的转动惯量又是多大?

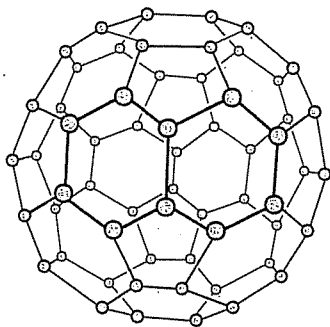


图 5.32 习题 5.6 用图

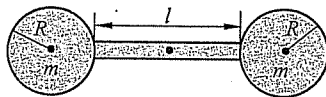


图 5.33 习题 5.8 用图

5.9 在伦敦的英国议会塔楼上的大本钟的分针长 4.50 m, 质量为 100 kg; 时针长 2.70 m, 质量为 60.0 kg。二者对中心轴的角动量和转动动能各是多少? 将二者都当成均匀细直棒处理。

5.10 从一个半径为 R 的均匀薄板上挖去一个直径为 R 的圆板, 所形成的圆洞中心在距原薄板中心 $R/2$ 处(图 5.34), 所剩薄板的质量为 m 。求此时薄板对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量。

5.11 如图 5.35 所示, 两物体质量分别为 m_1 和 m_2 , 定滑轮的质量为 m , 半径为 r , 可视作均匀圆盘。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k , 求 m_1 下落的加速度和两段绳子中的张力各是多少? 设绳子和滑轮间无相对滑动, 滑轮轴受的摩擦力忽略不计。

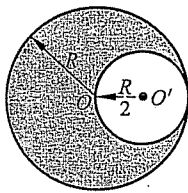


图 5.34 习题 5.10 用图

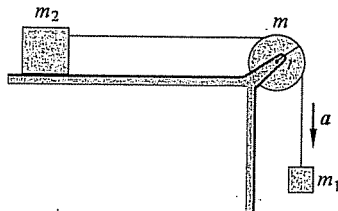


图 5.35 习题 5.11 用图

5.12 一根均匀米尺, 在 60 cm 刻度处被钉到墙上, 且可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平, 然后释放。求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度各是多大?

5.13 从质元的动能表示式 $\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2$ 出发, 导出刚体绕定轴转动的动能表示式 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 。

5.14 唱机的转盘绕着通过盘心的固定竖直轴转动, 唱片放上去后将受转盘的摩擦力作用而随转

盘转动(图 5.36)。设唱片可以看成是半径为 R 的均匀圆盘,质量为 m ,唱片和转盘之间的滑动摩擦系数为 μ_k 。转盘原来以角速度 ω 匀速转动,唱片刚放上去时它受到的摩擦力矩多大? 唱片达到角速度 ω 需要多长时间? 在这段时间内,转盘保持角速度 ω 不变,驱动力矩共做了多少功? 唱片获得了多大动能?

5.15 坐在转椅上的人手握哑铃(图 5.12)。两臂伸直时,人、哑铃和椅系统对竖直轴的转动惯量为 $J_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。在外人推动后,此系统开始以 $n_1 = 15 \text{ r/min}$ 转动。当人的两臂收回,使系统的转动惯量变为 $J_2 = 0.80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 时,它的转速 n_2 是多大? 两臂收回过程中,系统的机械能是否守恒? 什么力做了功? 做功多少? 设轴上摩擦忽略不计。

5.16 图 5.37 中均匀杆长 $L = 0.40 \text{ m}$,质量 $M = 1.0 \text{ kg}$,由其上端的光滑水平轴吊起而处于静止。今有一质量 $m = 8.0 \text{ g}$ 的子弹以 $v_0 = 200 \text{ m/s}$ 的速率水平射入杆中而不复出,射入点在轴下 $d = 3L/4$ 处。

- (1) 求子弹停在杆中时杆的角速度;
- (2) 求杆的最大偏转角。

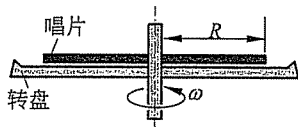


图 5.36 习题 5.14 用图

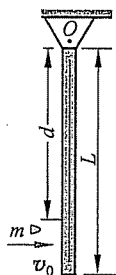


图 5.37 习题 5.16 用图

5.17 一转台绕竖直固定轴转动,每转一周所需时间为 $t = 10 \text{ s}$,转台对轴的转动惯量为 $J = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。一质量为 $M = 80 \text{ kg}$ 的人,开始时站在转台的中心,随后沿半径向外跑去,当人离转台中心 $r = 2 \text{ m}$ 时转台的角速度是多大?

5.18 两辆质量都是 1200 kg 的汽车在平直公路上都以 72 km/h 的高速迎面开行。由于两车质心轨道间距离太小,仅为 0.5 m ,因而发生碰撞,碰后两车扣在一起,此残体对于其质心的转动惯量为 $2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,求:

- (1) 两车扣在一起时的旋转角速度;
- (2) 由于碰撞而损失的机械能。

5.19 宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱环形内壁按同一方向跑动以产生人造重力。

(1) 如果想使人造重力等于他们在地面上时受的自然重力,那么他们跑动的速率应多大? 设他们的质心运动的半径为 2.5 m ,人体当质点处理。

(2) 如果飞船最初未动,当宇航员按上面速率跑动时,飞船将以多大角速度旋转? 设每个宇航员的质量为 70 kg ,飞船船体对于其纵轴的转动惯量为 $3 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

(3) 要使飞船转过 30° ,宇航员需要跑几圈?

5.20 把太阳当成均匀球体,试由本书的“数值表”给出的有关数据计算太阳的角动量。太阳的角动量是太阳系总角动量($3.3 \times 10^{43} \text{ J} \cdot \text{s}$)的百分之几?

5.21 蟹状星云(图 5.38)中心是一颗脉冲星,代号 PSR 0531+21。它以十分确定的周期(0.033 s)向地球发射电磁波脉冲。这种脉冲星实际上是转动着的中子星,由中子密聚而成,脉冲周期就是它的转动周期。实测还发现,上述中子星的周期以 $1.26 \times 10^{-5} \text{ s/a}$ 的速率增大。

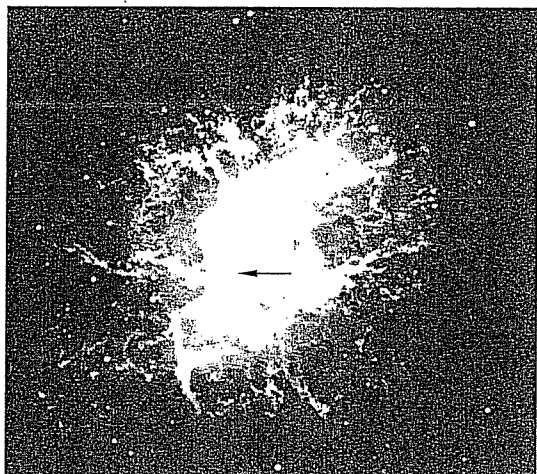


图 5.38 蟹状星云现状(箭头所指处是一颗中子星,它是 1054 年爆发的超新星的残骸)

(1) 求此中子星的自转角速度。

(2) 设此中子星的质量为 $1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ (近似太阳的质量), 半径为 10 km 。求它的转动动能以多大的速率 (以 J/s 计) 减小。(这减小的转动动能就转变为蟹状星云向外辐射的能量。)

(3) 若这一能量变化率保持不变, 该中子星经过多长时间将停止转动。设此中子星可作均匀球体处理。

* 5.22 地球对自转轴的转动惯量是 $0.33 MR^2$, 其中 M 是地球的质量, R 是地球的半径。求地球的自转动能。

由于潮汐对海岸的摩擦作用, 地球自转的速度逐渐减小, 每百万年自转周期增加 16 s 。这样, 地球自转动能的减小相当于摩擦消耗多大的功率? 一年内消耗的能量相当于我国 2004 年发电量的几倍? 潮汐对地球的平均力矩多大?

5.23 太阳的热核燃料耗尽时, 它将急速塌缩成半径等于地球半径的一颗白矮星。如果不计质量散失, 那时太阳的转动周期将变为多少? 太阳和白矮星均按均匀球体计算, 目前太阳的自转周期按 26 d 计。

* 5.24 证明: 圆盘在平面上无滑动地滚动时, 其上各点相对于平面的速度 v 和圆盘的转动角速度 ω 有下述关系:

$$v = \omega \times r_P$$

其中角速度矢量 ω 的方向垂直于盘面, 其指向根据盘的转动方向用右手螺旋定则确定, r_P 是从圆盘与平面的瞬时接触点 P 到各点的径矢。上式表明盘上各点在任一瞬时都是绕 P 点运动的。因此, 接触点 P 称圆盘的瞬时转动中心。

* 5.25 绕有电缆的大轮轴总质量为 $M=1000 \text{ kg}$, 轮半径 $R_1=1.00 \text{ m}$, 电缆在轴上绕至半径为 $R_2=0.60 \text{ m}$ 处。设此时整个轮轴对其中心轴的转动惯量 $J_C=300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。今用 $F=2000 \text{ N}$ 的力在底部沿水平方向拉电缆, 如果轮轴在路面上无滑动地滚动, 它将向哪个方向滚动? 滚动的角速度多大? 质心前进的加速度多大? 轮轴受到地面的摩擦力多大?

* 5.26 小学生爱玩的“悠悠球”是把一条线绕在一个扁圆柱体的圆柱面上的沟内, 再用手抓住线放开的一端上下抖动, 使扁圆柱体上下运动的同时还不停地绕其水平轴转动。下面为简单起见假定线就绕在扁圆柱体的圆柱面上并设扁圆柱体的质量为 m , 半径为 R 。

- (1) 若手不动,让圆柱体沿竖直的线自行滚下,它下降的加速度多大?手需用多大的力提住线端?
 (2) 若要使圆柱体停留在一定高度上,手需用多大力向上提起线端?圆柱体转动的角加速度多大?
 (3) 手若用 $2mg$ 的力向上提起线端,则圆柱体上升的加速度多大?手向上提的加速度多大?

* 5.27 地球的自转轴与它绕太阳的轨道平面的垂线间的夹角是 23.5° (图 5.39)。由于太阳和月亮对地球的引力产生力矩,地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动,进动一周需时间约 26 000 a。已知地球绕自转轴的转动惯量为 $J=8.05 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。求地球自旋角动量矢量变化率的大小,即 $|\mathrm{d}L/\mathrm{d}t|$,并求太阳和月亮对地球的合力矩多大?

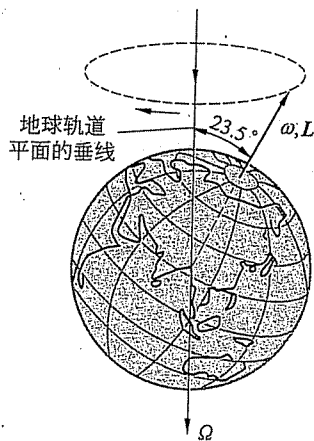


图 5.39 习题 5.27 用图

* 5.28 一艘船中装的回转稳定器是一个质量为 50.0 t , 半径为 2.00 m 的固体圆盘。它绕着一个竖直轴以 800 r/min 的角速度转动。

- (1) 如果用恒定输入功率 $7.46 \times 10^4 \text{ W}$ 启动,要经过多少时间才能使它从静止达到上述额定转速?
 (2) 如果船的轴在船的纵向竖直平面内以 $1.00^\circ/\text{s}$ 的角速度进动,说明船体受到了左倾或右倾的多大力矩。

by

J. S. Kovacs

1. Introduction

- a. General Description of the Motion of a System of Particles 1
- b. Theorems on the Motion of Rigid Bodies 1

2. Application of Rigid Body Theorems to a Simple System

- a. Description of the Motion of a Rigid Body2
- b. Example: Collision of a Point Mass with a Dumbbell2
- c. Mass and Dumbbell: Translational Motion3
- d. Mass and Dumbbell: Rotational Motion5
- e. Mass and Dumbbell: Kinetic Energy8

Acknowledgments.....9

Title: **Translational & Rotational Motion of a Rigid Body**

Author: J. S. Kovacs, Michigan State University

Version: 2/1/2000

Evaluation: Stage 4

Length: 1 hr; 20 pages

Input Skills:

1. Calculate the kinetic energy loss in an inelastic collision (MISN-0-21).
2. Calculate the kinetic energy of a rigid rotating object (MISN-0-36).

Output Skills (Problem Solving):

- S1. Apply the following theorems to determine completely the motion of a rigid body in the case when the torque on the body is along one of the principal axes: (a) Relative to an inertial reference system the time rate of change of the center of mass momentum of a rigid body is equal to the net external force acting on the rigid body; (b) Relative to any point in an inertial reference system, the time derivative of the angular momentum vector of a rigid body is equal to the net external torque acting on the rigid body; and (c) The total kinetic energy of a rigid body relative to an inertial reference system is the kinetic energy of the center of mass of that body relative to the inertial system, plus the kinetic energy of the body relative to the center of mass.

Post-Options:

1. "Ideal Collisions Between a Frictionful Sphere and a Flat Surface: The Superball" (MISN-0-53).
2. "Euler's Equations: The Tennis Racket Theorem" (MISN-0-57).

THIS IS A DEVELOPMENTAL-STAGE PUBLICATION
OF PROJECT PHYSNET

The goal of our project is to assist a network of educators and scientists in transferring physics from one person to another. We support manuscript processing and distribution, along with communication and information systems. We also work with employers to identify basic scientific skills as well as physics topics that are needed in science and technology. A number of our publications are aimed at assisting users in acquiring such skills.

Our publications are designed: (i) to be updated quickly in response to field tests and new scientific developments; (ii) to be used in both classroom and professional settings; (iii) to show the prerequisite dependencies existing among the various chunks of physics knowledge and skill, as a guide both to mental organization and to use of the materials; and (iv) to be adapted quickly to specific user needs ranging from single-skill instruction to complete custom textbooks.

New authors, reviewers and field testers are welcome.

PROJECT STAFF

Andrew Schnepf	Webmaster
Eugene Kales	Graphics
Peter Signell	Project Director

ADVISORY COMMITTEE

D. Alan Bromley	Yale University
E. Leonard Jossem	The Ohio State University
A. A. Strassenburg	S. U. N. Y., Stony Brook

Views expressed in a module are those of the module author(s) and are not necessarily those of other project participants.

© 2001, Peter Signell for Project PHYSNET, Physics-Astronomy Bldg., Mich. State Univ., E. Lansing, MI 48824; (517) 355-3784. For our liberal use policies see:

<http://www.physnet.org/home/modules/license.html>.

TRANSLATIONAL & ROTATIONAL MOTION OF A RIGID BODY

by

J. S. Kovacs

1. Introduction

1a. General Description of the Motion of a System of Particles. The general description of the motion of a system of particles consists of specifying the motion of the center of mass (CM) of the system (as if the whole mass of the system were located at the center of mass) plus the description of the motion of the particles of the system relative to the center of mass. For a rigid body the particles of the system are constrained to move such that the relative separation of all pairs of particles remains unchanged. Theorems about the motion of rigid bodies will be demonstrated as they apply to a simple rigid system.

1b. Theorems on the Motion of Rigid Bodies. When a set of forces acting upon a rigid body are such that they combine to produce an external torque which is directed along one of the principal axes of the body (see Fig. 1), the following theorems may be applied to determine completely the motion of the rigid body:

- a. Relative to an inertial reference system the time rate of change of the center of mass momentum of a rigid body is equal to the net external force acting on the rigid body:

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext}.$$

- a'. If there is no net external force on a rigid body, the center of mass momentum is constant, and hence the center of mass velocity is

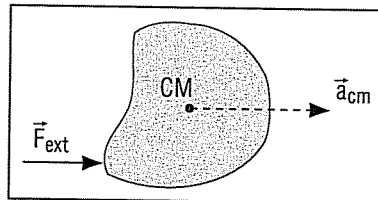


Figure 1. Torque-producing forces acting on a body.

constant in magnitude and direction: $\vec{P}_{CM} = \text{constant vector}$, $\vec{V}_{CM} = \text{constant vector}$.

- b. Relative to any point in an inertial reference system, the time derivative of the angular momentum vector of a rigid body is equal to the net external torque acting on that body relative to the same point:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}.$$

- b'. With no external torque on the body the angular momentum vector relative to any point in an inertial reference system is constant.
- c. The total kinetic energy of a rigid body relative to an inertial reference system is the kinetic energy of the center of mass of that body relative to the inertial system, plus the kinetic energy of the body relative to the center of mass. (For a rigid body this latter is the kinetic energy of the rotation of the body about the center of mass.

2. Application of Rigid Body Theorems to a Simple System

2a. Description of the Motion of a Rigid Body. The complete description of the motion of a rigid body consists of the description of the translational motion of its center of mass as if it were a point mass, plus the description of its rotational motion about an axis through its center of mass.¹ The net external force on the system will determine the former, while the net external torque will determine the latter.

2b. Example: Collision of a Point Mass with a Dumbbell. As an illustration of the theorems listed in Sect. 1b, consider the following example:

In far outer space, far from the influence of any appreciable gravitational force, a rigid body consisting of two point masses, of mass M and $4M$, at the ends of a massless rod of length d is at rest relative to an inertial reference frame.² Another mass, M , makes a collision approach

¹The axis is not necessarily fixed in its direction in space. In cases when it is not, the motion of the direction of the axis is necessary to complete the description. We will not consider such cases here. See, however, "Torque and Angular Momentum in Circular Motion" (MISN-0-34) and "Euler's Equations: The Tennis Racket Theorem" (MISN-0-57).

²An inertial reference frame is a frame in which Newton's First Law of Motion is true.

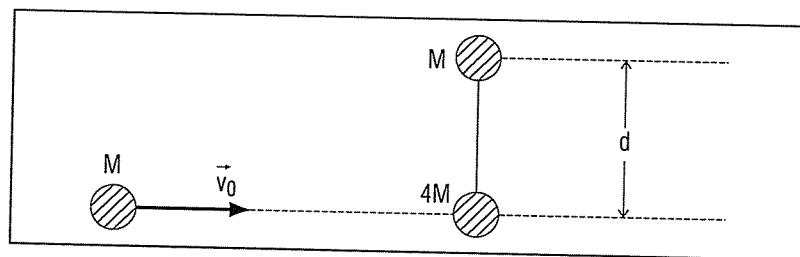


Figure 2. A mass M with initial speed $\vec{V}_0$ approaches to make a head on collision with a mass $4M$, initially at rest. The mass $4M$ is attached via a rigid massless rod to another mass M with the orientation of the rod such that it is perpendicular to the line of flight of the moving mass.

toward this rigid body, moving with a velocity $\vec{V}_0$ toward a head on collision with the $4M$ mass directed perpendicularly to the rod connecting the rigid body masses (See Fig. 2).

2c. Mass and Dumbbell: Translational Motion. *Problem:* To demonstrate that the center of mass of the three mass system moves with the same velocity before and after the collision.

Answer: First, the center of mass must be located, then its velocity before the collision occurs must be determined. The center of mass of the rigid body is located one-fifth of the distance from the $4M$ mass along the line connecting the two masses (at point A in Fig. 3). The center of mass of the combination of this mass ($5M$) and the incident mass M is located along the line joining these masses and one-sixth of the distance from the $5M$ mass to the incident mass (at point B). Figure 2 shows this location at the instant when the incident mass is distance D from the mass $4M$.

Problem: How high above the line joining the incident mass with the struck mass is the center of mass?

Answer: From the similar triangles OPA and $OB'B$ we see that BB' is five-sixths of AP so that the length of BB' is $(d/6)$.

Problem: Where will the center of mass be when the incident mass strikes the $4M$ mass?

Answer: It will be at B'' , a distance $(d/6)$ above point P , the location of the mass $4M$. With B and B'' both the same distance above the line OP , it is clear that the line BB'' is parallel to the line OP . Thus, while

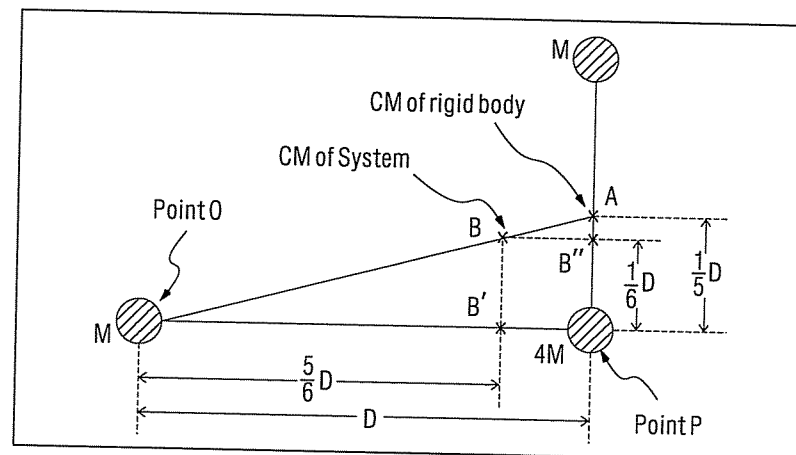


Figure 3. A geometrical determination of the location of the center of mass of the system described in Fig. 2.

the incident mass moved distance D , the center of mass moved from B to B'' along a line parallel to line OP . Line BB'' is of length $(D/6)$, hence the center of mass velocity must be one-sixth of the incident velocity and parallel to the incident velocity:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{6} \vec{V}_0. \quad (1)$$

Problem: What is the CM velocity after the collision?

Answer: It must be the same because there are no external forces on the three mass system. (The incident mass and the struck mass exert forces on each other but these are internal forces.) Because :

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{P}_{CM} = \text{constant vector}. \quad (3)$$

To demonstrate this, consider the case where the incident mass sticks to the mass $4M$ upon colliding. Before the collision, as observed in an inertial frame at rest with respect to the rigid body, the only momentum is $M\vec{V}_0$. After the collision the momentum is that of the new rigid body ($5M$ at one end, M at the other). The momentum is thus $6M\vec{V}_{CM}$ where

$\vec{V}_{CM}$ is the velocity of the center of mass after the collision. Equating these two (because there are no external forces) we get:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{6}\vec{V}_0, \quad (4)$$

exactly what it was before the collision.

2d. Mass and Dumbbell: Rotational Motion. *Problem:* Is this the only motion of the combined system?

Answer: Obviously not. The system spins around as it moves. (If the rigid rod were struck at the center of mass of the system, no spinning would occur.) To describe completely the motion we must also include a description of the rotation of the system. Rotational motion is determined by external torques on the system and how they affect the angular momentum of the system:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}, \quad (5)$$

where $\vec{L}$ and $\vec{\tau}_{ext}$ are both defined with respect to the same point in some inertial reference frame. With our system (consisting of the three masses) there is no net external torque. Therefore the angular momentum, evaluated relative to any point in an inertial frame, is constant:

$$\vec{L} = \text{constant vector}. \quad (6)$$

It is convenient to take the point relative to which the torque is evaluated as the center of mass of the system.

Problem: First, is this a point in an inertial reference frame?

Answer: If the reference frame in which the rigid rod (before collision) is at rest is an inertial reference frame, then so is a frame which is attached to the center of mass and moving with it. That's because the center of mass reference frame is moving with constant velocity with respect to the reference frame which is at rest with respect to the rigid rod. (In frames of reference which don't accelerate with respect to each other, observers see the same force or effect of a force.)

Problem: Relative to this point, what is the angular momentum of the system before the collision takes place?

Answer: Relative to this point the incident mass is moving to the right with velocity $(5/6)\vec{V}_0$ (recall that the center of mass itself is moving to the right with velocity $(1/6)\vec{V}_0$). The masses on the ends of the rigid rod

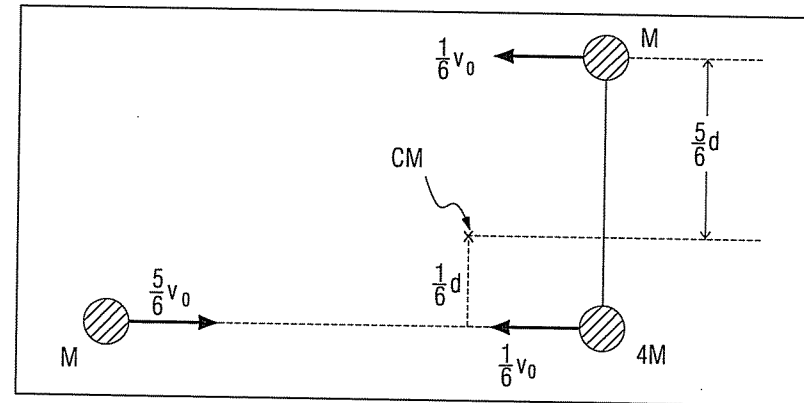


Figure 4. The motion of the system described in Fig. 2 (before collision) as observed in a reference frame in which the center of mass is at rest.

are thus both moving to the left with a speed $(1/6)\vec{V}_0$ or with velocity $-(1/6)\vec{V}_0$. Hence, viewed at rest with respect to the center of mass, the motion observed is as shown in Fig. 4.

The total angular momentum of this system as seen relative to the center of mass is the vector sum of the individual angular momenta. Each $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, where $\vec{r}$ is the vector from the center of mass to the instantaneous location of the mass, and $\vec{v}$ is the velocity of that mass. However, the magnitude of this cross product is the magnitude of the momentum times the "lever arm."³ Its direction may be evaluated separately using the right hand rule. The individual angular momenta are determined as indicated in Table 1.

³See "Force and Torque" (MISN-0-5)

Table 1. Determination of the individual angular momenta relative to the center of mass of the system for each of the three point masses of the system shown in Fig. 2.					
Object	Mass	Speed	Lever Arm	Magn. of Ang. Mom.	Direct. of Ang. Mom.
incident mass	M	$\frac{5}{6}V_0$	$\frac{1}{6}d$	$\frac{5}{36}MV_0d$	up, out of page
mass on rod	$4M$	$\frac{1}{6}V_0$	$\frac{1}{6}d$	$\frac{4}{36}MV_0d$	down, into page
mass on rod	M	$\frac{1}{6}V_0$	$\frac{5}{6}d$	$\frac{5}{36}MV_0d$	up, out of page

The resultant angular momentum of the system (before collision) is thus:

$$\frac{1}{6}MV_0d \text{ directed up, out of page.} \quad (7)$$

This is also the value of the angular momentum of the rod after the incident mass struck and attached to the $4M$ mass. Hence the newly formed rigid body (M and $5M$) at two ends of a rigid rod of length d rotates counter-clockwise about the center of mass with an angular momentum whose magnitude is $(d/6)MV_0$.

Problem: What is the angular velocity of rotation of this rigid body?

Answer: For a rigid body rotating about a principal axis $\vec{L} = I\vec{\omega}$ and $\vec{\omega}$ is in the same direction as $\vec{L}$. In this case, up out of page: the rotation is counter-clockwise. I , the moment of inertia, from its definition is the sum of the "mass times distance squared" contributions for each mass relative to the axis parallel to $\vec{L}$ through the center of mass. It is, therefore,

$$I = M\left(\frac{5}{6}d\right)^2 + 5M\left(\frac{1}{6}d\right)^2 = \frac{5}{6}Md^2. \quad (8)$$

We thus find: $\vec{\omega} = V_0/(5d)$. Consequently, the complete description of the motion of the system after impact is as follows:

- The center of mass moves with constant velocity $(1/6)\vec{V}_0$ in a straight line parallel to the direction of the velocity of the incident mass.
- The rod rotates counter-clockwise about an axis through the center of mass (perpendicular to the plane of the paper) with a constant angular velocity of $V_0/(5d)$

2e. Mass and Dumbbell: Kinetic Energy. *Problem:* What is the kinetic energy of the system?

Answer: Again the answer depends upon the reference frame with respect to which this kinematical quantity is to be observed. Hence, making the question more specific:

Problem: What is the kinetic energy of the system relative to a system which is at rest with respect to the rigid rod before the collision?

Answer: The kinetic energy before the collision is that of the incident mass:

$$\frac{1}{2}MV_0^2.$$

After the collision it is the kinetic energy of the center of mass as if all the mass were concentrated there: $(1/2)6M\frac{V_0^2}{6}$ plus the kinetic energy of all the parts of the system relative to the center of mass. For a rigid body this is $(1/2)I\vec{\omega}^2$. For this object it is:

$$\frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 = \frac{1}{60}MV_0^2. \quad (9)$$

The total kinetic energy is thus:

$$E_k(\text{total}) = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{60}MV_0^2 = \frac{1}{10}MV_0^2. \quad (10)$$

(5 times as much kinetic energy is in translational motion as there is in rotational motion. If the incident mass had struck the center of mass, all the kinetic energy would have been in translational motion.)

Problem: What is the "Q" of this collision?

Answer: According to its definition, Q is the change in the kinetic energy that occurs as a result of the reaction. If Q is positive, kinetic energy has been gained as a result of the reaction or collision. For this collision:

$$Q = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}MV_0^2\right). \quad (11)$$

As a result of the collision 80% of the original kinetic energy is lost. (The collision is obviously inelastic⁴).

⁴See "Potential Energy, Conservative Forces, The Law of Conservation of Energy" (MISN-0-21).

Acknowledgments

Preparation of this module was supported in part by the National Science Foundation, Division of Science Education Development and Research, through Grant #SED 74-20088 to Michigan State University.

PROBLEM SUPPLEMENT

1. For the system shown in Fig. 1 of the textual material, determine the velocity of the center of mass of the system before the collision. Show that it is parallel to the velocity of the incident mass.
2. Determine the velocity of the center of mass of the system of Problem 1 after the collision, assuming the projectile mass sticks to the mass $4M$.
3. Relative to the center of mass of this above system, determine the velocity of each of the three component masses before the collision.
4. Determine the total angular momentum relative to the center of mass of the above mentioned system before the collision.
5. Determine the total angular momentum relative to the stationary mass M (on the rod) before the collision.
6. Assuming conservation of angular momentum, calculate the angular velocity of the system relative to the center of mass after the collision.
7. Assuming conservation of angular momentum, calculate the instantaneous angular velocity of the system after the collision relative to the location of the initially stationary mass M . (This will be the angular velocity with which that upper mass M sees the other masses begin to rotate around it.)
8. Determine the total kinetic energy, relative to a frame at rest with respect to the rod, of the system before the collision occurs.
9. Determine the total kinetic energy relative to this same frame (as in 8 above) of the system after the collision.
10. Determine the gain or loss of kinetic energy as a result of the collision.

Brief Answers:

1. Equation (1).
2. Equation (2).
3. See Fig. 3.
4. Equation (7).
5. MV_0d , directed up, out of page.
6. $\omega = V_0/(5d)$ counter-clockwise as viewed looking at the plane of the paper.
7. $\omega = V_0/(5d)$.
8. $\frac{1}{2}MV_0$.
9. Equation (11).

MODEL EXAM

1. For the same problem as was illustrated in the *text*, Sect. 2, find the kinetic energy of the system before the collision [K], the kinetic energy after the collision [C] and the Q of the collision [F], all as observed in a reference frame attached to the center of mass.
2. In far outer space free from any outside forces and observed in an inertial frame, there is at rest a uniform rod of length L and mass M . A point mass, also of mass M approaches the rod with a velocity $\vec{V}_0$ directed perpendicular to the long axis of the rod. The mass strikes the rod at a point that is a distance d away from the center of the rod, toward the end of the rod. After the collision, the incident mass continues along the same straight line in its original direction but with a reduced velocity, $\vec{V}_0/2$.
 - a. Determine the location of the center of mass of the system at an instant when the incident mass is a distance D from the rod. [L] Determine the velocity of the center of mass at this instant. [A]
 - b. Determine the velocity of the center of mass of the rod after the collision, as observed in the same frame where the rod was initially at rest. [I]
 - c. Determine the velocity of the center of mass of the rod relative to the center of mass of the system after the collision. [J]
 - d. Determine the angular momentum of the system, before the collision, relative to the center of mass of the rod. [B]
 - e. Determine the angular velocity of the rod about its own center of mass after the collision. [E]
 - f. Determine the kinetic energy of the system before the collision, as observed in the original inertial frame. [H]
 - g. Determine the kinetic energy of the system after the collision, as observed in this same frame. [M]
 - h. Determine the Q of this reaction. [G]
 - i. Assuming an elastic collision, determine the value of d in terms of L . [D]

Brief Answers:

- A. $\vec{V}_0/2$
- B. (MV_0d) , directed up, out of page, as seen in a sketch where d is below center.
- C. $MV_0^2/60$
- D. $d = L/\sqrt{6}$
- E. $6V_0d/L^2$
- F. $-(4/10)MV_0^2$
- G. $(1/2)MV_0^2 \left(\frac{3d^2}{L^2} - \frac{1}{2} \right)$
- H. $MV_0^2/2$
- I. $(\vec{V}_0/2)$, same direction as original velocity of point mass.
- J. Zero
- K. $(5/12)MV_0^2$
- L. Along a line joining the center of the rod to the incident mass and half-way between the two.
- M. $(1/2)MV_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3d^2}{L^2} \right)$

Center of Percussion: The "Baseball Bat Theorem"

As an example of the above theory, let us discuss the collision of a ball of mass m , treated as a particle, with a rigid body (bat) of mass M . For simplicity we shall assume that the body is initially at rest on a smooth horizontal surface and is free to move in laminar-type motion. Let $\hat{\mathbf{P}}$ denote the impulse delivered to the body by the ball. Then the equations for translation are

$$\hat{\mathbf{P}} = M\mathbf{v}_{cm} \quad (8.80)$$

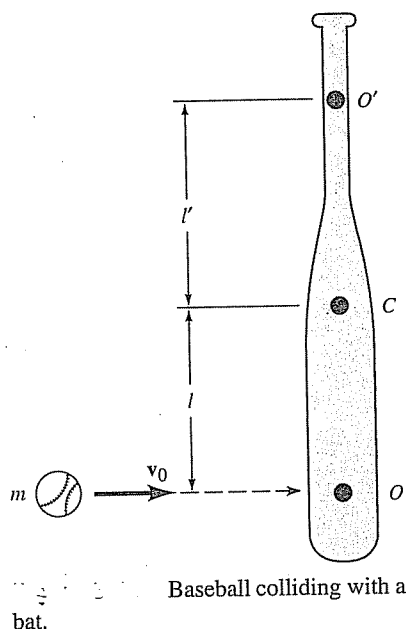
$$-\hat{\mathbf{P}} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 \quad (8.81)$$

where $\mathbf{v}_0$ and $\mathbf{v}_1$ are, respectively, the initial and final velocities of the ball and $\mathbf{v}_{cm}$ is the velocity of the mass center of the body after the impact. Clearly, the above two equations imply conservation of linear momentum.

Since the body is initially at rest, the rotation about the center of mass, as a result of the impact, is given by

$$\omega = \frac{\hat{P}l}{I_{cm}} \quad (8.82)$$

in which l is the distance OC from the center of mass C to the line of action of $\hat{\mathbf{P}}$, as shown in Figure 8.16. Let us now consider a point O' located a distance l' from the



center of mass such that the line CO' is the extension of OC , as shown. The (scalar) velocity of O' is obtained by combining the translational and rotational parts, namely,

$$v_{O'} = v_{cm} - \omega l' = \frac{\hat{P}}{M} - \frac{\hat{P}l}{I_{cm}} l' = \hat{P} \left(\frac{1}{M} - \frac{ll'}{I_{cm}} \right) \quad (8.83)$$

In particular, the velocity of O' will be zero if the quantity in parentheses vanishes, that is, if

$$ll' = \frac{I_{cm}}{M} = k_{cm}^2 \quad (8.84)$$

where k_{cm} is the radius of gyration of the body about its center of mass. In this case the point O' is the instantaneous center of rotation of the body just after impact. O is called the *center of percussion* about O' . The two points are related in the same way as the centers of oscillation, defined previously in our analysis of the physical pendulum (Equation 8.43).

Anyone who has played baseball knows that if the ball hits the bat in just the right spot there will be no "sting" upon impact. This "right spot" is just the center of percussion about the point at which the bat is held.

Over a period of time both the direction and magnitude of ω may change as the body rotates.

In a rigid body the distance between any two points $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ stays constant.

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = 0 \quad (6.66)$$

Since

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = 2(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \quad (6.67)$$

the rigid-body constraint in (6.66) is satisfied by the velocity field in the (6.65), provided that ω is the same for all points in the body.

$$(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot \omega \times (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) = 0 \quad (6.68)$$

Hence $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ as given by (6.65) is the velocity field of a rigid body. The velocities of all particles in a rigid body can be specified by six independent numbers, the components of $\mathbf{v}_0$ and ω .

As an example, we consider a wheel of radius R which rolls without slipping on a level surface, as illustrated in Fig. 6-4. For no slipping we have

$$dx = R d\theta \quad (6.69)$$

where dx and $d\theta$ are infinitesimal horizontal and angular displacements, respectively. Dividing both sides by the time interval dt , we get

$$\mathbf{v}_0 = R\omega\hat{\mathbf{x}} \quad (6.70)$$

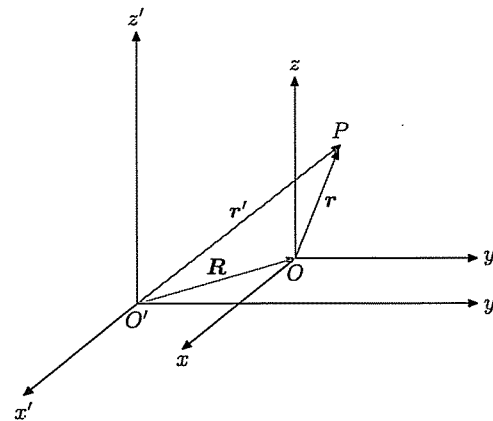
where $\mathbf{v}_0$ is the velocity of the center of mass which coincides in this case with the rotation axis. The velocity of a point on the wheel relative to the CM is

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \omega \times \mathbf{r} = \frac{v_0}{R} \hat{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6.71)$$

as illustrated in Fig. 6-5. The direction of ω points into the page. With respect to a reference frame at rest on the level surface, the velocity of

Frame moving without rotation

Denote (x', y', z') as the co-ordinates in the inertial frame S' , and (x, y, z) as the co-ordinates in the moving frame S which moves without rotation.





Obviously, for a point P

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r},$$

where $\mathbf{R}$ is the position of O relative to O' . Hence

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

and

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

So if the frame S moves with uniform velocity $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ so that $d^2\mathbf{R}/dt^2 = 0$, S is still inertial, i.e. Newton's laws still hold in this frame.

But if S moves with an acceleration $\mathbf{A}$, then

$$\mathbf{a}' = \mathbf{A} + \mathbf{a}.$$



Examples are:

- 1. Free falling elevator,

$$a' = g, \quad A = g,$$

$$\therefore a = 0, \quad \text{Weightlessness.}$$

- 2. Rocket taking off

$$a_{\text{Rocket}} = g - A, \quad \text{Overweight,}$$

since A is in opposite direction of g , and an astronaut will experience a gravitational pull several g at takeoff.

Note that this is just a restatement of the D'Alembert principle.

A Crash course for the Rotation Matrix $SO(n)$

Suppose a rotation matrix acts in n -dimension

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x},$$

where R is an $n \times n$ matrix, and $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}$ are column vectors.

As rotation preserves length, so

$$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^T R^T R \boldsymbol{x},$$

$$\Rightarrow R^T R = \mathbb{I}.$$

R is called the orthogonal matrix. Rotation also preserves the orientation, that is the determinant of R is 1. So rotation matrices are called the group of $SO(n)$.

Write R as

$$R = (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n),$$

where $\mathbf{a}_i$ are column vectors. The condition $R^T R = \mathbb{I}$ is

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n) = \mathbb{I}.$$

This implies $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$,

that is, the n column vectors $\mathbf{a}_i$ are orthogonal and of unit length.

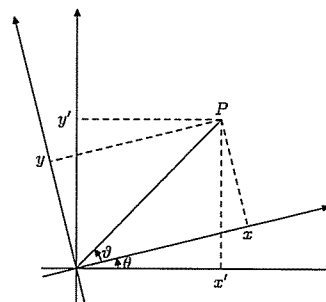
The number of degrees of freedom is

$$d = n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

giving $d = 1$ for $n = 2$ and $d = 3$ for $n = 3$.

Rotating Frame

We consider the case for two dimensions where S is the rotating frame relative to the inertial frame S' .



From the diagram,

$$x' = r \cos(\theta + \varphi),$$

$$y' = r \sin(\theta + \varphi).$$

Expanding the sin, cos terms, we write them as a matrix equation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Differentiating the matrix equation w.r.t. t , we get

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \dot{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Inserting RR^{-1} , we get

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + RR^{-1}\dot{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

which factors out as

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = R \left[\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + R^{-1}\dot{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right].$$

Writing $R^{-1}\dot{R} = \Omega$, we get

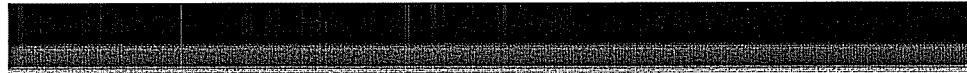
$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = R \left[\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right].$$

Ω can be proved to be an anti-symmetric matrix

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \dot{\theta}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Writing $\dot{\theta}$ as ω (a constant), then

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \end{pmatrix}.$$



Differentiating w.r.t. t once more to get the acceleration, then

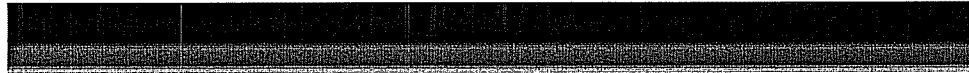
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = R \left[\begin{pmatrix} \ddot{x} - \omega \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega \dot{x} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \end{pmatrix} \right].$$

After simplification, the accelerations are given by

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y \end{pmatrix}.$$

For the external force,

$$\begin{pmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$



We then have the equations of motion as

$$\begin{aligned}m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) &= F_x, \\m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) &= F_y.\end{aligned}$$

Moving the inertial accelerations to the R.H.S., we obtain

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_x + 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x, \\m\ddot{y} &= F_y - 2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y.\end{aligned}$$

The term $(m\omega^2 x, m\omega^2 y)$ is known as the centrifugal force, while the term $(2m\omega\dot{y}, -2m\omega\dot{x})$ is called the Coriolis force.

Three dimensional case

For the 3-dimensional case we have to define the rotation matrix R , denoting a rotation along $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ with a magnitude θ ,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta + n_1^2(1 - \cos \theta) & -n_3 \sin \theta + n_1 n_2(1 - \cos \theta) & n_2 \sin \theta + n_1 n_3(1 - \cos \theta) \\ n_3 \sin \theta + n_2 n_1(1 - \cos \theta) & \cos \theta + n_2^2(1 - \cos \theta) & -n_1 \sin \theta + n_2 n_3(1 - \cos \theta) \\ -n_2 \sin \theta + n_3 n_1(1 - \cos \theta) & n_1 \sin \theta + n_3 n_2(1 - \cos \theta) & \cos \theta + n_3^2(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}$$

In indexed form,

$$R_{ij} = \delta_{ij} \cos \theta - \sum_k \varepsilon_{ijk} n_k \sin \theta + n_i n_j (1 - \cos \theta).$$

It is straightforward but complicated to compute

$$\Omega = R^{-1} \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_i = n_i \dot{\theta}.$$

Hence

$$\dot{\mathbf{r}}' = R [\dot{\mathbf{r}} + \Omega \mathbf{r}] .$$

In three dimensions the pseudo-vector can be identified as the cross product

$$\begin{aligned} \Omega \mathbf{r} &\mapsto \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} , \\ \therefore \quad \dot{\mathbf{r}}' &= R [\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] . \end{aligned}$$

Differentiating w.r.t. t once more, we get

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}' &= R [\ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \Omega(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] , \\ &= R [\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] . \end{aligned}$$

Since force is also a vector, then

$$\mathbf{F}' = R\mathbf{F} .$$



So $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}'$ would imply

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \mathbf{F}.$$

Moving the inertial accelerations to the R.H.S. we finally obtain the equations of motion in a constantly rotating frame as

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

$-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$	Coriolis force
$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$	Centrifugal force

Identification of $\Omega \mathbf{r}$ as a Cross Product

$$\Omega \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 y + \omega_2 z \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ -\omega_2 x + \omega_1 y \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 y + \omega_2 z \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ -\omega_2 x + \omega_1 y \end{pmatrix}.$$

In index form we have

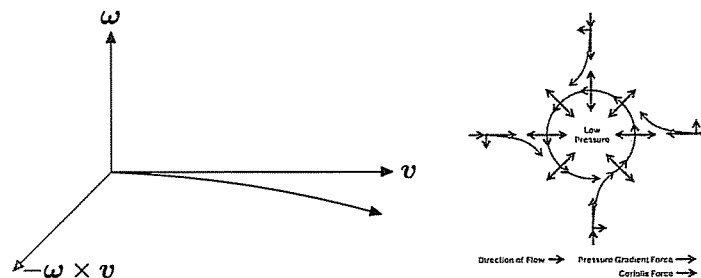
$$\Omega_{ij} = - \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

Hence

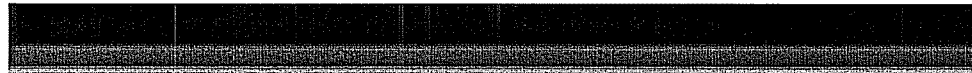
$$\begin{aligned} \sum_j \Omega_{ij} x_j &= - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \omega_k x_j, \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k. \end{aligned}$$



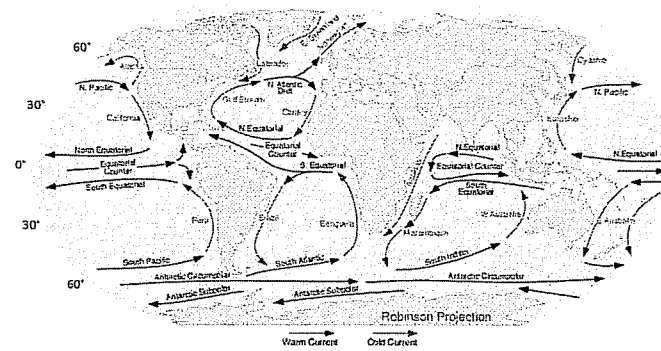
The Coriolis force is proportional to the velocity and the mass. Consider objects moving on the earth's surface, and in the northern hemisphere the upward component of the angular velocity will deflect moving object to the right.



In the regions of low pressure, the wind will blow inwards, deflected to move in a counter-clockwise direction. Cyclones, typhoons, etc. in the northern hemisphere will move likewise.



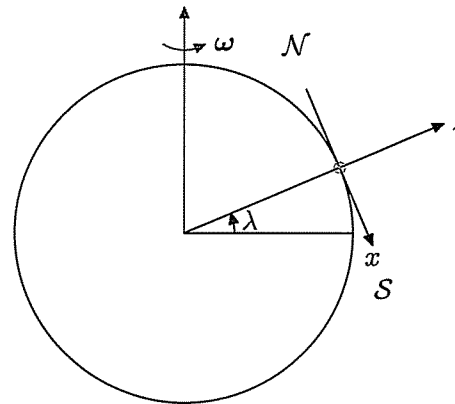
Ocean currents are also affected by the Coriolis force.





Worked Examples:

- Let us calculate the deflection of a free falling body from the vertical caused by the earth's rotation.





Let the vertical be defined as the direction determined by g . The centrifugal force is to be neglected. Hence

$$\frac{dv}{dt} = 2v \times \omega + g.$$

The deflection is very small. So we can write $v = v_1 + v_2$, a dominant part plus a correction.

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = 2(v_1 + v_2) \times \omega + g.$$

The equation for v_1 describes the free fall without rotation.

$$\frac{dv_1}{dt} = g \quad \Rightarrow \quad v_1 = gt,$$



Neglecting the second order term, the differential equation for v_2 is

$$\frac{dv_2}{dt} = 2gt \times \omega.$$

Hence we get

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{2}gt^2,$$

$$r_2 = \frac{1}{3}gt^3 \times \omega.$$

We now choose the z -axis to be the vertically upward direction, the x -axis pointing south, and the y -axis the eastward direction. Then

$$\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -g \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \end{vmatrix} = \omega g \cos \lambda \mathbf{j}.$$



Approximating the time of fall to the ground as $t = \sqrt{2h/g}$, where h is the height the particle begins free falling, the deflection is then eastward with displacement

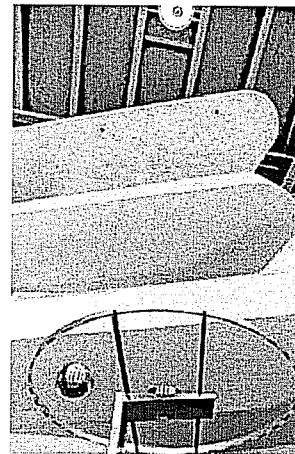
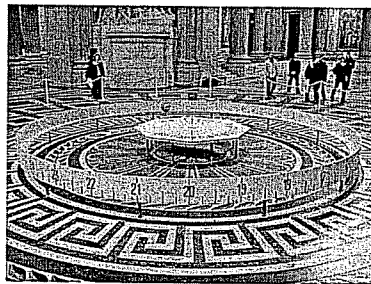
$$y = \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos \lambda .$$

If $\lambda = 23^\circ$, $h = 100$ m, then using $\omega = 2\pi/1 \text{ day} \sim 7 \times 10^{-5}$, we can compute y to be

$$y \approx 2 \text{ cm} .$$

Foucault Pendulum

Foucault in 1851 suspended a 28-kg bob with a 67-metre wire from the dome of the Panthéon in Paris to demonstrate that the earth really rotates.



- ② We derive here how the plane of oscillation changes due to the rotation of the earth. We can make the approximation $\dot{z} = 0$, and the Coriolis force is

$$2m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = 2m(\dot{y}\omega_z\mathbf{i} - \dot{x}\omega_z\mathbf{j} - \dot{y}\omega_x\mathbf{k}).$$

We consider the horizontal motion.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega_0^2 x + 2\dot{y}\omega_z, \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y - 2\dot{x}\omega_z,\end{aligned}$$

where ω_0 is just the angular frequency of the pendulum. We can set $w = x + iy$, then

$$\ddot{w} = -\omega_0^2 w - 2i\omega_z \dot{w}.$$

As usual, we set $w = Ae^{\alpha t}$, then

$$\alpha^2 + 2i\omega_z\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

$$\therefore \alpha = -i\omega_z \pm i\sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} \approx -i\omega_z \pm i\omega_0.$$

So

$$w = e^{-i\omega_z t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}).$$

Without the first term we get the usual harmonic oscillation of a spherical pendulum in a plane. The phase $e^{-i\omega_z t}$ just rotates the plane of oscillation clockwise in the northern hemisphere with a period given by

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{1}{\sin \lambda} \text{day}.$$

The Foucault pendulum at UN takes 36 hours and 45 minutes to complete a cycle.

§ 3. 刚体运动学

3.1 什么是刚体?

在此之前的各章节里,我们大多把运动物体看作质点或质点组。对于单个质点,谈不上空间取向,从而谈不上自转;对于单个质点,也谈不上形状和大小。早在第一章 1.2 节里我们就已指出,“质点”是一个抽象的模型,如果问题不涉及物体的转动及其形状和大小,我们可以把它看作质点。否则,我们就要采取另外的模型。

说到物体的形状和大小,应当看到,严格说来它们都是会改变的。看如

图 4-13 所示的例子,将一长形物体水平放置,在其 A 端以水平力 F 推之,则该物整体获得水平加速度。这件事乍看起来似乎平淡无奇,但我们要问:力 F 只

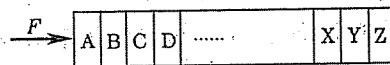


图 4-13 力在连续体内的传播

作用在物体的 A 部分, B, C, ... 各部分,乃至其最远端 Z,并没有受到力 F 的作用,为何也获得了同样的加速度呢?这当然是推力从 A 到 B, B 到 C, ... 一步步传下去,一直传到 Z。传递推力的机制是物体的弹性:开始时力 F 使 A 加速,而 B 未动,于是 A、B 之间产生压缩而互推;这推力使 B 加速,而 C 未动;于是 B、C 之间产生压缩而互推;……;以此类推,把推力一直传到远端 Z。由此可见,这是一个弹性力的传递过程,在这过程中没有物体的形变是不行的。但是,在很多的情况下物体的弹性形变小得可以忽略,这样,我们就得到实际物体的另外一个抽象模型——刚体(rigid body),即形状和大小完全不变的物体。

完全不发生形变的物体如何传递弹性力呢?问题不该这样提。实际上是弹性波的传播速度正比于弹性模量的开方(见第六章 5.7 节),物体刚性愈大,就意味着它的弹性模量愈大,从而扰动在其中的传递速度也愈大。刚体模型与弹性波传播速度无穷大的假设是等价的。一般说来,固体中弹性波的速度约 $3 \times 10^3 \text{ m/s}$,在 1 ms 内传播 3 m 左右,只要我们所讨论的运动过程比这缓慢得多,就可以认为弹性扰动的传递是瞬时的,亦即,可把物体当作刚体处理。

3.2 平动和转动

刚体的基本运动可分为平动和转动。

固联在刚体上的任一条直线,在各时刻的位置始终保持彼此平行的运动,叫做平动(translation)。图 4-14 所示为钢铁厂中钢水包的运动,这里 $A''B'' \parallel A'B' \parallel AB$, $B''C'' \parallel B'C' \parallel BC$, 它的运动是平动。平动的基本特征是,刚体上每一点的运动轨迹 $AA'A''$ 、 $BB'B''$ 、 $CC'C''$... 都相同,因而各点的速度和加速度也一样。所以,当刚体平动时我们可以选取刚体上的任一点来代表其运动。

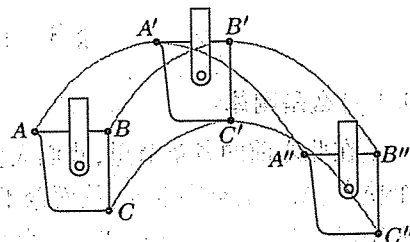


图 4-14 刚体的平动

如刚体上所有点都绕同一直线(转轴)作圆周运动,则称为刚体的转

动(rotation)。刚体转动的基本特征是,轴上所有各点都保持不动,轴外所有各点在同一时间间隔 Δt 内走过的弧长虽不同,但角位移 $\Delta\varphi$ 都一样。所以,我们可以通过一个共同的角位移、角速度、角加速度来描述刚体的转动。

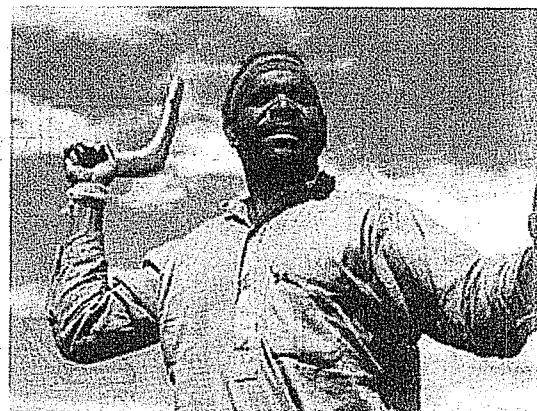


图 4-15 澳大利亚飞镖

刚体的一般运动可分解为平动和转动。图 4-15 所示为澳大利亚土著狩猎用的飞镖(boomerang),投出后可飞回原处。它从 AB 飞到 $A'B'$ 位置的过程,可分解为 AB 到 $A'B''$ 的平动和 $A'B''$ 到 $A'B'$ 的转动(图 4-16a)。当然,这运动过程也可分解为 AB 到 $A'B'$ 的平动和 $A'B'$ 到 $A'B''$ 的转动(图 4-16b)。在以上两种分解中转轴的位置不同(一个在 A' ,另一个在 B'),然而转过的角度 $\Delta\varphi$ 却是一样的。可见,由于转轴位置的选择不同,平动和转动的分解不惟一,但角位移与转轴的位置无关,从而角速度也与转轴的位置无关。

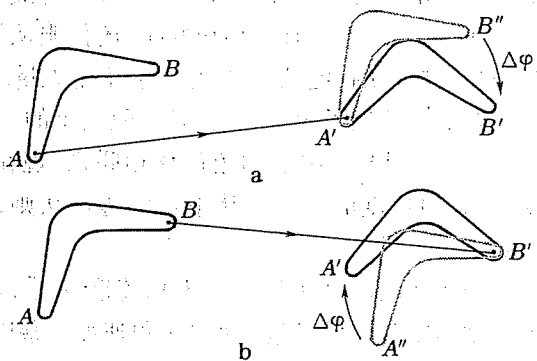


图 4-16 刚体的一般运动 = 平动 + 转动

3.3 角速度

在第二章 4.4 节里我们曾很简略地提到角速度矢量 ω 的概念,用右手螺旋法则规定了它的方向(见图 2-46)。然而,并非一切具有大小和方向的量都是矢量。例如,图 4-17 所示那样的一本书,先绕与书面垂直的 x 轴转 $\pi/2$ 角,再绕与 x 轴垂直的 y 轴转 $\pi/2$ 角,我们得到图 4-17a 的结果。但是若将转动的次序颠倒,即先绕 y 轴转 $\pi/2$ 角,再绕 x 轴转 $\pi/2$ 角,我们却得到如图 4-17b 所示的不同结果。虽然角位移也既有大小又有方向(按右手螺

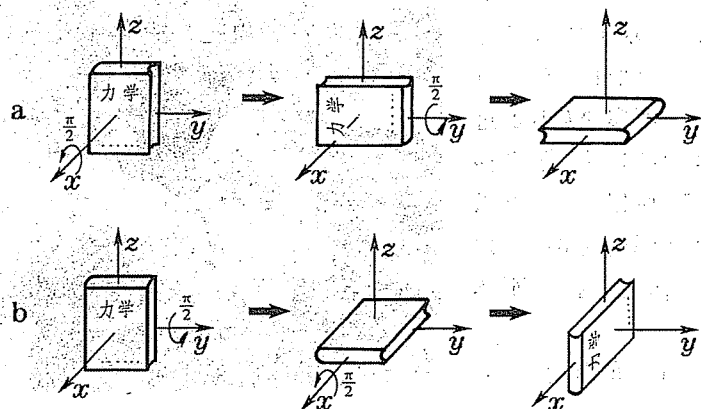


图 4-17 有限角位移不是矢量

旋法则规定沿转轴的方向),但角位移的合成与转动的先后次序有关,不服从交换律。矢量不仅有大小和方向,还得服从平行四边形合成法则,这法则则是服从交换律的。可见,角位移一般不是矢量。

在上面的例子中,角位移是有限大小的,而(瞬时)角速度只与无限小的角位移相联系。现在我们来证明,角速度的合成服从平行四边形法则,从而是真正的矢量。

圆周运动的线速度 v 等于角速度 ω 乘以半径 r ,在刚体中各质元线速度 v 等于角速度 ω 乘以它到转轴的垂直距离 $r_{\perp}$ (见图 4-18):

$$v = \omega r_{\perp}. \quad (4.27)$$

设刚体绕不动点 O 同时参与角速度分别为 ω_1 和 ω_2 的两个转动,前者的转轴为 $\overrightarrow{OA}$,后者的转轴为 $\overrightarrow{OB}$. 取 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的长度分别为 ω_1 和 ω_2 ,并按平行四边形法则将两者合成为矢量 $\overrightarrow{OC}$ (见图 4-19a)。两个转动在 C 点产生速度的大小分别为 $v_1 = r_1 \omega_1$ 和 $v_2 = r_2 \omega_2$, 这里 r_1

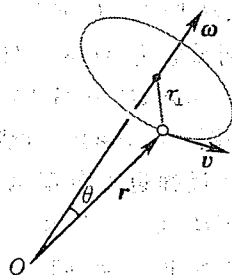
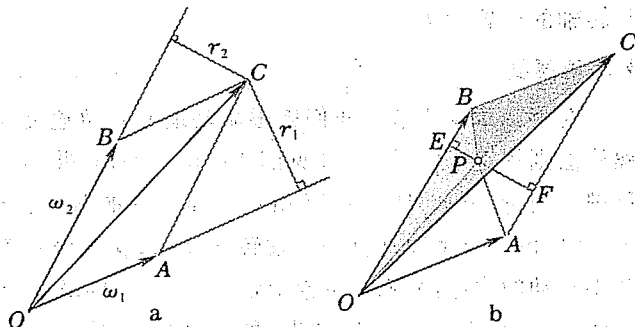


图 4-18 线速度与角速度的关系



和 $\overrightarrow{OB}$ 的垂直距离。不难看出, v_1 和 v_2 正好等于 $\triangle OCA$ 和 $\triangle OCB$ 面积 2 倍,从而彼此相等。而它们之中前者垂直纸面向外,后者垂直纸面向里,互完全抵消。亦即, C 点是不动的。对于刚体,两不动点 O 和 C 的连线 OC 是不动的,即 OC 确是合成运动的转轴。

因为刚体中各点的角速度是一样的,下一步只需对刚体上随便一点 P 证明,它绕 $\overrightarrow{OC}$ 轴角速度的大小 ω 等于 OC . 为简单起见,取 P 在 OAB 内,先证明一个几何关系。

如图 4-19b 所示,

$$\text{面积 } \triangle POB + \triangle POC + \triangle PBC = \triangle OBC = \frac{1}{2} \square OBCA.$$

过 P 点作 OB 和 AC 的垂线 EF , 则

$$\begin{aligned} \text{面积 } \square OBCA &= \overline{OB} \times \overline{EF} = \overline{OB} \times (\overline{EP} + \overline{PF}) \\ &= 2 \times (\triangle POB + \triangle PAC) \\ &= 2 \times (\square OBCA - \triangle POA - \triangle PBC), \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \triangle POA + \triangle PBC = \frac{1}{2} \square OBCA.$$

比较(a)、(b) 两式,得

$$\text{面积 } \triangle POA - \triangle POB - \triangle POC = 0,$$

或

$$\triangle POA - \triangle POB = \triangle POC. \quad (4.28)$$

现在看物理关系。如果 P 点绕 $\overrightarrow{OC}$ 轴角速度的大小为 ω , 则线速度

$$v = \omega \times (P \text{ 到 } \overrightarrow{OC} \text{ 的垂直距离}), \quad (4.29)$$

v 是 P 绕 $\overrightarrow{OA}$ 轴速度 v_1 与绕 $\overrightarrow{OB}$ 轴速度 v_2 的合成, 而 $v_1 = \omega_1 \times (P \text{ 到 } \overrightarrow{OA} \text{ 垂直距离}) = 2 \triangle POA$ 面积的 2 倍, 而 $v_2 = \omega_2 \times (P \text{ 到 } \overrightarrow{OB} \text{ 的垂直距离}) = 2 \triangle POB$ 面积的 2 倍, v_2 与 v_1 方向相反, 故依(4.27) 式有

$$\begin{aligned} v &= v_1 - v_2 = 2 \triangle POA - 2 \triangle POB \\ &= 2 \triangle POC = \overline{OC} \times (P \text{ 到 } \overrightarrow{OC} \text{ 的垂直距离}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

比较(4.29) 和(4.30) 式,得

$$\omega = \overline{OC}. \quad (4.31)$$

于是我们提出的命题——角速度的合成服从平行四边形法则,从而是真正的矢量,至此全部证讫。

§ 4. 刚体定轴转动

4.1 角动量与角速度的关系

达式。取转轴上一个参考点 O , 设刚体上某质元 Δm 相对于 O 的径矢为 $\mathbf{r}$; 则质元到转轴的垂直距离 $r_{\perp} = r \sin \theta$, 这里 θ 是 $\mathbf{r}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的夹角 (见图 4-18), 线速度的大小 $v = \omega r \sin \theta$, 方向与 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{r}$ 构成的平面垂直。从图 4-19 中各矢量的指向可以看出, 线速度和角速度之间的关系可用如下矢量式来表示:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.27')$$

现在我们来讨论角动量与角速度的关系。把刚体看成质点组, 按角动量的定义和上式, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i \Delta m_i [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

这里用到矢量恒等式 (B.19) (见附录 B)。上式表明, 角动量 $\mathbf{J}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 成线性关系, 但一般说来它们不在同一方向上, 即使在刚体绕定轴转动的情况下也可能如此。请看下面的例子。

例题3 如图 4-20 所示, 刚体由固联在一无质量刚性杆两端的质点 1 和 2 组成 (质量 $m_1 = m_2 = m$), 杆长 $2l$, 在其中点 O 处与刚性轴 $Z'OZ$ 成 α 角斜向固联。此刚体以角速度 ω 绕轴旋转, 求角动量的大小和方向。

解: 取 O 为参考点, 令两质点的位矢分别为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$, 则 $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$ 。角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 OZ 方向, 按 (4.32) 式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= m[\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2)] \\ &= 2m\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1). \end{aligned}$$

矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{r}_1$ 的夹角为 α , 矢积 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$ 的大小等于 $\omega l \sin \alpha$, 方向沿垂直纸面向外; 矢量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$ 垂直, 矢积 $\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)$ 的大小等于 $\omega l^2 \sin \alpha$, 方向在纸面内, 与杆垂直。故角动量的大小 $J = 2m\omega l^2 \sin \alpha$, 方向如图。||

在上例中角动量 $\mathbf{J}$ 不但与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不同, 而且它的方向随刚体旋转, 并不固定。

在上例中惯性离心力给刚体一个力偶矩, 其大小为 $m\omega^2 l^2 \sin 2\alpha$ (请读者作为练习自己推导)。若不是由于轴承的限制, 刚体的转轴会沿逆时针方向旋转 (见图 4-20 中的灰色箭头)。转轴的方向之所以不变, 是因为受到轴承的约束。在这种情况下我们说, 转动刚体没有达到“动平衡”, 转轴是“非自由的”。非自由轴的轴承都受到约束力的反作用力 (约束反力) N_1 、 N_2 , 在机械中这种约束反力有时如此之大, 可以给机械造成损伤, 引起事故。所以在设计机械的结构时, 需要考虑转动部件的动平衡, 以避免在轴承上产生约

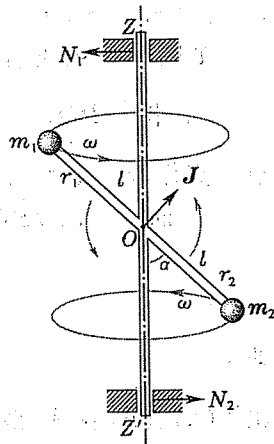


图 4-20 例题 3

——角动量可以不与角速度平行

4.2 转动惯量

在本节中我们讨论刚体绕固定轴转动的动力学问题。这时, 无论角动量 $\mathbf{J}$ 是否与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行, 起作用的只是角动量沿转轴方向的分量 $J_{\parallel}$ 。

取转轴的方向为 z , $J_{\parallel} = J_z$ 。 (4.32) 式中质元位矢 $\mathbf{r}_i$ 的分量为 (x_i, y_i, z_i) , $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, $\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega z_i$ 。在 (4.32) 式中后一行的表达式里, 正比于 ω 的第一项已是沿 z 方向的了; 第二项正比于 $\mathbf{r}_i$, 它的 z 分量为 z_i 。于是

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - z_i^2) \omega = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega \\ &= \left(\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega, \end{aligned}$$

式中 $r_{i\perp} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ 是质元 Δm_i 到转轴的垂直距离。此式表明, $J_{\parallel}$ 正比于 ω , 比例系数为式中括号内的量, 今记作 I :

$$J_{\parallel} = I \omega. \quad (4.33)$$

此量叫做刚体绕定轴的转动惯量。用转动惯量来表示, 则

$$J_{\parallel} = I \omega. \quad (4.34)$$

此式与一维直线运动的动量表达式 $p = mv$ 相对应: 角动量 $J_{\parallel}$ 对应于动量 p , 角速度 ω 对应于线速度 v , 转动惯量 I 对应于质量 m , 二者都是惯性大小的量度。

对于质量连续分布的物体, (4.33) 式应改为积分。令 ρ 代表密度, 质元 $\Delta m \rightarrow dm = \rho dV$, 这里 dV 是体积元, 于是

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \int r_{\perp}^2 \rho dV. \quad (4.33')$$

一般说来这是个三重的体积分, 但对于有一定对称性的物体, 积分的重数可以减少, 甚至于不需要积分。现在举几个简单而重要的例子。

(a) 均匀细棒绕垂直通过质心转轴的转动惯量

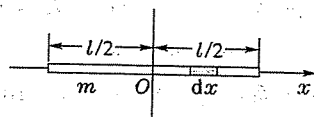


图 4-21 细棒的转动惯量

如图 4-21 所示, 设棒长为 l , 总质量为 m , 则线密度 (单位长度内的质量) 为 $\eta = m/l$ 。取沿细棒的坐标为 x , 则

$$I = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \eta dx = 2\eta \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\eta \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{1}{12} \eta l^3 = \frac{1}{12} m l^2.$$

(b) 均匀薄圆环绕垂直环面通过中心转轴的转动惯量

如图 4-22 所示, 设圆环的半径为 R , 质量为 m 。

$$= \sum_i \Delta m_i r_i'^2 + (\sum_i \Delta m_i) d^2 - 2(\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i') \cdot \mathbf{R}_d = I_C + m d^2 - 0,$$

最后一项等于0是根据质心的定义。至此定理证讫。

运用平行轴定理我们很容易算出3.2节(a)中的细棒绕端点D的转动惯量。这时 $d = l/2$,

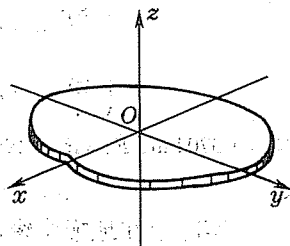
$$I_D = I_C + m d^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

在3.2节(b)、(c)…各情形里将转轴平移至刚体边缘时的转动惯量,也不难用类似方法求出。现只将结果列在表4-1中,在此就不赘述了。

(2) 薄板的正交轴定理

设刚性薄板的平面为 xy 面, z 轴与之垂直(见图4-28),则对于任何原点 O 绕三个坐标轴的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_z = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2), \\ I_x = \sum_i \Delta m_i y_i^2, \\ I_y = \sum_i \Delta m_i x_i^2. \end{cases}$$



由此显然可见

$$I_z = I_x + I_y. \quad (4.36) \quad \text{图4-28 正交轴定理}$$

应用这个定理可以很容易地求出圆环或圆盘绕直径的转动惯量。由于对称性, $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z$ 。所以,由3.2节(b)、(c)的结果, $I_z = m R^2$ (圆环) 和

$$\frac{1}{2} m R^2 \text{ (圆盘) 知 } I_x = I_y = \begin{cases} \frac{1}{2} m R^2, & \text{(圆环)} \\ \frac{1}{4} m R^2, & \text{(圆盘)} \end{cases}$$

下面我们再介绍一种方法——标度变换方法,可以不用积分即能求得某些特殊形状物体的转动惯量。

例题5 求均匀立方体绕通过面心的中心轴的转动惯量 I_C 。

解: 令立方体的总质量为 m , 边长为 l 。设

$$I_C = k m l^2,$$

从量纲可以看出,这里的系数 k 是个无量纲的量。因为一切立方体在几何上都是相似的,它们应具有同样的 k 。中心轴到棱边的距离是 $d = l/\sqrt{2}$, 利用平行轴定理,立方体绕棱边的转动惯量应为

$$I_D = k m l^2 + m \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(k + \frac{1}{2} \right) m l^2.$$

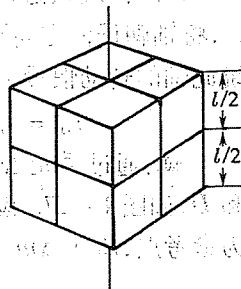


图4-29 立方体的转动惯量

表4-1 常见刚体的转动惯量

刚体	转轴	转动惯量
细棒	通过中心与棒垂直	$I_C = \frac{1}{12} m l^2$
	通过端点与棒垂直	$I_D = \frac{1}{3} m l^2$
细圆环	通过中心与环面垂直	$I_C = m R^2$
	通过边缘与环面垂直	$I_D = 2 m R^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{2} m R^2$
薄圆盘	通过中心与盘面垂直	$I_C = \frac{1}{2} m R^2$
	通过边缘与盘面垂直	$I_D = \frac{3}{2} m R^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{4} m R^2$
空心圆柱	对称轴	$I_C = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$
球壳	中心轴	$I_C = \frac{2}{3} m R^2$
	切线	$I_D = \frac{5}{3} m R^2$
球体	中心轴	$I_C = \frac{2}{5} m R^2$
	切线	$I_D = \frac{7}{5} m R^2$
立方体	中心轴	$I_C = \frac{1}{6} m l^2$
	棱边	$I_D = \frac{2}{3} m l^2$

如图4-29所示,将立方体分成8个相等的小立方体,每个的质量为 $m/8$, 边长为 $l/2$, 绕棱边的转动惯量为

$$I_{D'} = (k + \frac{1}{2}) \frac{m}{8} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{32} \left(k + \frac{1}{2}\right) m l^2.$$

8 个小立方体绕棱边的转动惯量之和应等于大立方体绕中心轴的转动惯量: $I_C = 8$

$I_{D'}$, 即 $\frac{8}{32} (k + \frac{1}{2}) = k$, 由此得:

$$k = \frac{1}{6} \quad I_C = \frac{1}{6} m l^2. \quad \parallel$$

最后, 我们引入回旋半径的概念。圆环绕中心轴的转动惯量与单个质点一样, 为 $I = mR^2$, 这是因为所有质量都分布在同一距离 $R = \sqrt{I/m}$ 上。我们定义任意刚体的回旋半径 $\bar{R} = \sqrt{I/m}$, 例如球体绕直径的回旋半径 $\bar{R} = \sqrt{2/5} R$, 立方体绕中心轴的回旋半径 $\bar{R} = \sqrt{1/6} R$. 意思是说, 从转动惯量来看, 似乎刚体的质量都分布在这个等效距离上。

4.4 绕定轴转动的动力学

把刚体看成质点组, 根据质点组的角动量定理(4.15) 式,

$$M_{\text{外}} = \frac{dJ}{dt},$$

若转轴固定, 刚体仅有一个自由度, 我们只需考虑力矩和角动量平行于转轴的分量:

$$M_{\text{外} //} = \frac{dJ_{//}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}, \quad (4.37)$$

刚体的转动惯量 I 是不变的, 故有

$$M_{\text{外} //} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta, \quad (4.38)$$

式中

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \quad (4.39)$$

称为刚体绕定轴的角加速度。(4.37) 式与一维直线运动的牛顿第二定律 $f = ma$ 是对应的, 这里力矩 $M_{\text{外} //}$ 对应于力 f , 转动惯量 I 对应于质量 m , 角加速度 β 对应于加速度 a .

若外力矩分量 $M_{\text{外} //} = 0$, 则角动量 $J = I\omega$ 守恒, 这一点即使对于非刚体也适用。转动惯量反映一个物体质量相对于转轴的分布情况; 若许多质量分布离转轴较远, 则转动惯量大, 反之则转动惯量小。在 没有外力矩分量 $M_{\text{外} //}$ 的情况下, 若转动惯量 I 变大(小), 则角速度 ω 变小(大), 以保证它们的乘积守恒。

在图 4-30 的演示实验里, 演示者坐在一个可绕垂直轴无摩擦转动的凳子上。先伸开手握哑铃的两臂, 并令人和凳一起以一定的角速度旋转。然

转动惯量变大, 转动又减缓下来。花样滑冰运动员或芭蕾舞演员快速旋转时, 总是先将手脚伸开, 以一定角速度转动, 然后迅速收回手脚, 转速就显然增加了。半径缩小时角速度增大, 这都是角动量守恒的表现。

下面我们举一些刚体绕定轴转动的例题。

例题 6 图 4-31 所示的装置叫做阿特伍德 (Atwood) 机, 用一细绳跨过定滑轮, 而在绳的两端各悬质量为 m_1 和 m_2 的物体, 其中 $m_1 > m_2$, 求它们的加速度及绳两端的张力 T_1 和 T_2 . 设绳不可伸长, 质量可忽略它与滑轮之间无相对滑动; 滑轮的半径为 R , 质量为 m , 且分布均匀。

解: 分别隔离 m_1 , m_2 和滑轮如图, 对 m_1 和 m_2 有

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1, \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2. \end{cases}$$

对滑轮, 外力矩为 $(T_1 - T_2)R$, 转动惯量 $I = \frac{1}{2} m R^2$, 故有

$$(T_1 - T_2)R = I\beta = \frac{1}{2} m R^2 \beta.$$

由于绳子不可伸长, 且不打滑,

$$a_1 = a_2 = R\beta.$$

上述方程联立求解可得

$$a_1 = a_2 = \frac{2(m_1 - m_2)}{m + 2(m_1 + m_2)} g,$$

$$T_1 = \frac{(m + 4m_2)m_1}{m + 2(m_1 + m_2)} g,$$

$$T_2 = \frac{(m + 4m_1)m_2}{m + 2(m_1 + m_2)} g. \quad \parallel$$

若滑轮质量 $m \rightarrow 0$, 以上结果与第二章例题 7 相同。

例题 7 图 4-32 所示为测量刚体转动惯量的装置。待测的物体装在转动架上, 细线的一端绕在半径为 R 的轮轴上, 另一端通过定滑轮悬挂质量为 m 的物体, 细线与转轴垂直。从实验测得 m 自静止下落高度 h 的时间为 t , 求待测刚体对转轴的转动惯量。忽略各轴承的摩擦, 忽略滑轮和细线的质量, 细线不可伸长, 预先测定转动架对转轴的转动惯量为 I_0 .

解: 隔离物体 m , 由牛顿第二定律有

$$mg - T = ma.$$

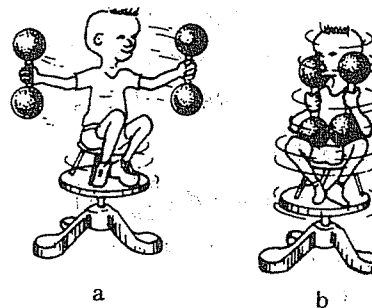


图 4-30 角动量守恒的演示实验

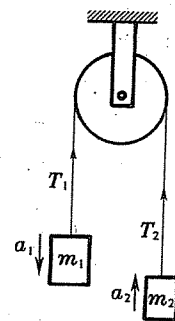


图 4-31 例题 6
—— 阿特伍德机

以待测刚体和转动架为整体,有绕定轴转动的运动

方程 $TR = (I + I_0)\beta$.

由细线不可伸长以及 m 自静止下落,有

$$a = R\beta, \quad h = \frac{1}{2}at^2.$$

上述各式联立求解,得

$$I = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) - I_0.$$

从已知数据 I_0, R, h, t 即可算出待测的转动惯量 I 来。

例题 8 如图 4-33 所示,以水平力 f 打击悬挂在 P 点的刚体,打击点为 O 。若打击点选择合适,则打击过程中轴对刚体的切向力 F_t 为 0,该点称为打击中心。求打击中心到轴的距离 r_0 。

解: 刚体在水平力的力矩 fr_0 作用下作定轴转动。设刚体的转轴转动惯量为 $I = m\bar{R}^2$, m 为刚体质量, $\bar{R}$ 为回旋半径。设棒的角加速度为 β , 则转动的运动方程为

$$fr_0 = I\beta = m\bar{R}^2\beta,$$

刚体质心的切向加速度为 $a_{ct} = r_c\beta$, 沿此方向的运动方程为

$$F_t + f = ma_{ct} = mr_c\beta.$$

从两式消去 β , 得

$$F_t = \left(\frac{r_0 r_c}{\bar{R}^2} - 1 \right) f.$$

要使轴对棒的切向力 F_t 为 0, 应有

$$r_0 = \frac{\bar{R}^2}{r_c}. \quad (4.40)$$

r_0 即为所求打击中心 O 到轴的距离。

上述结果适用于各种刚体。对于悬于端点的细棒, $r_c = l/2$, $\bar{R}^2 = l^2/3$, $r_0 = 2l/3$ 。

用棒击球时,若击球点在打击中心附近,则手受到棒的作用力最小。若击球点到手握处(转轴)的距离 $r > r_0$, 则手对棒的作用力 F_t 与球对棒的作用力 f 方向相同,握棒的手指受力。若 $r < r_0$, 则 F_t 与 f 方向相反,握棒手的虎口受力。

4.5 冲量矩

(4.38) 式是瞬时的规律,两端乘以 dt ,

$$M_{\text{外}\parallel} dt = I d\omega,$$

积分后得

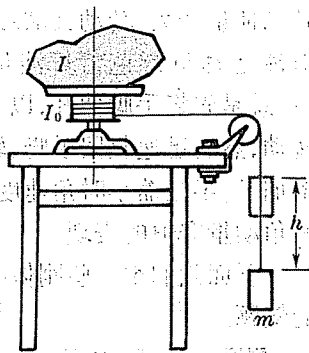


图 4-32 例题 7

转动惯量的测量

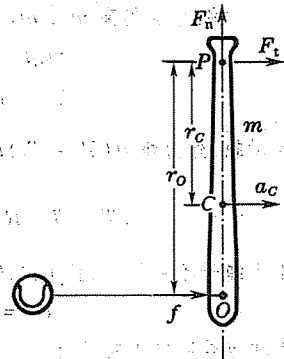


图 4-33 例题 8

——打击中心

§4. 刚体定轴转动

$$\int_0^t M_{\text{外}\parallel} dt = I(\omega - \omega_0). \quad (4.)$$

上式左端是力矩在一段作用时间内的冲量,称为冲量矩,它等于刚体角速度的增量。

例题 9 如图 4-34 所示,一质量为 m 的子弹以水平速度射入一静止悬于顶端的下端,穿出后速度损失 $3/4$,求子弹穿出后棒的角速度 ω 。已知棒长为 l , 质量为 M 。

解: 以 f 代表棒对子弹的阻力,对于子弹有

$$\int f dt = m(v - v_0) = -\frac{3}{4}mv_0.$$

子弹对棒的反作用力 f' 对棒的冲量矩为

$$\int f' l dt = l \int f' dt = I\omega.$$

因 $f' = -f$, 由两式得

$$\omega = \frac{3mv_0 l}{4I} = \frac{9mv_0}{4Ml}.$$

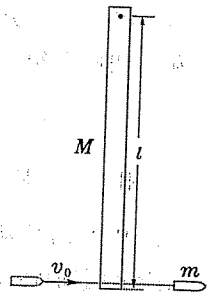


图 4-34 例题 9

——子弹穿棒

这里用到了长棒的转动惯量公式 $I = \frac{1}{3}Ml^2$ 。

此题也可以用子弹和棒的总角动量守恒来作,虽然它们的总动量是不守恒的(为什么?)。

例题 10 如图 4-35 所示,两个均匀圆柱各自绕自身的轴转动,两轴互相平行。柱半径和质量分别为 R_1, R_2, M_1, M_2 。开始时两柱分别以角速度 ω_1, ω_2 同向旋转。然缓缓移动它们,使互相接触。求两柱在相互间摩擦力的作用下所达到的最终角速度 ω_2' 。

解: 最终状态是两柱表面没有相对滑动,即 ω_1', ω_2' 方向相反,并满足

$$\omega_1' R_1 = -\omega_2' R_2, \quad (\varepsilon)$$

由于两柱接触时摩擦力大小相等(记作 f)、方向相反,力矩和它们的冲量(冲量矩)的大小正比于半径,方向相同:

$$\begin{cases} \int R_1 f dt = R_1 \int f dt = I_1(\omega_1' - \omega_1), \\ \int R_2 f dt = R_2 \int f dt = I_2(\omega_2' - \omega_2). \end{cases}$$

消去 $\int f dt$, 得

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1(\omega_1' - \omega_1)}{I_2(\omega_2' - \omega_2)}. \quad (b)$$

从(a)、(b)两式解得

$$\begin{cases} \omega_1' = \frac{R_2(I_1\omega_1 R_2 - I_2\omega_2 R_1)}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} = \frac{M_1 R_1 \omega_1 - M_2 R_2 \omega_2}{R_1(M_1 + M_2)}, \\ \omega_2' = \frac{R_1(I_2\omega_2 R_1 - I_1\omega_1 R_2)}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2} = \frac{M_2 R_2 \omega_2 - M_1 R_1 \omega_1}{R_2(M_1 + M_2)}. \end{cases}$$

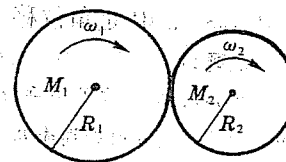


图 4-35 例题 10

两旋转柱体接触

这里用到了圆柱的转动惯量公式 $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$, $I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$. ||

请读者考虑一下,在以上例题中由两柱所构成的系统总角动量守恒吗?为什么?

4.6 刚体的功和能

(1) 刚体的重力势能

和一切质点组一样,刚体的重力势能为

$$E_{p\text{重}} = \sum_i \Delta m_i g h_i = g \left(\sum_i \Delta m_i h_i \right) = m g h_C. \quad (4.42)$$

亦即,这相当于总质量 $m = \sum_i \Delta m_i$ 集中在质心 C 的高度 h_C 上。

(2) 刚体的转动动能

刚体的定轴转动动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} J_{//} \omega = \frac{1}{2} I \omega^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

(3) 力矩的功

设 $\mathbf{f}_{\text{外}i}$ 是作用在质元 Δm_i 上的外力,则在时间间隔 Δt 内,外力对定轴转动刚体所作的元功为

$$\begin{aligned} dA_{\text{外}} &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{f}_{\text{外}i} dt = \sum_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{f}_{\text{外}i} dt \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{\text{外}i}) \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M}_{\text{外}} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_{\text{外}//} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

式中 $d\varphi = \omega dt$ 是角位移。

例题 11 装置如图 4-36 所示,绳的上端缠绕在圆柱上,下端系以重物 mg . 重物自然下垂,由静止开始降落,并带动圆柱转动. 求重物降落了高度 h 时的速率 v . 已知圆柱的质量和半径分别为 M 和 R ,并设绳的质量可忽略,且不可伸长。

解:由机械能守恒定律,

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2,$$

因绳不可伸长,有 $v = R\omega$,可以解得

$$v = 2 \sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}. \quad ||$$

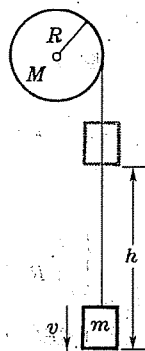


图 4-36 例题 11

——缠绕在轴上的重物

§4. 刚体定轴转动

例题 12 如图 4-37a 所示,将单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点,杆 m 也与单摆的摆锤相等. 开始时直杆自然下垂,将单摆摆锤拉到高度 h_0 , 令它自态下摆,于铅垂位置和直杆作弹性碰撞. 求碰撞后直杆下端达到的高度 h .

解:碰撞前单摆摆锤的速度为 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$, 令碰撞后直杆的角速度为 ω , 摆锤为 v' . 由角动量守恒,有

$$ml(v_0 - v') = I\omega,$$

式中杆的转动惯量 $I = \frac{1}{3} ml^2$.

在弹性碰撞过程中机械能也是守恒的:

$$\frac{1}{2} m(v_0^2 - v'^2) = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

(a)、(b) 联立解得

$$v' = \frac{v_0}{2}, \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}.$$

按机械能守恒,碰撞后摆锤达到的高度显然为 h'

$= \frac{h_0}{4}$, 而杆的质心达到的高度 h_C 满足

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = mgh_C,$$

由此得

$$h = 2h_C = \frac{3h_0}{2}.$$

结果见图 4-37b. ||

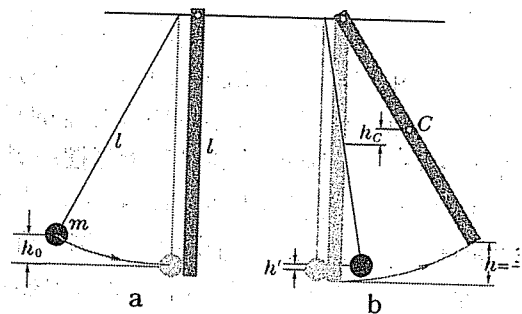


图 4-37 例题 12——单摆与悬杆碰撞

4.7 复摆

在重力作用下绕不通过质心的水平轴运动的任何刚体(见图 4-38), 叫做复摆(物理摆), 这名称是相对于单摆(数学摆)而言的. 单摆的质量全部集中于下端, 可看作质点, 复摆则不能, 需要用刚体的概念来处理. 上题中的直杆就是一个复摆。

复摆的重力势能为

$$U(\theta) = mgr_C(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2} mgr_C \theta^2 \quad (\text{小摆幅近似}),$$

r_C 为悬点 O 到质心 C 的距离. 下面来求复摆的周期。

在第三章 3.1 节中我们曾推导过一个一维小振动周期的公式(3.36) 那公式不仅适用于平动, 对于定轴转动, 只要将质量 m 换成转动惯量 I 即可。

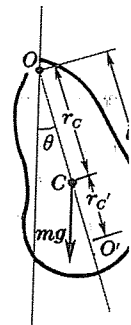


图 4-38 复摆

$$x \rightarrow \theta, \quad v \rightarrow \omega, \quad m \rightarrow I,$$

故

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{U_0''}}, \quad (4.45)$$

式中 $U_0'' = [d^2 U(\theta)/d\theta^2]_{\theta=0}$. 对复摆, $U_0'' = mgr_C$, 故有

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_C}}. \quad (4.46)$$

与单摆的周期公式相比,可以看出,复摆相当于一个摆长为

$$l_0 = \frac{I}{mr_C} \quad (4.47)$$

的单摆。由上式定义的 l_0 叫做复摆的等值摆长。利用平行轴定理 $I = I_C + mr_C^2$ 可将上式改写一下:

$$l_0 = r_C + \frac{I_C}{mr_C} \quad \text{或} \quad \frac{I_C}{mr_C(l_0 - r_C)} = 1. \quad (4.48)$$

上式表明, r_C 和 $r_C' = l_0 - r_C$ 的地位是可以对调的,亦即,如果我们把复摆倒过来,悬挂在 OC 延长线上到 O 点的距离为 l_0 的 O' 点上,其周期不变。复摆的这一性质,称为“可倒逆性”。通过测量复摆的周期,是精密测量重力加速度 g 的一种重要方法。若利用周期公式(4.46),就要涉及到转动惯量 I ,这是一个难以精确测量的量。如果利用摆的可倒逆性,找到周期相等的 O 、 O' 两点,精确地测出其间距离 l_0 ,即可利用含等值摆长的周期公式

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

求得 g 值。

例题 13 悬挂于圆周上一点的圆环,叫做圆环摆。圆环摆的一个奇特的性质,是把它截去任意一段圆弧,其周期不变。试证明之。

解: 整个圆环直径的两个端点是对称的,互为倒逆点。故其等值摆长 $l_0 = 2R$ (R 为半径)。如图 4-39 所示,在圆环上截去一段圆弧,令剩下一段的质心为 C , $\overline{OC} = r_C$, 设其质量为 m 。利用平行轴定理,绕圆心的转动惯量为 $I_0 = I_C + m(R - r_C)^2$ 。另一方面,对于圆心,圆弧上所有的点都等远,故其回旋半径为 R , $I_0 = mR^2$ 。所以

$$I_0 = I_C + m(R - r_C)^2 = mR^2,$$

由此解得

$$I_C = mr_C(2R - r_C).$$

按(4.48)式,

$$I_C = \frac{mr_C(2R - r_C)}{2R}$$

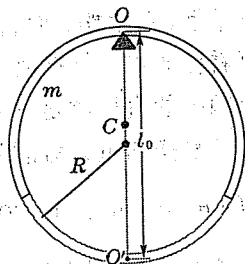


图 4-39 例题 13

亦即,这等值摆长与整个圆环的相同,从而周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}},$$

与截去多少无关。||

§ 5. 刚体的平面平行运动

5.1 刚体一般运动的动力学

我们一直把刚体看作是质点组,对于一个质点组,“质心”的概念有重要的意义。因为对于平动,我们有质心运动定理:

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}, \quad (3.5)$$

对于绕质心的转动,我们有质心角动量定理:

$$\mathbf{M}_{\text{外}C} = \frac{d\mathbf{J}_C}{dt}. \quad (4.4)$$

由于刚体没有形变,即内部质点之间没有相对运动,所以若知道了质心本的运动和绕质心的转动,整个刚体的运动就全部知晓了。因此,利用以上两条定理,就可全部解决刚体的动力学问题。

5.2 平面平行运动

若刚体内所有点的运动都平行于某一平面,则这种运动叫做刚体的平面平行运动。在平面平行运动中,刚体内垂直于该平面的任一直线在运动中始终保持垂直于该平面,而且在垂线上各点的运动显然是相同的。因此,为研究这种运动,只须取平行于该平面的任一剖面加以研究就够了。对于平面平行运动,刚体的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ (或者说转轴) 只能垂直于运动平面,与定轴转动的区别仅在于转轴本身是可以横向移动的。所以,对于平面平行运动,上面的(3.50)式可以只取运动平面内的两个分量,而(4.49)式可以只取垂直运动平面(即平行转轴)的分量。这时 $J_{C//} = I_C \omega$, $dJ_{C//}/dt = I_C d\omega/dt = I_C \beta$, (4.49)式化为

$$M_{\text{外}C//} = I_C \frac{d\omega}{dt} = I_C \beta,$$

此式形式上与刚体绕定轴转动的动力学公式(4.38)一样,只不过此式必须以质心为参考点,转轴随着质心平动。

归纳起来,刚体平面平行运动可分解为质心的运动和绕质心的转动,二者的动力学方程分别为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{质心运动定理} \\ \text{绕质心的转动} \end{array} \right. \quad \mathbf{F}_{\text{外}} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}, \quad (4.50a)$$

例题 14 一质量为 m 半径为 R 的均匀圆柱体,沿倾角为 θ 的粗糙斜面自静止无滑滚动(见图 4-40),求静摩擦力、质心加速度,以及保证圆柱体作无滑滚动所需最小摩擦系数。

解:用 f 代表静摩擦力,根据质心运动定理,有

$$mgsin\theta - f = ma_c, \quad (a)$$

对于质心重力的力矩等于 0,只有摩擦力矩 Rf ,从而

$$Rf = I_C \beta = \frac{1}{2} mR^2 \beta. \quad (b)$$

刚体上的 P 点同时参与两种运动:随圆柱体以质心速度 v_C 平动,和以线速度 $R\omega$ 绕质心转动。无滑动意味着圆柱体与斜面的接触点 P 的瞬时速度为 0,由此得

$$v_C = R\omega.$$

对时间求导,得

$$a_C = R\beta. \quad (c)$$

由(a)、(b)、(c)解得

$$\begin{cases} f = \frac{1}{3} mgsin\theta, \\ a_C = \frac{2}{3} gsin\theta. \end{cases}$$

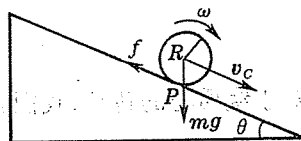


图 4-40 例题 14——

圆柱沿粗糙斜面下滚

要保证无滑滚动,所需静摩擦力 f 不能大于最大静摩擦力 $\mu N = \mu mg \cos\theta$,即

$$f \leq \mu N, \quad \text{或} \quad \frac{1}{3} mgsin\theta \leq \mu mg \cos\theta,$$

亦即

$$\mu \geq \frac{1}{3} \tan\theta.$$

摩擦系数小于此值就要出现滑动。

例题 15 如图 4-41 所示,将一根质量为 m 的长杆用细绳从两端水平地挂起来,其中一根绳子突然断了,另一根绳内的张力是多少?

解:设杆长为 $2l$,质心运动定理和角动量定理给出

绳断的一刹那的运动方程:

$$mg - T = ma_c, \quad (a)$$

$$Tl = I_C \beta, \quad (b)$$

式中转动惯量 $I_C = \frac{1}{3} ml^2$. 因在此时刻悬绳未断的一端

加速度为 0,从而在质心的加速度和角加速度之间有如下关系:

$$a_c = \beta l. \quad (c)$$

从(a)、(b)、(c)得绳中张力

$$T = \frac{1}{4} mg.$$

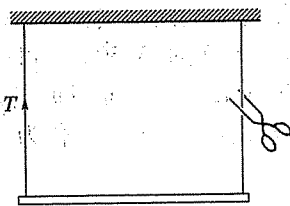


图 4-41 例题 15——

一头绳子断了

解:开始时乒乓球与桌面的接触点 P 具有速度 $v_{P0} = v_{C0} + R\omega_0 > 0$,乒乓球一边滑动一边倒着转动。它在水平方向受滑动摩擦力 $-\mu mg$ 的作用,按照质心运动定理,有

$$-\mu mg = ma_c = m \frac{dv_C}{dt},$$

由此积分得质心速度随时间的变化:

$$v_C = v_{C0} - \mu gt. \quad (a)$$

对质心的摩擦力矩为 $-\mu mgR$

R ,对质心的转动方程为

$$-\mu mgR = I_C \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} mR^2 \frac{d\omega}{dt},$$

由此积分可得角速度随时间的变化:

$$\omega = \omega_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu g}{R} t. \quad (b)$$

下面利用(a)、(b)两式来分析乒乓球运动的特点。

(1). 到达 $t = t_1 = \frac{v_{C0}}{\mu g}$ 时刻, $v_C = 0$, $\omega = \omega_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu g}{R} t_1$, 据题目所给条件 $v_{C0} < \frac{2}{3} R\omega_0$

这时刻 $v_C = 0$, $\omega > 0$, 即质心停止运动,绕质心的旋转方向没有变。

当 $t > t_1$ 时, $v_C < 0$, $\omega > 0$, 质心开始倒退,但接触点 P 的速度 $v_P = R\omega + v_C > 0$, 滑动摩擦力沿负 x 方向,驱使质心加速倒退,而其力矩则继续减缓转动,直到接触点 P 的速度 $v_P = R\omega + v_C$ 减到 0 为止。

(2) v_P 减到 0 的时刻 t_2 满足

$$R\left(\omega_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu g}{R} t_2\right) + (v_{C0} - \mu gt_2) = 0,$$

由此可解出 t_2 来:

$$t_2 = \frac{2}{5} \frac{R\omega_0 + v_{C0}}{\mu g}.$$

自 $t = t_2$ 时刻以后,乒乓球向后作无滑滚动,若不计滚动摩擦,其质心速度和角速度保持恒定:

$$\begin{cases} v_C = v_{C0} - \mu gt_2 = -\frac{2}{5} \left(R\omega_0 - \frac{3}{2} v_{C0} \right), \\ \omega = -\frac{v_C}{R} = \frac{2}{5} \left(\omega_0 - \frac{3}{2} \frac{v_{C0}}{R} \right). \end{cases}$$

例题 17 一质量为 m 、半径为 r 的轮子以角速度 ω_0 旋转。将它轻轻地放到地面上,设地面的滑动摩擦系数为 μ ,求轮子最后的前进速度和角速度。达到此运动状态经过了多少时间?

解:轮子刚落地时接触点向后滑,故摩擦力 f 向前,一方面推动轮子加速前进,另一方面使它的转动减缓。经过时间 t 后达到只滚不滑的匀速滚动状态。令此时的质心速度为 v_C ,角速度为 ω ,则有

$$v_C = r\omega, \quad (a)$$

得

$$\mu mgt = m(v_C - 0), \quad (b)$$

$$-\mu mgt = I_C(\omega - \omega_0), \quad (c)$$

式中 I_C 为轮子绕质心的转动惯量。由 (a)、(b)、(c) 三式解得

$$v_C = r\omega = \frac{r\omega_0}{1 + \frac{mr^2}{I_C}} = \frac{r\omega_0}{\mu g \left(1 + \frac{mr^2}{I_C}\right)}$$

5.3 瞬时转动中心

在任何瞬时,作平面平行运动的刚体(或它的延伸体)上总有一点 O' ,

其速度 $v_{O'} = 0$ 。这时整个刚体只能围绕此点旋转。这个点叫做刚体的瞬时转动中心或瞬心。例如在平面上作纯滚动的圆柱体或球,与平面的接触点就是它的瞬心。

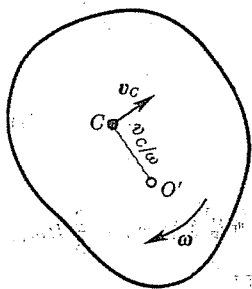


图 4-43 瞬心相对于质心的位置

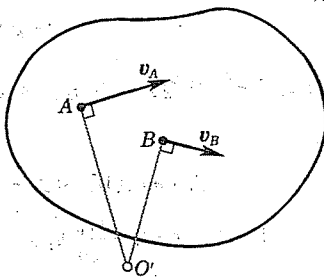


图 4-44 求瞬心的几何方法

若已知质心速度

v_C 和角速度 ω , 显然瞬心 O' 在与 v_C 垂直的方向上距

离 $\overline{O'C} = v_C/\omega$ 的地方(见图 4-43)。如果你知道平面刚体上 A、B 两点同一瞬时速度 v_A 、 v_B 的方向, 则它们垂线的交点即为瞬心 O' (见图 4-44)。

现在来考察以瞬心为参考系原点的刚体的动力学。让我们回到 1.3 节的 (4.24) 式, 当我们从惯性系 K 变换到以 O' 为原点的参考系 K' 时(参看图 4-8), 角动量作如下变换:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}' + m\mathbf{r}'_C \times \mathbf{V} + m\mathbf{R} \times \mathbf{V},$$

对 t 求导:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{P}' + \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{P}'}{dt} + m \frac{d\mathbf{r}'_C}{dt} \times \mathbf{V} + m\mathbf{r}'_C \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} + m \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{V} + m\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt},$$

若 K' 系的原点 O' 为瞬心, 则 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} = 0$, 且在选定的时刻 $\mathbf{R} = 0$, 于是有

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt} + m\mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_0,$$

式中 $\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 为瞬心 O' 的加速度。以瞬心 O' 为原点的瞬时参考系 K' 是非惯

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt} - \mathbf{r}'_C \times \mathbf{f}_{\text{惯}}. \quad (4.51)$$

因我们瞬时地选了 $\mathbf{R} = 0$, 按 (4.22) 式, 在 K' 系中的外力矩与惯性系 K 一样:

$$\mathbf{M}_{\text{外}} = \mathbf{M}'_{\text{外}}, \quad (4.52)$$

将 (4.51)、(4.52) 式代入惯性系的角动量定理 $\mathbf{M}_{\text{外}} = d\mathbf{J}/dt$, 移项后, 我们有

$$\mathbf{M}'_{\text{外}} + \mathbf{r}'_C \times \mathbf{f}_{\text{惯}} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt}. \quad (4.53)$$

这便是瞬心系 K' 中的角动量定理, 它与惯性系中的角动量定理的差别在于除外力矩外多了一项惯性力对质心 C 的力矩, 当瞬心的加速度 $\mathbf{a}_0$ (或者说惯性力 $\mathbf{f}_{\text{惯}}$) 与 K' 系里质心的位矢 $\mathbf{r}'_C$ (即前面的 $\overline{O'C}$) 平行或反平行时, 惯性力的力矩为 0, 瞬心系的角动量定理与惯性系中的形式一样。例如在平面上作纯滚动的轮子就属于这种情况, 因为其瞬心的加速度垂直地面向上, 直指位于中心的质心 C。然而, 若在轮缘上附加质量 Δm , 质心 C' 不再位于中心 C (见图 4-45), 使用瞬心参考系时就得考虑惯性力的力矩了。

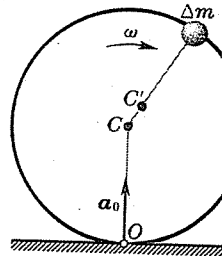


图 4-45 瞬心的加速度方向不指向质心的情形

例题 18 图 4-46 所示为一放在水平桌面上的线轴。桌面有一定的摩擦力, 可使线轴作纯滚动。实验表明, 用力向斜上方拉时, 随着角度不同, 线轴有时朝前滚, 有时朝后滚。试对此问题作个分析。

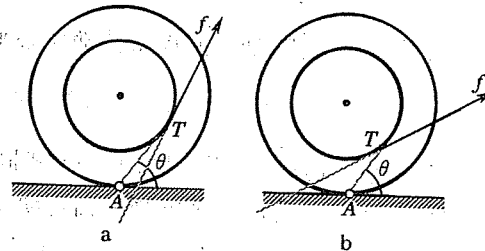


图 4-46 例题 18——线轴朝哪边滚?

解: 在此问题中, 线轴与桌面的接触点 A 是瞬心, 滚动时其加速度向上, 直指质心 C, 故不必考虑惯性力。通过 A 作轴的切线 AT (见图中灰线), 它相对于水平面的仰角为 θ 。由图不难看出, 当拉线的仰角大于 θ 时, 其延长线在瞬心 A 之前, 力矩是逆时针的, 使线轴向后滚 (图 a); 当拉线的仰角小于 θ 时, 其延长线在瞬心 A 之后, 力矩是顺时针的, 使线轴向前滚 (图 b)。

例题 19 一半径为 r 的粗糙圆盘与水平地面紧密接触。圆盘一面绕自转轴以角速度 ω 旋转, 一面以速度 v 平移 ($v \ll r\omega$)。设滑动摩擦系数 μ 与速度无关, 求圆盘所受的阻力。

解: 如图 4-47 所示, 瞬心 O 在质心 C 之下距离为 $a = v/\omega$ 处。在 O 之下距离为 a 处取对称点 C' , 以同样半径作圆弧。可以看出, 在此弧线之下刚体上各质点的速度分布对于瞬心 O 是对称的。

那一月牙形面积所受阻力,由对称性可以看出,其合力是与平动速度反平行的。以 O 为原点取坐标的极轴沿平动速度的方向,沿 θ 方向月牙的厚度为 $\tau = 2a \sin \theta$, θ 到 $\theta + d\theta$ 之间面元的面积为 $dS = \tau r d\theta$,

$$\text{摩擦力 } df = \mu \sigma g dS$$

($\sigma = m/\pi r^2$ 为单位面积上的质量,即面密度), 摩擦力在极轴方向的投影为

$$\begin{aligned} -df \sin \theta &= -\frac{2\mu m g a}{\pi r} \sin^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{2\mu v m g}{\omega \pi r} \sin^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

$$\text{合力为 } f = -\int_0^\pi \sin \theta df = -\frac{2\mu v m g}{\omega \pi r} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\mu v m g}{\omega r} \propto \frac{v}{\omega} \quad \text{I}$$

本例题可以看成是吸尘器的模型。不转时,拖起来是很费劲的。高速转起来阻力就变得很小,因为它反比于 ω 。

5.4 平面平行运动的动能

按照第三章4.3节中讲的克尼希定理,质点组的总动能 E_k ,等于相对于质心系的动能 E_k^{CM} ,加上刚体整体随质心平动的动能 $\frac{1}{2} m v_c^2$:

$$E_k = E_k^{\text{CM}} + \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (3.52)$$

对于平面平行运动,与用推导(4.43)式同样的方法可以证明,相对于质心系的动能 E_k^{CM} 可写成与刚体绕定轴转动动能一样的形式:

$$E_k^{\text{CM}} = \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (4.54)$$

所以,我们最后得到刚体平面平行运动的动能公式为

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (4.55) \quad \text{I}$$

例题20 计算从同一高度 h 自静止状态沿斜面无滑滚下时,匀质(a)圆柱(b)薄球壳(c)球体的质心获得的速度(见图4-48)。设三者的总质量和半径相同。

解:由机械能守恒,有

$$mgh = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

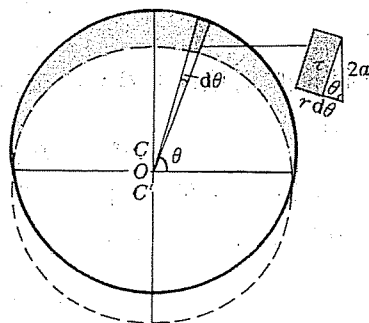


图4-47 例题19——吸尘器

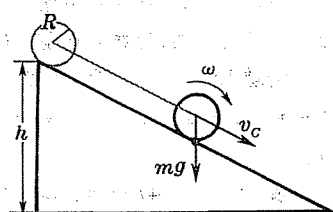


图4-48. 例题20

半径 $\bar{R}$ 分别为 $\sqrt{1/2}R$ 、 $\sqrt{2/3}R$ 、 $\sqrt{2/5}R$ 。无滑滚动的条件是 $v_c = R\omega$, 上式右端的动能可写为 $\frac{1}{2} m \left(1 + \frac{R^2}{R^2}\right) v_c^2$, 从而

$$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{R^2}{R^2}}}.$$

具体地说,

$$\begin{cases} \text{(a) 圆柱} & v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \\ \text{(b) 球壳} & v_c = \sqrt{\frac{6}{5}gh}, \\ \text{(c) 球体} & v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \quad \text{I} \end{cases}$$

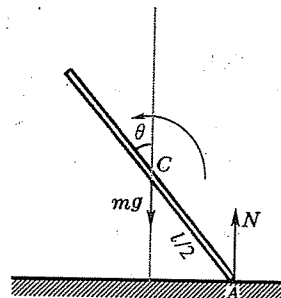


图4-49 例题21
——细杆滑倒

例题21 一质量为 m , 长为 l 的匀质细杆, 铅直地放置在光滑的水平地面上。当杆自静止倒下时, 求地面对杆端的支撑力(见图4-49)。

解:由机械能守恒知,当杆与铅直线成 θ 角时,

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \quad (\text{a})$$

其中 $I_C = \frac{1}{12} m l^2$ 。

由于没有摩擦力,质心 C 铅直下落。考察细杆着地点 A 的运动。它的运动可看成一方面随质心以速度 v_c 下降,另一方面又以线速度 $\frac{l}{2} \omega$ 绕质心转动。后者在铅直方向上的分量为 $\frac{l}{2} \omega \sin \theta$, 方向向上。实际上 A 点的运动限制在水平面上,铅直速度为0,即上述两个铅直速度应相互抵消。故有

$$v_c = \frac{l}{2} \omega \sin \theta, \quad (\text{b})$$

于是(a)式可以写成

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{1}{3 \sin^2 \theta}\right) v_c^2.$$

由此得

$$v_c^2 = \frac{3gl(1 - \cos \theta) \sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta},$$

对 t 求导

$$2v_c \frac{dv_c}{dt} = \frac{3gl \sin \theta (\sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \omega.$$

即质心加速度为

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{dv_c}{dt} = \frac{3gl \sin \theta (\sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \frac{\omega}{2v_c} \\ &= \frac{3g(\sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2}, \end{aligned}$$

A 端受地面的支撑力为

$$N = m(a - a_c) = m \left[\frac{3g(\sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta)}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \right]$$

$$= mg \frac{4 - 6 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2}$$

当 $\theta = \pi/2$ 时, $N = mg/4$. $\blacksquare$

例题 22 在光滑的桌面上有一质量为 M 、长 $2l$ 的细杆, 一质量为 m 的小球沿桌面以速率 v_0 垂直地撞击在细杆的一端 (见图 4-50)。设碰撞是完全弹性的, 求碰后球和杆的运动情况。在什么条件下细杆旋转半圈后会第二次撞在小球上?

解: 设碰撞后小球和杆的质心速度分别为 v_1 和 v_2 , 杆绕质心的角速度为 ω , 则有

$$\text{动量守恒} \quad mv_0 = mv_1 + Mv_2, \quad (\text{a})$$

$$\text{角动量守恒} \quad ml(v_0 - v_1) = I_C \omega, \quad (\text{b})$$

(以杆的质心为参考点)

$$\text{动能守恒} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_C \omega^2, \quad (\text{c})$$

式中 $I_C = \frac{1}{3}Ml^2$ 为杆绕其质心的转动惯量。由 (a)、(b)、(c) 解得

$$\omega = \frac{6mv_0}{l(4m+M)}, \quad \text{和} \quad \begin{cases} v_1 = \frac{4m-M}{4m+M}v_0, \\ v_2 = \frac{2m}{4m+M}v_0. \end{cases}$$

欲细杆转半圈后再次击中小球, 它们必须走得一样快, 即 $v_1 = v_2$, 根据上面的结果, 这要求 $M = 2m$. $\blacksquare$

例题 23 半径为 R 的圆木以角速度 ω_0 在水平地面上作纯滚动, 在前进的路上撞在一高度为 h 的台阶上 (见图 4-51)。设碰撞是完全非弹性的, 即碰撞后圆木不弹回。要圆木能够翻上台阶而又始终不跳离台阶, 对台阶的高度有什么要求?

解: 碰撞前圆木的质心速度为 $v_0 = R\omega_0$, 按 (4.25) 式, 碰撞前圆柱体对接触点 A 的角动量为固有角动量 $I_C \omega_0$ + 轨道角动量 $mv_0(R-h)$, 碰撞后的角动量为 $I_A \omega$, 由角动量守恒得出碰撞后圆木的角速度为

$$\omega = \frac{I_C \omega_0 + mv_0(R-h)}{I_A} = \frac{I_C + mR(R-h)}{I_C + mR^2} \omega_0.$$

将圆柱体的转动惯量公式 $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ 代入, 得

$$\omega = \frac{(3R-2h)\omega_0}{3R}. \quad (\text{a})$$

(1) 圆木能够爬上台阶的条件是它碰撞后的动能足够大:

$$\frac{1}{2}I_A \omega^2 > mgh, \quad (\text{b})$$

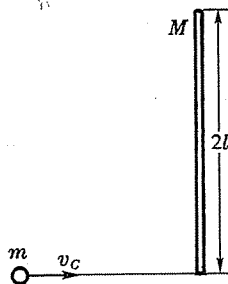


图 4-50 例题 22
球碰杆, 杆打球

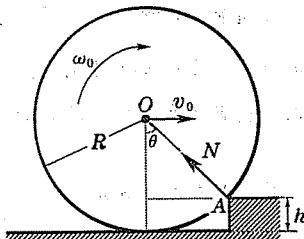


图 4-51 例题 23
——滚木撞台阶

$$\omega_0^2 > \frac{2mgh(I_C + mR^2)}{[I_C + mR(R-h)]^2}.$$

代入 I_C 的表达式后, 得

$$\omega_0^2 > \frac{12hg}{(3R-2h)^2}.$$

(2) 圆木不跳离台阶的条件是台阶的支撑力 N 始终大于 0. N 在碰撞的最初时小 (为什么?), 我们就来计算此刻的 N . 沿 OA 方向的向心加速度是重力的分量和力之差造成的, 按牛顿第二定律有

$$mR\omega^2 = mgsin\theta - N,$$

由图可知 $sin\theta = 1 - h/R$, 从而有

$$N = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right) - mR\omega^2 = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right) - mR\left[\frac{I_C + mR(R-h)}{I_C + mR^2}\right]\omega_0^2 > 0,$$

$$\text{或} \quad \omega_0^2 < \frac{g}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)\left[\frac{I_C + mR^2}{I_C + mR(R-h)}\right]^2,$$

代入 I_C 的表达式后, 得

$$\omega_0^2 < \frac{9(R-h)g}{(3R-2h)^2}.$$

将 (c)、(d) 两式综合起来, 我们有

$$\frac{9(R-h)g}{(3R-2h)^2} > \omega_0^2 > \frac{12hg}{(3R-2h)^2}.$$

要两个不等式同时成立, 则必须有 $9(R-h) > 12h$, 即

$$h < \frac{3R}{7}.$$

否则, 初速小了爬不上去; 初速刚够大, 爬上去时就跳起来了. $\blacksquare$

§ 6. 刚体的平衡

6.1 刚体的平衡方程

处于静止的刚体既没有平动, 也没有转动。因此, 刚体平衡的充分必要条件是它所受的合外力为 0, 对任意一个参考点的合外力矩为 0:

$$\begin{cases} \sum_i \mathbf{f}_{i\text{外}} = 0, \end{cases} \quad (4.56)$$

$$\begin{cases} \sum_i \mathbf{M}_{i\text{外}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i\text{外}} = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

矢量式 (4.56) 和 (4.57) 各相当于三个分量式, 后者包含了“必须对任意的转轴都成立”的意思。这样的力系称为零力系, 零力系的条件 (4.56) 和 (4.57) 式称为刚体的平衡方程。

当刚体的运动受到某种限制而我们又不想知道约束反力时, 刚体平

(xy 面) 两个力的平衡方程和垂直于此平面一个力矩的平衡方程就够了:

$$\begin{cases} \sum_i f_{i\text{外}x} = 0, & \sum_i f_{i\text{外}y} = 0; \end{cases} \quad (4.56')$$

$$\sum_i M_{i\text{外}z} = \sum_i (x_i f_{i\text{外}y} - y_i f_{i\text{外}x}) = 0. \quad (4.57')$$

例题 24 一架均匀的梯子, 重为 W , 长为 $2l$, 上端靠于光滑的墙上, 下端置于粗糙的地面上, 梯与地面的摩擦系数为 μ . 有一体重 W_1 的人攀登到距梯下端 l_1 的地方 (见图 4-52). 求梯子不滑动的条件.

解: 假定梯子不滑动, 设它与地面的夹角为 φ , 地面与墙的法向力分别为 N_1 和 N_2 , 地面的摩擦力为 f . 水平和铅直的两个力平衡方程为

$$\begin{cases} N_2 - f = 0, \\ N_1 - W - W_1 = 0. \end{cases} \quad (a) \quad (b)$$

力矩的参考点可以任意选择. 为了简单, 可以选图中 N_1 和 N_2 延长线的交点 C , 这样一来 N_1 和 N_2 就不进入此方程了.

$$2fl\sin\varphi - Wl\cos\varphi - W_1l_1\cos\varphi = 0. \quad (c)$$

由联立方程 (a)、(b)、(c) 解得

$$\begin{cases} N_1 = W + W_1, \\ N_2 = f = \frac{Wl + W_1l_1}{2l} \cot\varphi. \end{cases}$$

梯子不滑动的条件是 $f < \mu N_1$, 即

$$\frac{Wl + W_1l_1}{2l} \cot\varphi < \mu(W + W_1).$$

对于一定的倾角 φ , 人所能攀登的高度为

$$l_1 < \frac{2l\mu(W + W_1)}{W_1} \tan\varphi - \frac{Wl}{W_1},$$

φ 角愈大, 允许人攀登得愈高; μ 愈大, 允许人攀登得也愈高.

如果要求攀到一定的高度 l_1 , 则要求梯子的倾角

$$\varphi > \arctan\left(\frac{Wl + W_1l_1}{2l\mu(W + W_1)}\right).$$

l_1 愈小允许 φ 愈小, μ 愈大允许 φ 愈小. ||

如果本例中墙与梯之间的摩擦也不可忽略, 则多出一个未知数. 但独立的平衡方程数目并没有再多, 从而无法求出确定的解答. 这类问题叫做静不定问题 (static indeterminate problem). 静不定问题的实质在于静摩擦的大小与运动的趋势有关, 有两个以上的静摩擦力参与物体的平衡时, 它们各自承担多少, 与达到平衡的过程有关, 结论是不惟一的. 所谓“运动的趋

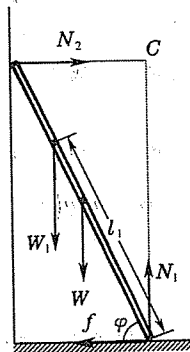


图 4-52 例题 24

——梯子的平衡

已超出了刚体概念的范围, 故刚体模型在此已无能为力.

6.2 天平的灵敏度

下面我们讨论天平灵敏度这个有实际意义的问题. 天平的主要结构是通过刀口架在立柱上的一根横梁, 其两端挂有秤盘. 不能设想横梁只是一根细杆, 因为那样一来, 只要两边重量稍有不等, 横梁就会倾翻并从刀口上跌落下来, 而不是稳定在一个倾斜的位置上. 要避免如此, 横梁的重心 (质心) 必须在刀口的下方. 通常灵敏天平的横梁的下方都固联一根摆动指针 (见图 4-53), 针上装有一个螺丝, 用以调节重心的高低.

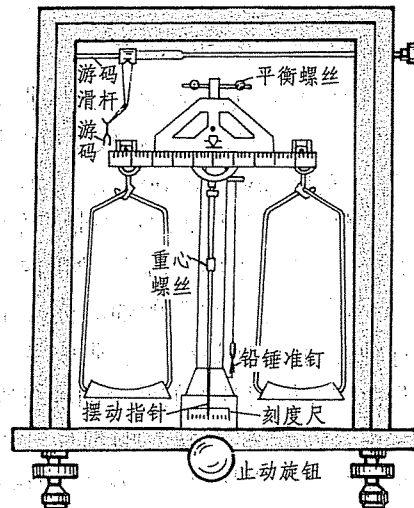


图 4-53 天平

如图 4-54 所示, 设刀口在 O , 臂长为 l , 横梁本身的重量为 W_0 , 重心在 C 点, $OC = h$, 两边的重量稍有不等, 分别为 W 和 $W + \Delta W$, 此时横梁的倾斜角为 φ . 这是一个刚体绕定点转动的平衡问题, 只需一个平衡方程:

$$(W + \Delta W)l\cos\varphi - Wl\cos\varphi - W_0h\sin\varphi = 0.$$

由此解出 φ ,

$$\tan\varphi = \frac{\Delta W l}{W_0 h}.$$

实际上人们不是看 φ 角的大小, 而是看刻度板上的读数 ε . 用 L 代表刻度板到刀口 O 的距离, 则读数

$$\varepsilon = L \tan\varphi = \frac{lL}{W_0 h} \Delta W,$$

ε 与 ΔW 成正比, 比例系数标志着天平灵敏的程度, 称为天平的灵敏度, 记作 S . 于是

$$S = \frac{\varepsilon}{\Delta W} = \frac{lL}{W_0 h}. \quad (4.58)$$

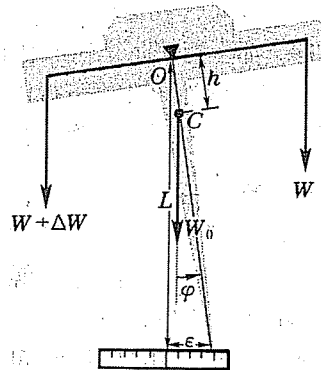


图 4-54 天平的灵敏度

为了提高天平的灵敏度, 可以把重心螺丝向上旋, 以减小 h . 当然不能将 h 减小到 0, 如前所述, 那样一来横梁就会倾翻.

§7. 回转运动

7.1 不受外力矩的回转运动

刚体绕定点的运动一般是非常复杂的,在这里我们只讨论一种较简单的特殊情况,即陀螺仪(gyroscope)的运动(回转运动)。陀螺仪的特点是,具有轴对称性和绕此对称轴有较大的转动惯量。如图4-55所示, G 是一个边缘厚重的轴对称物体,可绕对称轴转动。转轴装在一个常平架上。常平架是由支在框架 S 上的两个圆环组成,外环能绕由支点 A, A' 所决定的轴自由转动,内环可绕与外环相联的支点 B, B' 所决定的轴相对于外环自由转动,陀螺仪的轴装在内环上,它又可绕 OO' 轴相对于内环自由转动。 OO', BB', AA' 三轴两两垂直,而且都通过陀螺仪的重心。这样,陀螺仪就不受重力的力矩,且能在空间任意取向。

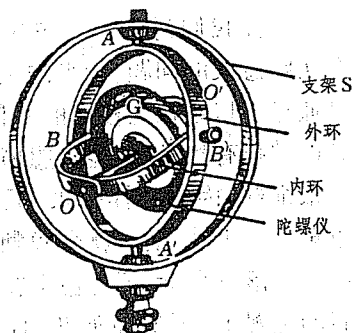


图4-55 常平架陀螺仪

刚体不受外力矩时角动量 $\mathbf{J}$ 守恒,因而转动轴线的方向不变。特别是陀螺仪,由于当它高速旋转时角动量很大,即使受到在实际中不可避免的外力矩(如轴承处的摩擦),如果外力矩较小,则其角动量的改变相对于原有的角动量来说是很小的,可忽略不计。这时无论我们怎样去改变框架的方向,都不能使陀螺仪的转轴 OO' 在空间的取向发生变化。陀螺仪这一特性可用来做为导弹等飞行体的方向标准,在导弹上装有此种陀螺仪,即可利用它来随时纠正导弹飞行中可能发生的方向偏离,控制其航向。

7.2 回转效应

陀螺仪的另一重要特性,是它受到外力矩作用时所产生的回转效应。图4-56所示为一杠杆陀螺仪,杆 AB 可绕光滑支点 O 在水平面内自由转动,也可偏离水平方向而倾斜。陀螺仪 G 和平衡重物 W 置于杆的两端,若调至平衡,杆 AB 是水平的。当陀螺仪不转动

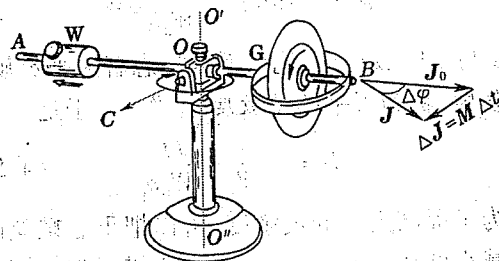


图4-56 回转效应

位置,杆就会倾斜。现在先调至平衡,并让陀螺仪 G 绕自身的转轴高速旋转起来,此后再移动 W 。我们会发现,此时杆并不倾斜,而是在水平面内绕铅直轴 $O'O''$ 缓慢地旋转起来。陀螺仪自转轴的这种转动,叫做进动(cession)。陀螺仪在外力矩作用下产生进动的效应,叫做回转效应(gyroscopic effect)。

当陀螺仪的自转轴正在进动的时候,若我们加一水平力于杠杆之上,企图加速它的进动,结果杠杆又出乎意料地向下偏转。就这样,给陀螺仪铅直方向的力会使它沿水平方向运动,而给水平方向的力却使它沿铅直方向运动。陀螺仪的这种“不听话”的运动规律,需要利用角动量和力矩的矢量性来说明。

按定义,力矩 $\mathbf{M}$ 等于角动量 $\mathbf{J}$ 的变化率,角动量的增量 $\Delta\mathbf{J}$ 等于力矩的冲量(冲量矩) $\mathbf{M}\Delta t$:

$$\Delta\mathbf{J} = \mathbf{M}\Delta t,$$

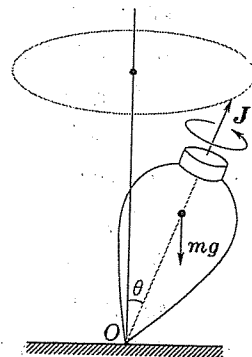
此外,陀螺仪是一个绕自转轴转动惯量 I 很大的轴对称刚体,我们可近似地认为其角动量与角速度都沿自转轴方向,并可写成 $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$ 。设陀螺仪绕自转轴高速旋转的角动量为 $\mathbf{J}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0$, 方向沿 AB 。使杠杆失去平衡后,其重力矩 $\mathbf{M}$ 是沿 OC 方向的(见图4-56),在水平面内与 AB 垂直),在时间间隔 Δt 内它的冲量矩 $\mathbf{M}\Delta t$ 产生同一方向的角动量增量 $\Delta\mathbf{J}$,在这段时间后角动量变为 $\mathbf{J} = I\mathbf{J}_0 + \Delta\mathbf{J}$ 。根据矢量的平行四边形合成法则(见图4-56), $\mathbf{J}$ 仍在水平面内,但其方向绕铅直轴 $O'O''$ 转过一个角度 $\Delta\varphi$ (对于俯视的观察者,转动是顺时针的)。这就是说,陀螺仪自转轴产生了沿此方向的进动。由于 $\Delta\mathbf{J} = \mathbf{J}\Delta\varphi = I\omega\Delta\varphi$, 按上式,进动角速度为

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{M}{I\omega}. \quad (4.59)$$

读者以同样的道理去解释,为什么当我们企图加速陀螺仪的进动时,它却向上跑去。

回转效应对我们来说并不陌生。小孩玩的陀螺就是绕自转轴转动惯量较大的轴对称物体,当它绕自转轴旋转的时候,在重力矩的作用下,它并不倒下来,而是其自转轴绕铅直方向进动,维持自转轴与铅直方向间的夹角 θ 不变(见图4-57)。

骑自行车的人都有这样的体会,自行车行驶时是靠车把的微小转动来调节平衡的。譬如车子有向右倒的趋势,骑车人只需将车把向右方略微



转动一下,即可使车子恢复平衡。左方亦然。有一种自行车的车锁装在龙头上,把龙头锁死。这时偷车人骑车的本事再大,也不可能把车骑上沿直线走。此外,骑车人想拐弯时,无需有意识地转动车把,只需将自己的重心侧倾,龙头自然会拐向一边。所有这些现象,读者都可利用回转效应来说明其中的道理。

回转效应在实际中还有许多应用。在枪膛或炮膛里都有螺旋形的来复线,其作用是使枪弹或炮弹出膛后绕着自身的对称轴迅速旋转。这样一来,当枪弹或炮弹自身的轴线与它前进的方向不一致时,靠着回转效应,空气阻力产生的力矩就会使它绕着前进的方向进动,使轴线始终不大偏离前进方向(见图4-58)。



图4-58 飞行弹头的稳定性

7.3 岁差

如图4-59所示,以地球为中心作任意半径的一假想大球面,称为“天球”。地球的赤道平面与天球相交的圆称为“天赤道(celestial equator)”,地球绕日公转的轨道平面与天球相交的圆称为“黄道(ecliptic)”,它是太阳在天球上的视轨迹。大家知道,赤道面与黄道面不相合,其间有 $23^{\circ}27'$ 的交角。天赤道与黄道相交于两点,当一年中太阳过这两点时分别为春分和秋分,在这两天全球各地昼夜等长。黄道上的春分点和秋分点统称“二分点(equinoxes)”。太阳从春分点出发,沿黄道运行一周回到春分点时,为一“回归年(tropical year)”。如果地轴(赤道面的法线)不改变方向,二分点不动,回归年与恒星年相等。古代的天文学家通过细心观测,就已令人惊奇地发现二分点由东向西缓慢漂移(也称为“进动”)。希腊天文学家喜帕恰斯(Hipparchus)大约在公元前130年报道,二分点的进动每年约36角秒(精确值为50.2角秒每年)。略后,我国西汉末年

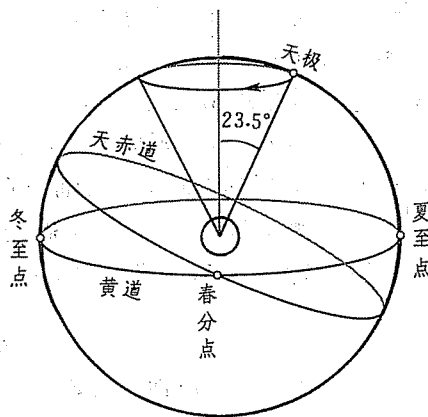


图4-59 岁差

的刘歆(xīn)与后汉的贾逵也发现了二分点的进动。这现象在我国称为“岁差”,晋朝的虞喜首先确定了岁差的数值为每50年一度(相当于72角秒每年)。南朝梁代何承天、祖冲之加以证实。古代以恒星年为年,结果实际的季节逐年提早到来。虽然相差不多,但长年积累,实际季节已与历书上的季节有了很显著的差别。历史上祖冲之首先将岁差引进历法,应用于他自编的《大明历》,采用了391

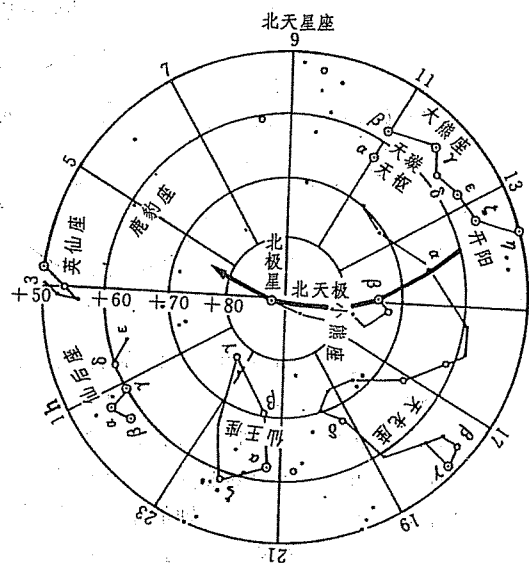


图4-60 北天极在天穹上的进动

年中有144个闰月的精密新置闰周期,这是我国历法史上一次重大的进步。

岁差的根源是地轴的进动(见图4-59)。地轴为什么会进动?万有引力对一个均匀球体的合力总作用在它的质心上,因为地球并不是理想的球体,其赤道部分稍有隆起(潮汐在这里也起了一定的作用),从而受到太阳和月亮给它的外力矩。用刚体的动力学原理定量地计算地球的进动,是个很复杂的问题,我们不在这里讨论,但地轴的进动毕竟是个事实,已为人类几千年长期的天文观测所证实。现代的北天极在勾陈一(小熊座 α 星)附近(见图4-60),通常就把勾陈一称作北极星。但四千七百多年前埃及天文学家却以右枢(天龙座 α 星)为北极星,三千年前周朝的天文学家却以帝(小熊座 β 星)为北极星。一万二千年后北天极将接近织女(天琴座 α 星),到那时不妨以织女星为北极星。

7.4 章动

陀螺仪“不屈服”于重力的作用而倾倒,无论怎样分析,总让人感到有点不自在。实际上它也不是完全不屈服。如图4-61所示,如果先把一个快速旋转的陀螺仪两端都支撑起来,然后撤去一端(A点)的支持,首先出现的现象是这一端确实下沉。然而,此后就立刻在水平面内进动了,与此同时下沉运动放慢,直到A点完全沿水平方向运动,但事情并不就此了结,紧接着又出现了新的现象。

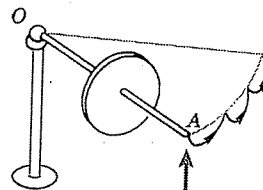


图4-61 进动陀螺仪的章动

A 点重新抬起,在理想的情况下可以达到它的初始高度。这样的过程周而复始地继续下

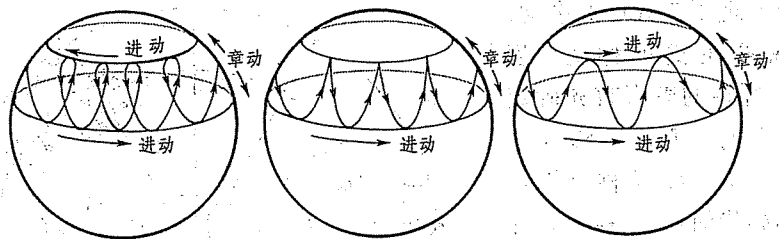


图 4-62 不同初始条件下的章动

去,端点 A 描绘出如图中所示的摆线轨迹。陀螺的这种运动叫做章动 (nutation),拉丁语中是“点头”的意思。图 4-62 给出一些不同初始条件下的章动。除非陀螺仪在起动时恰好符合稳定进动所需的条件,一般说来总的效果是陀螺的重心保持在低于起始点的水平上,由此释放出来的势能提供了进动和章动所需的动能。

地轴除进动外,也有章动。地轴的章动是英国天文学家布拉得雷 (J. Bradley) 于 1748 年分析了 20 年的观测资料后发现的。地轴章动的周期为 18.6 年,近似地说,就是 19 年。在我国古代历法中把 19 年称为一“章”,这便是中译名“章动”的来源。

本章提要

1. 角动量

(1) 质点的角动量: $\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$,

(2) 质点组的角动量: $\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

= 固有角动量 $\mathbf{J}_C$ + 轨道角动量 $m\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C$.

2. 力矩: 在单位时间内物体在相互作用中传递的角动量,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{J}}{dt}.$$

(1) 质点所受力矩: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$,

(2) 质点组所受力矩: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{外}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i\text{外}}$.

3. 角动量定理

(1) 惯性系 (任意参考点): $\mathbf{M}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{J}}{dt}$,

(2) 质心系 (以质心为参考点): $\mathbf{M}_{\text{外}C} = \frac{d\mathbf{J}_C}{dt}$,

(3) 刚体的瞬心系 (以瞬心为参考点): $\mathbf{M}'_A + \mathbf{r}'_A \times \mathbf{f}_{\text{瞬}} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt}$.

4. 角动量守恒定律 —— 空间各向同性

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i = \text{常量}, \quad \text{条件 } \mathbf{M}_{\text{外}} = 0.$$

例: (1) 孤立系, 所有 $\mathbf{f}_{i\text{外}} = 0$; (2) 有心力, $\mathbf{r}_i \parallel \mathbf{f}_{i\text{外}}$

5. 刚体: 内部质点没有相对运动 → 形状和大小不变。

(弹性模量和弹性波速 $\rightarrow \infty$ 时的理想模型)

运动学: 平动 + 转动

(1) 平动: 固联在刚体上的任一条直线在各时刻的位置始终保持平的运动。

任一点的运动都可代表整体的平动, 通常用质心来代表。

(2) 转动: 刚体上所有各点都绕同一直线 (转轴) 作圆周运动的运动。

角位移和角速度与转轴无关, 刚体各点具有共同的角速度。

有限角位移 $\Delta\varphi$ 不是矢量, 无限小角位移 $d\varphi$ 和角速度 ω 是矢量。

6. 刚体定轴转动

角动量: $J_{\parallel} = I\omega$, I 为转动惯量。

角动量定理: $M_{\text{外}\parallel} = \frac{dJ_{\parallel}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$.

冲量矩: $\int_0^t M_{\text{外}\parallel} dt = I(\omega - \omega_0)$.

力矩的功: $dA_{\text{外}} = M_{\text{外}\parallel} d\varphi = d(E_p + E_k)$,

其中 $E_{p\text{重}} = mgh_C$, $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$.

转动惯量: $I = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \int r_{\perp}^2 dm = \int r_{\perp}^2 \rho dV$.

(1) 平行轴定理: $I_D = I_C + md^2$,

(2) 正交轴定理: $I_z = I_x + I_y$ (适用于平行 xy 面的薄板)。

常用的转动惯量公式见表 4-1.

7. 刚体的平面平行运动: 所有质点的运动平行于某一平面。

动力学 $\left\{ \begin{array}{l} \text{质心运动定理: } \mathbf{F}_{\text{外}} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}; \\ \text{绕质心的转动: } \mathbf{M}_{\text{外}C\parallel} = I_C \frac{d\omega}{dt}. \end{array} \right.$

机械能 $\left\{ \begin{array}{l} \text{势能: } E_{p\text{重}} = mgh_C; \\ \text{动能: } E_k = \frac{1}{2}I_C \omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2. \end{array} \right.$

瞬心: 刚体中瞬时速度 $\mathbf{v} = 0$ 的点。

质心连线时,其力矩 $r_c' \times f_{\text{外}} = 0$, 瞬心系中的角动量定理形式上与惯性系中
的一样。

内平衡

$$\begin{cases} \sum_i f_i = 0, \\ \sum_i M_{\text{外}} = \sum_i r_i \times f_{i\text{外}} = 0. \end{cases}$$

垂直于 z 轴的平面运动, $\sum_i f_{i\text{外}x} = 0, \sum_i f_{i\text{外}y} = 0;$

$$\sum_i M_{i\text{外}z} = \sum_i (x_i f_{i\text{外}y} - y_i f_{i\text{外}x}) = 0.$$

绕定点转动

仪: 具有大转动惯量 I 对称轴, 并绕此轴高速旋转的刚体。

对于陀螺仪, 角动量 J 近似地平行于角速度 ω : $J = I\omega$.

运动

) $M_{\text{外}} = 0$ 时 J 守恒, 转轴方向不变。

) $M_{\text{外}} \neq 0$ 时, 产生进动。实例: 导航, 自行车, 炮弹, 岁差等。

(进动力矩 M 与进动角速度 Ω 的一般关系为 $M = \Omega \times I\omega$.)

律与对称性

能量守恒定律 —— 时间平移不变性;

动量守恒定律 —— 空间平移不变性;

角动量守恒定律 —— 空间各向同性。

思考题

下列系统角动量守恒吗?

1. 锥摆;

2. 端悬挂在光滑水平轴上自由摆动的米尺;

3. 击摆;

4. 特武德机;

5. 秋千;

6. 空中翻筋斗的京剧演员;

7. 水平面上匀速滚动的车轮;

8. 旋转着的砂轮边缘飞出的碎屑;

9. 自转轴旋转的炮弹在空中爆炸的瞬间。

本章例题 10 中两个各绕自转轴旋转的圆柱构成的系统, 它们的边缘接触前角动量守恒吗? 试分析守恒或不守恒的原因。在这里轴上的约束力对角动量吗?

如本题图, 在光滑水平面上立一圆柱, 在其上缠绕一根细线, 线的另一头系一初将一段线拉直, 横向给质点一个冲击力, 使它开始绕柱旋转。在此后的时

间里线愈绕愈短, 质点的角速度怎样变化? 其角动量守恒吗? 动能守恒吗?

4-4. 骑自行车时, 脚蹬子在什么位置上, 人施予它的力矩最大? 在什么位置上力矩最小?

4-5. 经验告诉我们, 推手推车上坡时, 推不动了, 扳车轮的上缘可省力。什么道理?

4-6. 为什么走钢丝的杂技演员手中要拿一根长竹竿来保持身体的平衡?

4-7. 通常我们都知道, 物体愈高且上面愈重, 则愈不稳定。但杂技演员用手指、额头或肩膀顶一个物体时, 物体愈高且上面愈重, 顶起来却愈容易平衡。试解释之。

4-8. 试用角动量以及功和能的概念说明荡秋千的原理。

4-9. 试分析下列运动是平动还是转动:

(1) 自行车脚蹬板的运动;

(2) 月球绕地球运行。

4-10. 若滚动摩擦可以忽略, 试分析自行车在加速、减速、匀速行进时, 前后轮所受地面摩擦力的方向。此时摩擦力做功吗?

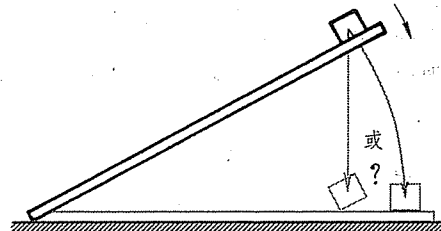
4-11. 汽车发动机的内力矩是不能改变汽车的总角动量的。那么, 在起动的制动时, 其角动量为什么能改变?

4-12. 为什么汽车启动时车头会稍往上抬, 制动时, 车头稍往下沉?

4-13. 试说明自行车刹车时前后轮给地面压力的变化。

4-14. 试分析拖拉机牵引农具时, 前后轮对地面压力的变化。

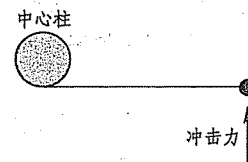
4-15. 通过学习物理学, 我们有了这样的概念, 若忽略空气的阻力, 任何物体自由降落时的加速度都是一样的。如本题图所示, 将一块长条木板一端抵在地面上, 抬起它的另一端, 在其上放一小木块。松开手后, 在降落的过程中木块会离开木板吗? 你可做个实验试一试。



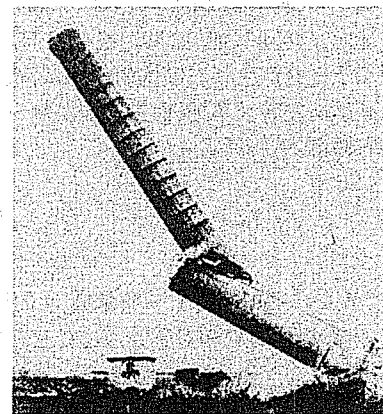
思考题 4-15

4-16. 工厂里很高的烟囱往往是用砖砌成的。有时为了拆除旧烟囱, 可以采用从底部爆破的办法。在烟囱倾倒的过程中, 往往中间偏下的部位发生断裂 (见本题图)。试说明其理由。

4-17. 用手扶着静止的自行车不让倒下, 把它左边的脚蹬放在朝下的位置, 如本



思考题 4-3



思考题 4-16

11.6.1 Conservation of Angular Momentum

Consider Figure 11.13. A man stands on a turntable which may turn, without friction, about a vertical axis. The turntable (and the man along with it) is now given an angular velocity ω_1 about a vertical axis while the man holds two heavy weights stretched away from his body as in (1) on the sketch. While in rotation the man pulls the weights towards his body, as in (2). We consider the man plus the turntable as our system. As mentioned, the turntable rotates without friction, i.e., the vertical axis is well oiled. No external torques act about the vertical axis of the system. Therefore the angular momentum about this axis is conserved.

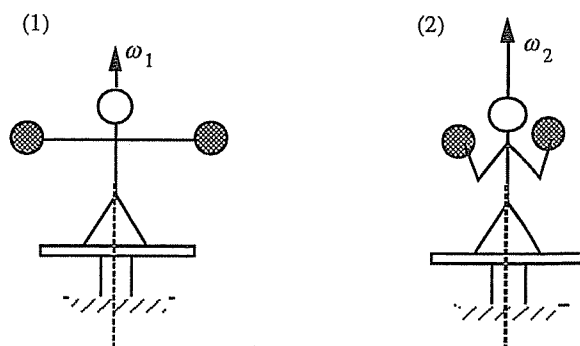


Fig. 11.13. Man on a turntable. Illustration of the conservation of angular momentum

Suppose the moment of inertia about the vertical axis initially is I_1 . When the man rotates with his arms stretched out, the angular momentum is

$$L = L_1 = I_1\omega_1 .$$

When the man pulls the weights towards his body he changes (decreases) the moment of inertia to a new value, I_2 , where $I_2 < I_1$. The angular velocity will increase in such a way that the angular momentum is kept constant:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 ,$$

so $\omega_2 > \omega_1$.

Consider the change in the mechanical kinetic energy. The kinetic energy of a system rotating about an axis is

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega .$$

Consequently

$$T_1 = \frac{1}{2}L\omega_1,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}L\omega_2.$$

The angular momentum L is unchanged, so we have

$$T_2 > T_1 \quad \text{since} \quad \omega_2 > \omega_1.$$

The mechanical kinetic energy of the system has increased. The man has done work against the centrifugal force in the co-rotating frame. Compare with Example 10.1.

Internal forces can produce a change in macroscopic mechanical kinetic energy (compare with the rocket). However, internal forces *cannot* produce a change in the total angular momentum.

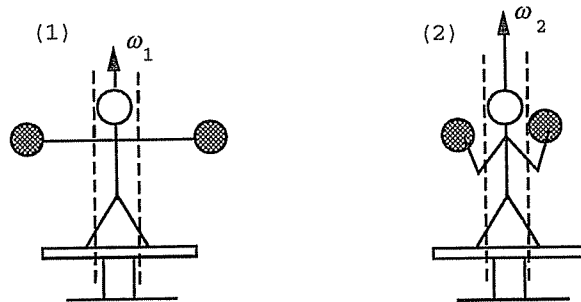


Fig. 11.14.

Let us finally consider the body of the man without the arms as our system (see Figure 11.14). The man's body rotates faster after he has pulled the weights towards his body. The moment of inertia of his body is unchanged, so the angular momentum of the body has increased. This increase is caused by a torque from the fictitious forces in the co-rotating frame. The man is assumed to be fixed to the turntable. The fictitious forces are: the Coriolis force $[-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})]$ and the force due to $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $[-m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})]$.

11.7 Work and Power in the Rotation of a Rigid Body Around a Fixed Axis

A rigid body may rotate around the z -axis. An external force $\mathbf{F}$, is acting at the point A which has position vector $\mathbf{r}$ (see Figure 11.15). Consider now an infinitesimal rotation of the body. In polar coordinates

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

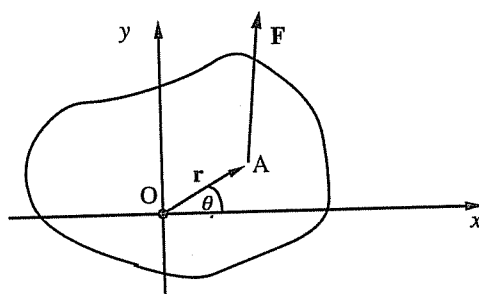


Fig. 11.15. Work in the rotation of a rigid body around a fixed axis (the z -axis, out of the plane of the paper)

We find that

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin(\theta) d\theta = -y d\theta, \\ dy &= r \cos(\theta) d\theta = x d\theta. \end{aligned}$$

The work done by the force $\mathbf{F}$ when the body turns through the angle $d\theta$ is thus

$$dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy = (xF_y - yF_x) d\theta$$

or

$$dW = N_z d\theta,$$

where N_z is the torque about the z -axis. The work equation for a rigid body rotating around a fixed axis is then

$$\frac{dW}{dt} = N_z \frac{d\theta}{dt} = N_z \omega.$$

11.6 Equation of Motion for a Rigid Body Rotating Around a Fixed Axis

We are now in a position to apply the angular momentum theorem to the study of the rotation of a rigid body around a fixed axis which we choose as the z -axis (see Figure 11.12). The equation of motion is (regarding the lab frame as an inertial frame)

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \mathbf{N}_O^{\text{ext}},$$

where the angular momentum $\mathbf{L}_O$ and the torque $\mathbf{N}_O^{\text{ext}}$ are both taken about the point O which is on the axis of rotation. That the axis of rotation is fixed means that it is stationary in the inertial frame we use (the lab frame) and is fixed relative to the rigid body.

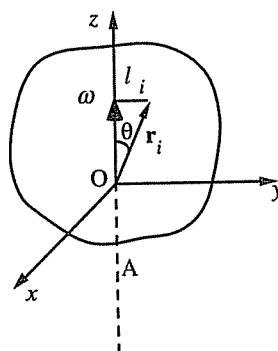


Fig. 11.12.

When considering rotation about a fixed axis, we can re-write the equations of motion in a simpler form.

Since the axis of rotation, A , is stationary in an inertial frame and relative to the body, the inertial properties of the rigid body with respect to A are constant. We shall later see that it is just this fact which makes rotation about a fixed axis a particularly simple problem.

In order to describe the motion we need to consider only the component along the z -axis of the angular momentum vector, and the corresponding component of the torque of the external forces along the z -axis. In many instances those two vectors will have components only along the z -axis. In particular this will be the case for bodies with a high degree of symmetry (e.g. a cylinder or a disk) when the rotational axis coincides with the axis of symmetry.

We now demonstrate that the equation of motion for a rigid body in rotation about a fixed axis is a scalar equation. The vector $\omega/|\omega|$ is a unit vector along the axis of rotation. The component of $\mathbf{L}_O$ along the axis of rotation is:

$$\begin{aligned} L_A &= \mathbf{L} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \frac{1}{\omega} \left[\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \right] \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Using the identity $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, we get:

$$\begin{aligned} L_A &= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i [r_i^2 \omega - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] \right] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i [r_i^2 \omega^2 - r_i^2 \omega^2 \cos^2(\theta)] \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 \sin^2(\theta) \right]. \end{aligned}$$

The distance of the particle m_i from the rotation axis is $l_i = r_i \sin(\theta)$. We find

$$L_A = \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i l_i^2 \right] \omega^2,$$

or

$$L_A = I_A \omega,$$

where I_A is the moment of inertia of the body with respect to the axis of rotation. L_A is called the angular momentum of the body with respect to the rotation axis. The component along the rotation axis of the torque of the external forces, denoted N_A , is given by

$$N_A = \mathbf{N} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$

The *equation of motion* describing the rotation of a rigid body around a fixed axis A is then

$$\frac{dL_A}{dt} = N_A,$$

or, since the moment of inertia about A is constant,

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = N_A.$$

An important special case of the angular momentum theorem for rotation around a fixed axis results when the torque of the external forces vanishes:

When the external torque around a given fixed axis A is zero, the angular momentum about the axis A is a constant of the motion.

Rotation of a Rigid Body

Rigid Body

definition

Translational Motion



center of mass theorem

$$M \frac{d\vec{v}_{c.m.}}{dt} = \sum \vec{F}^{ex}$$

Rotational motion around the center of mass

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{cm}^{ext}$$

The simplest case of rotation of a rigid body

↓ rotates
body around an axis
fixed in inertial space
and
fixed relative to
the body

An arbitrary Rigid Body in Rotation Around a Fixed Axis

$$L_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

↑
relative
to the origin

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega) \quad \text{rotation vector}$$

Rigid Body

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

- i) In a coordinate system where the reference point is fixed or moving with constant velocity $\ddot{\vec{r}}_p = 0$
- (ii) The reference point is the center of mass
- (iii) $\vec{r}_p - \vec{R}$ is $\parallel$ to $\vec{v}_p$

See P. 134 - P. 135

Choose a system that rotate with the system.

↓
In this system

the moments and products of inertia are time-independent

When a rigid body moves with one point stationary the total angular momentum about the point is

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$\vec{r}_i$ radius vector relative to the given point
 $\vec{v}_i$ velocity vector

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}))$$

$$\sum m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$$

x, y, z
coordinates

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i$$

$$\downarrow$$

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\text{fixed}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\text{body fixed}} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{body fixed}} + (\vec{\omega} \times \vec{L})$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

10-23

it can be shown that there is a mutually orthogonal system (1, 2, 3)

Instead of the (x, y, z) coordinates in which

$$I_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j$$

$$L_1 = I_{11} \omega_1 = I_1 \omega_1$$

$$L_2 = I_{22} \omega_2 = I_2 \omega_2$$

$$L_3 = I_{33} \omega_3 = I_3 \omega_3$$

principal
axis
coordinates

principal axes along which $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

there are at least three orthogonal principal axes. They can be found by diagonalization or by symmetry consideration.

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

↓
rotation vector.

describe the rotation

$$\tau_1 = \frac{dL_1}{dt} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{vmatrix}_1$$

$$= I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3)$$

Similarly, we can obtain the other two equations

$$\tau_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_1)$$

$$\tau_3 = I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2)$$

These are the famous Euler equations.

τ_1, τ_2, τ_3 + initial conditions

$$\vec{L} \Rightarrow \vec{\omega}$$

$\vec{\omega}$ and $\vec{N} = \vec{L} \Rightarrow$ vectors of the inertial system projected onto the principal body axes.

The Earth as a Free Symmetric Top

Nearly sphere in shape

Gravitational Torque exerted on earth by the Sun and the Moon are negligible

Nearly axially symmetric

$$I_1 = I_2 = I$$

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I} \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$\dot{\omega}_3 = 0$$

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) = \omega_3 = \text{constant}$$

$$\dot{\omega}_1 + \left(\frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \right) \omega_2 = 0$$

$$\Omega$$

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0$$

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega \dot{\omega}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$= A \cos \Omega t \cos \alpha - A \sin \Omega t \sin \alpha$$

$$= C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t$$

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0$$

$$-A \Omega \sin(\Omega t + \alpha) + \Omega \omega_2 = 0$$

$$\omega_2 = A \sin(\Omega t + \alpha)$$

A, α are to be determined by the initial condition

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \left(\frac{I}{I_3 - I} \right) \frac{2\pi}{\omega_3}$$

$$\approx 300$$

Given a rigid body

↓
find the principal axes 1, 2, 3

and
their
moment of inertia

I_1, I_2, I_3
respectively

↓
mutually perpendicular
fixed to the rigid body

$$\vec{\omega} = \omega_1(t) \hat{1} + \omega_2(t) \hat{2} + \omega_3(t) \hat{3}$$

Euler equation

$$\tau_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$$

$$\tau_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3)$$

$$\tau_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_2 \omega_1 (I_2 - I_1)$$

With $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

↓

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0$$

For the earth $I_1 = I_2 = I$

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I} \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \omega_3(0) = \text{constant}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 + \underbrace{\frac{I_3 - I}{I} \omega_3(0)}_{\Omega} \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \underbrace{\frac{I_3 - I}{I} \omega(0)}_{\Omega} \omega_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega \ddot{\omega}_2 = 0$$

$$\quad \quad \quad + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\omega_1 = a \cos(\Omega t + \alpha)$$

We can use $\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0$ to obtain

$$\omega_2 = a \sin(\Omega t + \alpha)$$

a, α can be obtained by meeting the initial conditions
 $\omega_1(0), \omega_2(0)$

This is the end of the problem

The Earth as a Free Symmetric Top

Since the earth is nearly spherical in shape, the gravitational torques exerted on the earth by the sun and the moon are quite small. To a good approximation the rotational motion can therefore be described by Euler's equations with no external torques. Since the earth is nearly axially symmetric, the principal moments of inertia for the two axes in the equatorial plane are equal.

$$I_1 = I_2 = I \quad (7.116)$$

The third principal axis with moment of inertia I_3 is along the polar symmetry axis. From (7.88) the differential equations for the earth's motion in an earth-based coordinate frame are

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I} \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7.117)$$

Any rigid body which obeys this set of torque-free equations is called a *free axially symmetric top*. The exact solution to this coupled set of equations is easily obtained. The last equation above implies that ω_3 is constant.

$$\omega_3(t) = \omega_3(0) = \omega_3 \quad (7.118)$$

The equations (7.117) can be solved using the method of (7.97)–(7.101). The solution is

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= a \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2(t) &= a \sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (7.119)$$

where

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3$$

The magnitude of the angular-velocity vector ω is

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{a^2 + \omega_3^2} \quad (7.121)$$

Since the components ω_1 and ω_2 in (7.119) trace out a circle of radius a while ω_3 and ω remain constant, an observer on the earth sees the angular-velocity vector precesses uniformly about the symmetry axis with angular velocity Ω , as shown in Fig. 7-16.

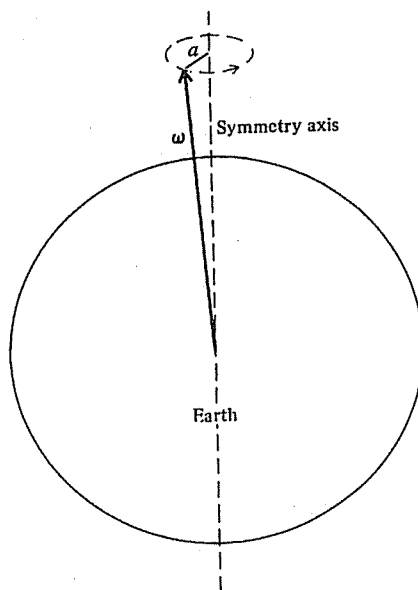


FIGURE 7-16. Precession of the earth's spin about the symmetry axis.

The period of precession of ω about the earth's symmetry axis is

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \left(\frac{I}{I_3 - I} \right) \frac{2\pi}{\omega_3} \quad (7.122)$$

For the earth, since $2\pi/\omega_3 = 1$ day, the period of precession in days is determined by the moment-of-inertia ratio. For an earth of uniform density and oblate spheroidal shape, the value of this ratio, calculated from the measured radii of the earth, is

$$\frac{I}{I_3 - I} \approx 300 \quad (7.123)$$

Although the earth becomes more dense toward its center, the moment-of-inertia ratio is not appreciably changed from the uniform-density result.

Thus the expected precessional period is about 300 days. The precession of ω about the symmetry axis of the earth is known as the *Chandler wobble*.

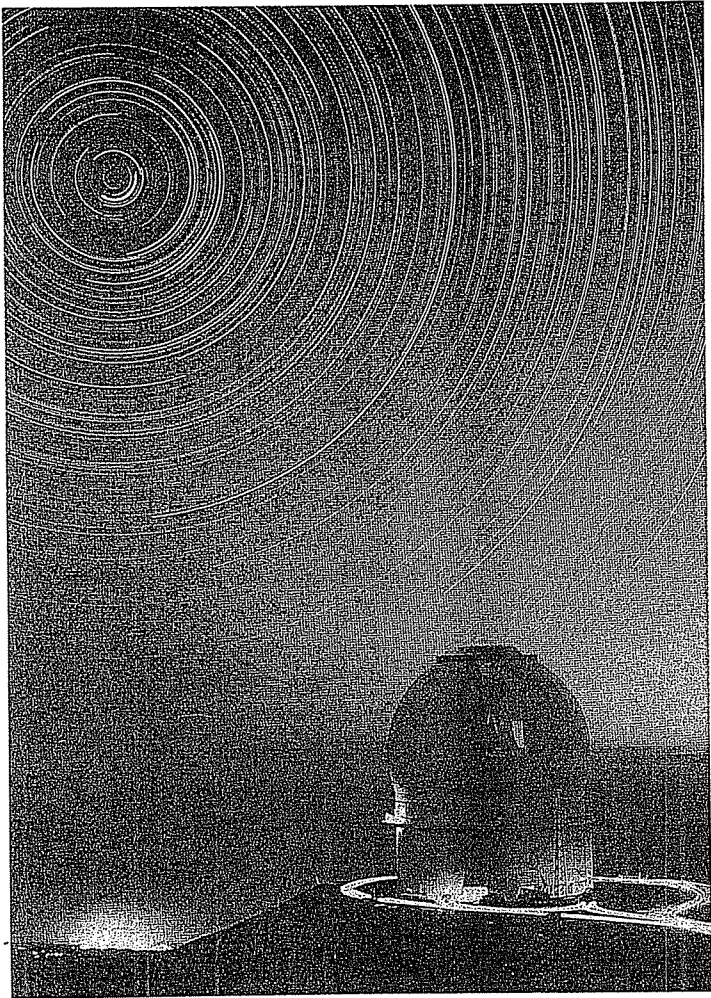


FIGURE 7-17. Star trails in the night sky above the Mauna Kea Observatory in Hawaii, photographed with a nine hour exposure camera. The stars appear as circular arcs due to the earth's rotation. The smallest bright arc is that of Polaris.

The direction of the earth's axis of rotation (*i.e.*, the direction of ω) can be experimentally determined by location of the point in the night sky which appears to remain stationary as the earth rotates, as illustrated in Fig. 7-17. The direction of the earth's rotational axis is observed to

precess about the symmetry axis with a period of about 440 days. The angle between ω and the symmetry axis is quite small. In fact, at the north pole, ω never moves more than about 10 m from the symmetry axis. The actual motion of ω is rather irregular, being strongly affected by earthquakes and seasonal changes. In fact, it is only due to these effects that the motion has a nonvanishing amplitude. On a quiet earth, viscous effects would damp out such a motion, and ω would soon lie along the symmetry axis (this minimizes energy for fixed L). The discrepancy between the expected period of 300 days and the observed value of about 440 days is primarily due to the nonrigidity of the earth.

11.4 An Arbitrary Rigid Body in Rotation Around a Fixed Axis

Consider a rigid body rotating about the z -axis with rotation vector $\omega = (0, 0, \omega)$, assumed to be constant in time and fixed relative to the body. The angular momentum about the origin is

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i . \quad \text{relative to } O$$

We decompose $\mathbf{r}_i$ into two vectors $\mathbf{a}_i$ and $\mathbf{b}_i$ (see Figure 11.5). The vector $\mathbf{a}_i$ is perpendicular to the rotation axis while $\mathbf{b}_i$ is parallel to it (Figure 11.5).

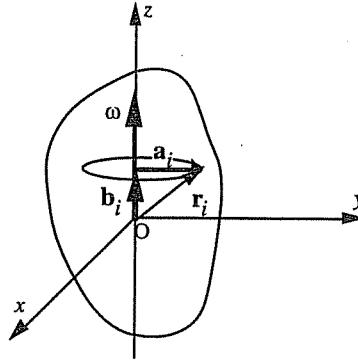


Fig. 11.5. A rigid body in rotation about a fixed axis

Since

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i ,$$

we have that

$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i = \omega \times \mathbf{a}_i ,$$

and

$$\mathbf{L}_O = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{a}_i)] .$$

Since for three vectors $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, and $\mathbf{C}$ in general,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) ,$$

we find that $\mathbf{L}_O$ may be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_i m_i \omega (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_i) - \sum_i m_i \mathbf{a}_i (\mathbf{r}_i \cdot \omega) \\ &= \omega \sum_i m_i [(\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{a}_i] - \sum_i m_i \mathbf{a}_i (\mathbf{b}_i \cdot \omega) \\ &= \omega \sum_i m_i a_i^2 - \sum_i (\omega b_i m_i) \mathbf{a}_i . \end{aligned}$$

component perpendicular to ω . The component parallel to the z -axis is $I_z \omega$, where I_z is the moment of inertia about the z -axis.

Note that the moment of inertia is defined by means of the perpendicular distance of the mass point from the axis of rotation, not the distance from O . As we shall see in due time, the fact that $\mathbf{L}_O$ is not necessarily parallel to ω makes the general problem of rotation complicated. For the translational motion of a body, the momentum is always parallel to $\mathbf{v}$, $\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{CM}$.

The kinetic energy is

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 .$$

We find that

$$|\dot{\mathbf{r}}_i| = |\omega \times \mathbf{r}_i| = \omega a_i ,$$

and consequently

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i a_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

11.4.1 The Parallel Axis Theorem in General Form

Assume next that we know the moment of inertia of a body about an axis A parallel to the z-axis and through CM (see Figure 11.6).

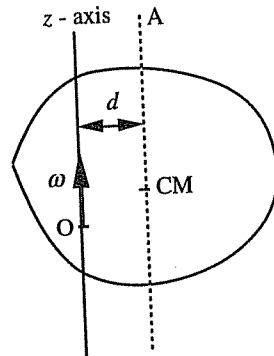


Fig. 11.6. The parallel axis theorem for an arbitrary body

The kinetic energy of the body in its rotation about the axis A is then

$$T_A = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2.$$

Note that ω is the same for rotation about the z-axis as for rotation about A. The motion of the body can be considered either as a pure rotation about

views the rotation vector is ω .

Using König's theorem, we may write the total kinetic energy of the body in rotation about the z-axis as

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2.$$

The velocity of CM is $v_{CM} = \omega d$ (where d is the perpendicular distance from the rotation axis through O to CM). Thus,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} (M d^2 + I_{CM}) \omega^2. \end{aligned}$$

If the motion is described as a pure rotation about the z-axis we have:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

Comparing these results we find:

$$I_z = I_{CM} + M d^2.$$

Using König's theorem we have demonstrated the parallel axis theorem for an arbitrary rigid body in rotation about a fixed axis.

分類：
編號：
總號：

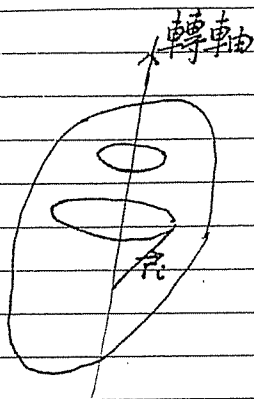
講至計算 Moment of Inertia. 慣性轉距

剛體

平移

$\vec{V}(t)$

轉動



$\vec{\omega}(t)$

平移

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = m \vec{V}$$

轉動

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\vec{L}$

$\vec{\omega}$

↓
 $\vec{L}$ vs $\vec{\omega}$
之關係

i th particle

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Note: $\vec{L}_i$ is not in the same direction of $\vec{\omega}$

分類：

編號：

總號：

$$\frac{\vec{L}_i \cdot \vec{\omega}}{\omega} = \text{projection of } \vec{L}_i \text{ along } \vec{\omega}$$

$$= m_i (r_i^2 - r_i^2 \cos^2 \theta) \omega$$

$$= m_i \underbrace{r_i^2}_{R^2} \sin^2 \theta \omega$$

R^2
↓
distance between i th particle
and the rotating axis

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

$$L_z = (\sum m_i R_i^2) \omega = I \omega \quad \text{choose } \vec{\omega} \text{ to be along } z \text{ axis}$$

moment of inertia
relative to z axis

$$I = \int R^2 dm$$

ρdV
↓
density volume element

$\rho' dx$
↓
density
line element

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

$$L_z = m r^2 \omega$$

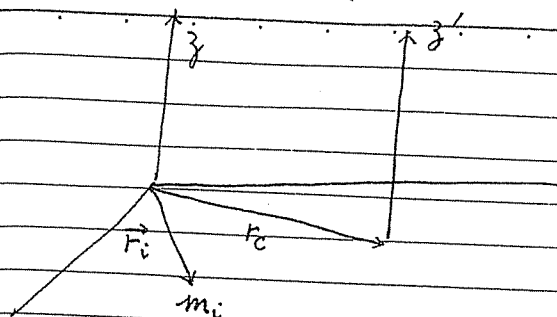
$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad \text{valid if } \vec{\omega} \text{ is along principle axis}$$

$$(i) \quad \vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \vec{r}_i \perp \vec{\omega} \rightarrow \text{平面}$$

$$(ii) \quad \text{Symmetry}$$

分類：
編號：
總號：

$$I = I_c + Md^2$$



$$\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$x_i = x_i^* + x_c$$

$$y_i = y_i^* + y_c$$

$$I = \sum m_i [(x_i^* + x_c)^2 + (y_i^* + y_c)^2]$$

$$= \sum m_i (x_i^{*2} + y_i^{*2}) + 2x_c \sum m_i x_i^* + 2y_c \sum m_i y_i^* + (x_c^2 + y_c^2) \sum m_i$$

$\downarrow$
 I_c

$\downarrow$
 0

$\downarrow$
 0

$\downarrow$
 Md^2

Example

Equation of Motion

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o^{\text{ext}}$$

L_z

$$\begin{aligned} L_A &= \vec{L} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\omega|} = \frac{1}{\omega} \left[\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right] \cdot \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right) \cdot \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\cancel{m_i r_i^2 \omega^2} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\sum m_i [r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \right] \cdot \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i m_i l_i^2 \right] \omega^2 \end{aligned}$$

$$L_z = I_z \omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z^{\text{ext}}$$

" $\vec{\tau} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

↓

This is the equation of motion

Note this is a scalar equation.

Conservation of Angular momentum

The combined effects of the translation of the cm and rotation about an axis through the cm are equivalent to a pure rotation with the same angular speed about an axis through the point of contact of the rolling body.

Kinetic Energy

Total KE is given by:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_c + MR^2 \quad [\text{Parallel Axis Thm}]$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 \quad [\text{consistent}]$$

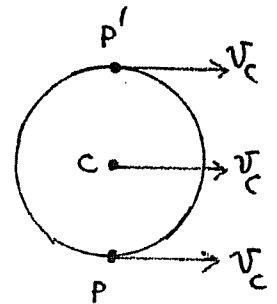
Total KE for an object undergoing pure rolling motion is the sum of the rotational KE about the cm plus the translational KE of the cm.

A general point Q on the cylinder has both horizontal and vertical components of velocity.
Points P and P' are of special interest.

$$\left. \begin{array}{l} P: v_P = 0 \\ C: v_C = R\omega \\ P': v_{P'} = 2R\omega \end{array} \right\} \text{all points on cylinder have common } \omega$$

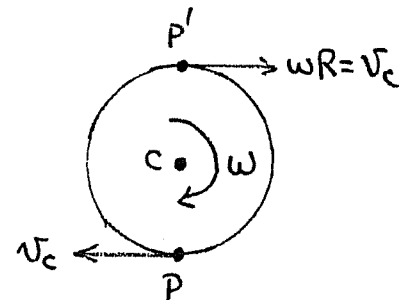
Translation

- All points have the same speed $v = v_C$.



Rotation

- $\omega R = v_C$
- All points have the same ang. velocity.
- Speed prop. to distance from axis.

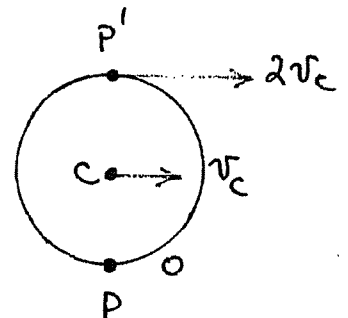


Translation + Rotation

$$v_P = v_C - \omega R = 0$$

$$v_C = v_C + 0 = v_C$$

$$v_{P'} = v_C + \omega R = 2v_C$$



20-2 The rotation equations using cross products

Now let us ask whether any equations in physics can be written using the cross product. The answer, of course, is that a great many equations can be so written. For instance, we see immediately that the torque is equal to the position

vector cross the force:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (20.11)$$

This is a vector summary of the three equations $\tau_x = yF_z - zF_y$, etc. By the same token, the angular momentum vector, if there is only one particle present, is the distance from the origin multiplied by the vector momentum:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (20.12)$$

For three-dimensional space rotation, the dynamical law analogous to the law $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ of Newton, is that the torque vector is the rate of change with time of the angular momentum vector:

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt. \quad (20.13)$$

If we sum (20.13) over many particles, the external torque on a system is the rate of change of the total angular momentum:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = d\mathbf{L}_{\text{tot}}/dt. \quad (20.14)$$

Another theorem: If the total external torque is zero, then the total vector angular momentum of the system is a constant. This is called the law of *conservation of angular momentum*. If there is no torque on a given system, its angular momentum cannot change.

What about angular velocity? Is it a vector? We have already discussed turning a solid object about a fixed axis, but for a moment suppose that we are turning it simultaneously about *two* axes. It might be turning about an axis inside a box, while the box is turning about some other axis. The net result of such combined motions is that the object simply turns about some new axis! The wonderful thing about this new axis is that it can be figured out this way. If the rate of turning in the xy -plane is written as a vector in the z -direction whose length is equal to the rate of rotation in the plane, and if another vector is drawn in the y -direction, say, which is the rate of rotation in the zx -plane, then if we add these together as a vector, the magnitude of the result tells us how fast the object is turning, and the direction tells us in what plane, by the rule of the parallelogram. That is to say, simply, angular velocity *is* a vector, where we draw the magnitudes of the rotations in the three planes as projections at right angles to those planes.*

As a simple application of the use of the angular velocity vector, we may evaluate the power being expended by the torque acting on a rigid body. The power, of course, is the rate of change of work with time; in three dimensions, the power turns out to be $P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

All the formulas that we wrote for plane rotation can be generalized to three dimensions. For example, if a rigid body is turning about a certain axis with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$, we might ask, "What is the velocity of a point at a certain radial position $\mathbf{r}$?" We shall leave it as a problem for the student to show that the velocity of a particle in a rigid body is given by $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, where $\boldsymbol{\omega}$ is the angular velocity and $\mathbf{r}$ is the position. Also, as another example of cross products, we had a formula for Coriolis force, which can also be written using cross products: $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$. That is, if a particle is moving with velocity $\mathbf{v}$ in a coordinate system which is, in fact, rotating with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$, and we want to think in terms of the rotating coordinate system, then we have to add the pseudoforce $\mathbf{F}_c$.

10-6 REVIEW OF ROTATIONAL DYNAMICS

In physics we can often learn about a new subject by comparison or analogy with a subject we have already understood. For example, later in the text we will find that magnetic phenomena have much in common with electric phenomena, and so we can learn about magnetism by extension of our previous knowledge of electricity.

In the past three chapters we have introduced many new rotational quantities and pointed out their similarities with the corresponding translational quantities. It is useful to keep in mind these similarities, but it is also important to recall the differences between translational and rotational quantities and the special cases or limitations of applicability of the rotational equations. For example, some rotational equations apply only to rotation about an axis that is fixed in space.

Table 10-1 shows a comparison between translational and rotational quantities in dynamics.

TABLE 10-1 Review and Comparison of Translational and Rotational Dynamics*

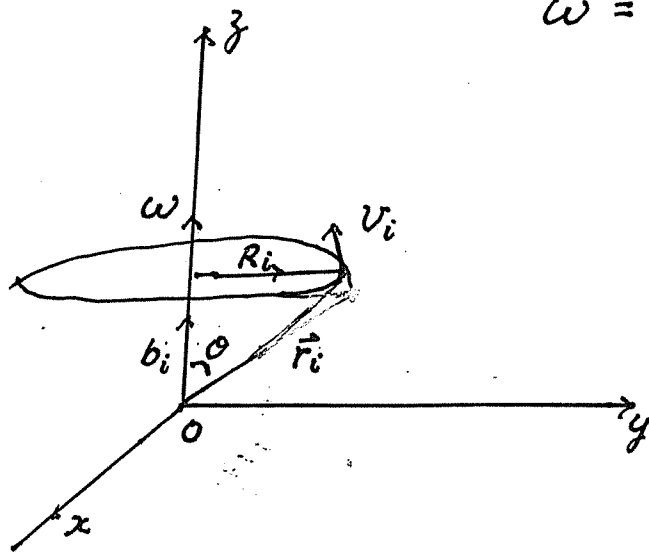
Translational Quantity		Equation Number	Rotational Quantity		Equation Number
Velocity	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	2-9	Angular velocity	$\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$	8-3
Acceleration	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	2-16	Angular acceleration	$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$	8-5
Mass	m		Rotational inertia	$I = \sum mr^2$	9-10
Force	$\vec{F}$		Torque	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	9-3
Newton's second law	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$	4-3	Newton's second law for rotations about a fixed axis	$\sum \tau_{\text{ext},z} = I\alpha_z$	9-11
Equilibrium condition	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$	9-22	Equilibrium condition	$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$	9-23
Momentum of a particle	$\vec{p} = m\vec{v}$	6-1	Angular momentum of a particle	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	10-1
Momentum of a system of particles	$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{cm}}$	7-21	Angular momentum of a system of particles	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	10-12
General form of Newton's second law	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = d\vec{P}/dt$	7-23	General form of Newton's second law of rotations	$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = d\vec{L}/dt$	10-9
Conservation of momentum in a system of particles for which $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$	$\vec{P} = \sum \vec{p}_n$ = constant	6-12	Conservation of angular momentum in a system of particles for which $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$	$\vec{L} = \sum \vec{L}_n$ = constant	10-15

* Some of these equations apply only under certain special conditions. Be sure you understand the conditions before using these equations. Equations that

An Arbitrary Rigid Body in Rotation Around a Fixed Axis

$$\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$



$$\vec{r}_i = \vec{b}_i + \vec{R}_i$$

$\vec{v}_i$ is $\perp$ to $\vec{R}_i$ (circular motion)

v_i is $\perp$ to $\vec{b}_i$ (it moves in the plane $\perp$ to the $z = \text{constant}$)

$$|\vec{v}_i| = R_i \omega$$

$$= |\vec{r}_i| \sin \theta \omega$$

$$= |\vec{r}_i \times \vec{\omega}|$$

$\vec{v}_i$ is in the direction of $\vec{\omega} \times \vec{r}_i$
($\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_i \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{b}_i + \vec{R}_i) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{R}_i \end{aligned}$$

$$\vec{L}_o = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \sum_i m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_i)]$$

Using the vector identity

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{L}_o = \sum m_i \omega (\vec{r}_i \cdot \vec{R}_i) - \sum m_i \vec{R}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

$$= \vec{\omega} \sum m_i [(\vec{R}_i + \vec{b}_i) \cdot \vec{R}_i] - \sum m_i \vec{R}_i (\vec{b}_i \cdot \vec{\omega})$$

$$= \vec{\omega} \left(\sum m_i R_i^2 \right) - \sum (\omega b_i m_i) \vec{R}_i$$

$\vec{L}_0$ has a component $\parallel$ to $\vec{\omega} \Rightarrow I_3 \vec{\omega}$
 and
 component $\perp$ to $\vec{\omega}$
 $\downarrow$
moment
of
inertia about
the z -axis

Note: moment of inertia is defined by means of the distance of the mass point from the axis of rotation, not the distance from the origin O .

The fact that $\vec{L}_0$ is not necessary parallel to $\vec{\omega}$ makes the general problem of rotation complicated. For the translational motion of a body, the momentum is always $\parallel$ to $\vec{v}$, i.e., $\vec{p} = M \vec{v}_{c.m.}$

Kinetic energy

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 m_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_3 \omega^2
 \end{aligned}$$

Obviously I_3 is a very useful object

$\downarrow$
Calculation of the Moment
of Inertia for Simple Bodies

6.4 Rotations of Rigid Bodies

A *rotation* can be defined as the motion of a point p about a line such that the distance from p to each point on the line is constant. In an infinitesimal rotation, the rotational displacement $d\mathbf{r}$ must thus be perpendicular to a vector $\mathbf{r}$ from a point O on the line to the point p . Furthermore, $d\mathbf{r}$ must be perpendicular to a unit vector $\hat{\mathbf{n}}$ directed along the line, as illustrated in Fig. 6-3. These two conditions can be mathematically expressed as

$$d\mathbf{r} \equiv \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} d\phi \quad (6.61)$$

Since $|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}| = r \sin \theta = \rho$ is the perpendicular radius of rotation about the line, and $|d\mathbf{r}| = \rho d\phi$, the quantity $d\phi$ is the infinitesimal angle of

rotation about the axis $\hat{n}$. The velocity of the point p relative to the point O due to rotation is

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{n} \times \mathbf{r} \dot{\phi} \quad (6.62)$$

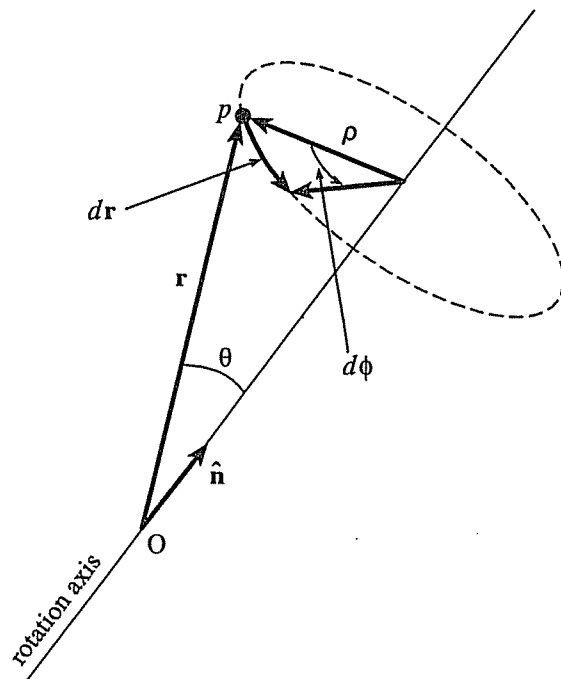


FIGURE 6-3. Infinitesimal rotation about an axis $\hat{n}$.

If we introduce an angular velocity vector

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{n}\dot{\phi} \equiv \hat{n}(t)\dot{\phi} \quad (6.63)$$

for the rotation about $\hat{n}$, the rotational velocity of p can be expressed as

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6.64)$$

If the point O is moving with a translational velocity $\mathbf{v}_0$ relative to a fixed reference frame, the velocity of the point p in the fixed frame is

the vector sum of the translational velocity $\mathbf{v}_0$ of the point O and the rotational velocity about O .

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6.65)$$