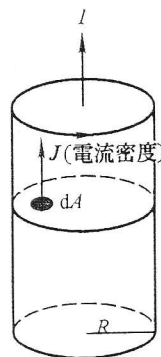
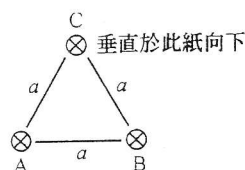


- (4) 比較 Ampere 力和 Lorentz 力，且畫圖說明你的看法。
- (5) 比較經典磁偶矩 $\mu = IA$ 和電子軌道磁偶矩 $\mu_L = g_L \frac{e}{2m} L$ (半經典公式) 以及自旋磁偶矩 $\mu_S = g_S \frac{e}{2m} S$ (半經典模型式)；然後 ① 配合 (3) 和 (4) 題，說明你對「電」和「磁」的看法；以及 ② 你對內稟角動量 S 的看法。
- (6) Lorentz 力的磁力 $F_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ ，① $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ 的夾角是否任意？哪個向量必互相垂直呢？② 那麼 Ampere 力 $d\mathbf{F}_B = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ 的情形又如何呢？
- (7) ① 磁力 F_B 不做功，那它有什麼作用？② 如帶電體 q 的速度 $\mathbf{v}$ 在空間某領域突然改變方向，暗示這空間存在著什麼？
- (8) 試證【Ex.7-44】的動能守恆。
- (9) 討論式 (7-46) $\boldsymbol{\tau}_B = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}_{\text{ext}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ ，以及 $\boldsymbol{\tau}_B$ 的大小和方向，什麼時候最大或最小。
- (10) 應用【Ex.7-38】定性地討論構成邊長 a 的等邊三角形如右圖，三根具有同向同大小的穩定電流 I ，橫切面積無限小無限長的中性導線 A 、 B 、 C 分別通過該三角形的三個頂點，指出各導線所受力的方向，最後三根導線相互靠近還是相互遠離？
- (11) 試畫【Ex.7-38】的磁力線圖。
- (12) 如右圖，半徑 R 的均勻導線，流著穩定電流 $I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ ，求 ① $r < R$ ，② $r > R$ 的磁場 $\mathbf{B}$ ， $A =$ 橫切面積 πR^2 。
- (13) 仿照【Ex.7-45】~【Ex.7-47】使 $F_E = 0$ 但 $F_B \neq 0$ 的 $q_a \mathbf{v}_a$ 和 $q_b \mathbf{v}_b$ 的可能組合， q_a 和 q_b 是正電荷。



VI. 物質的電磁性

(A) 物質

電流會使人致死。但磁就沒這種危險性，這是因為磁沒磁單極而帶來磁流。磁的正負極必成對出現，形成磁偶極，它對外磁場呈現磁偶矩 $\boldsymbol{\mu}$ 抗拒性。日常用品的磁鐵、指南針全是磁偶，所以物質的電性來自電荷，磁性來自 $\boldsymbol{\mu}$ 。爲了了解這一點，必須了解物質的基本單元原子。各原子有自己的帶正電原子核和帶負電的電子，正負電相等時保持電中性。電子和核的相互作用使電子不得不繞著核團團轉

【Ex.7-1】，使電子無法離去。若要擺脫核的引力僅靠外力。核比電子重得多，例如最單純的氫原子，核只有一個質子；質子質量約為電子質量的 1836 倍，加上構成物質時核和核間的相互作用，使得核沒自由，最多在自己的位置做極微小的振動。核內核子間的相互作用能約為核和電子間的相互作用能的 10^6 倍。顯然電子容易游離，只要外加能量能夠破壞核和電子間的相互作用就能游離電子。發電機就是轉換機械能、熱能等等，在外磁場的協助下游離電子，且電子帶著動能出來活動成為電能。最容易游離電子的物質是金屬，所以電流的主人是電子，是電子真的在那裡移動，稱為真電流 (true current)；而真正有核群 (正電荷) 在或電子群 (負電荷) 在，這種電荷稱為真電荷 (true charge) 或自由電荷 (free charge)。

電子易受外界影響，使它游離便產生電；不被游離時它一面繞著核運動而有軌道磁偶矩 μ_L ，同時它本身的內稟角動量，俗稱自旋 (spin) S 持有自旋磁偶矩 μ_S 。在外磁場 B_{ext} 的作用下，本來無固定方向的 μ_L, S 和 B_{ext} 相互作用後，由式 (7-47) 產生力矩 $\tau_B = \mu_{L,S} \times B_{\text{ext}}$ ，結果 $\mu_{L,S}$ 一面保持本性一面要抗外力 B_{ext} ，最好在 B_{ext} 的作用下做旋進 (precession) 運動。電子帶負電，由式 (7-54) 可知，帶電體的運動會產生磁場 B ，於是在 B 和 B_{ext} 較勁下有兩種旋進方式。

(I) $B < B_{\text{ext}}$ ：

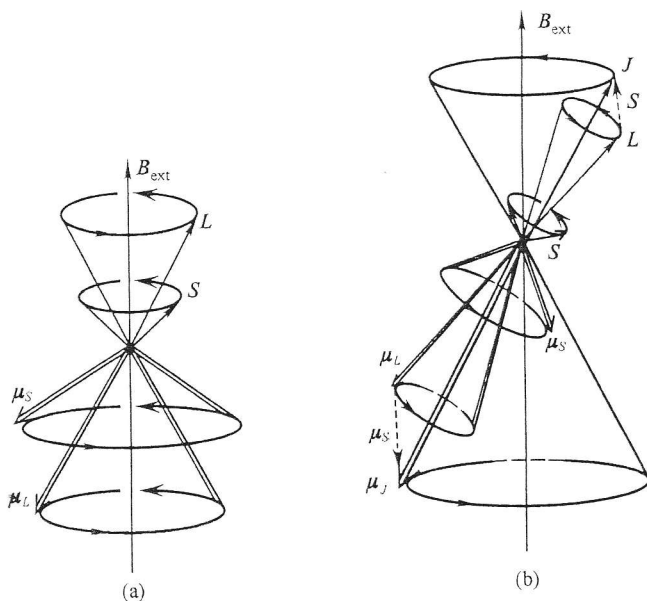
表示外磁場強於內部磁場， B_{ext} 有足夠力量打擊你的內部團結，於是 μ_L 和 μ_S 各自和 B_{ext} 交戰，如下頁圖 (a) μ_L 和 μ_S 各自繞 B_{ext} 旋進。由式 (7-48b, c) L, S 的方向和 μ_L, μ_S 的方向剛好相反，這是因為電子帶負電帶來式 (7-48b, c) 右邊有負號。如果帶電體帶的是正電，則角動量和磁偶矩旋進方向一致。

(II) $B > B_{\text{ext}}$ ：

內部磁場 B 勝過外磁場 B_{ext} ，於是內部有充分力量團結一致來對付 B_{ext} ；合角動量 $J \equiv L + S$ 和合磁偶矩 $\mu = \mu_L + \mu_S$ 是最後抗 B_{ext} 做旋進運動如下圖 (b)，細節和定量情形請參閱後面參考文獻 (24)。

所以外磁場 B_{ext} 的強弱對物質的磁性有很大的影響，有的物質 B_{ext} 撤消後又恢復原狀，不呈現磁性，這種物質稱為非磁性物質；有的物質在 B_{ext} 撤消之後， $\mu_{L,S}$ 的旋進方向不會復原，尤其 μ_S 不易復原，物質呈現磁性，這種物質稱為磁性物質。最明顯的是鐵 (Fe)、鎳 (Ni) 和鈷 (Co)，其他如週期表中間元素在不同溫度、壓力或不同元素的組合下多少也有這種性質。同樣，有的物質很難游離電子，在外電場 E_{ext} 的情況下充其量電子的運動受些影響，而偏離本來維持電中性的運動空間，帶來原子像一個電偶極 (electric dipole)，物質呈現極化現象 (右圖)，這種物質稱為電介物質，宏觀表現和磁性物





質截然不同。有的物質在 E_{ext} 的作用下，電子被游離出去，這種物質稱為導體；現把這些物質的電磁性在下面分別做進一步的探討。

(B) 物質呈現的電學現象

這部分曾在靜電學（一）（G）的電容處討論過，並且把主要物理量整理在表 7-3。為了配合磁學和加深印象以及深入了解重新加以整理。問題的核心是物質和外電場 E_{ext} 以及外磁場 B_{ext} 的相互作用，於是庫侖定律派不上用途，它的另一種表示法 Gauss 定律才能發揮威力。

(1) 電極化向量 P (electric polarization vector)

如圖 7-36(a) 真空時電容器所帶之電是使用直流電源充的電荷，是真電荷 q_f ；如圖 7-36(b) 中間插入電介質後，它必受 q_f 產生的電場 E_0 的影響，相當於外電場的

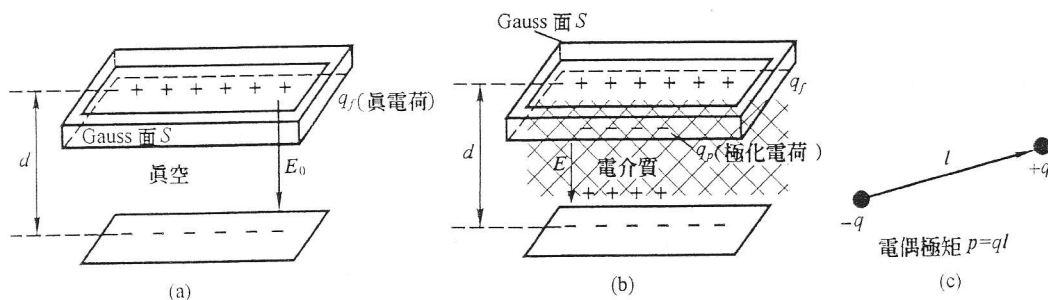


圖 7-36

影響，電介質會極化（polarization，電中性變成正負電偏離）。假定是平行板電容器，其橫切面積 A ，Gauss 封閉曲面 S 剛好包住整個電容器板，則電介質極化後的 Gauss 定律是：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (S \text{ 內電荷}) = \frac{1}{\epsilon_0} (q_f - q_p)$$

q_p = 極化總電荷，其面積密度 $\sigma_p = \frac{q_p}{A}$

$$\therefore \sigma_p = \frac{q_p \times d}{A \times d} = \frac{\text{電偶矩 } p \text{ 的總和}}{\text{電介質的體積 } V}$$

定義單位體積內的電偶矩為電極化向量，或電極化強度 $\mathbf{P}$ ：

$$\mathbf{P} = \frac{\text{電偶矩 } p \text{ 的總和}}{\text{電介質體積 } V} \quad (7-58a)$$

電偶矩 p 如圖 7-36(c)，則電極化電荷是：

$$q_p = \int_A \sigma_p dA = \int_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}$$

經 Gauss 曲面 S 的電力線只有正負電荷面對的那一面有電場，其他面都為零，電場不等於零的面積剛好是 A ， $d\mathbf{A}$ 是 A 的微小面積向量，它從正電指向負電的方向。

$$\therefore \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_f - \frac{1}{\epsilon_0} \int_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\therefore \int_A (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} \equiv \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad (7-58b)$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (7-58c)$$

$\mathbf{D}$ 稱為電位移向量（electric displacement vector），或稱電通量密度（electric flux density），或電感應向量（electric induction vector，參見式（7-39））； ϵ = 電介質電容率。式（7-58b）是有電介質時的 Gauss 定律，它僅和真電荷 q_f 有關，引入 $\mathbf{D}$ 的目的僅在此， $\mathbf{D}$ 沒什麼新物理意義，用 $\mathbf{D}$ 表示較簡潔而已。 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{P}$ 同因次是 $[\mathbf{D}] = [\mathbf{P}] = \text{庫倫 C}/(\text{米 m})^2$ ，如照圖 7-36(c) 定義電偶矩，剛好 $\epsilon_0 \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 同向，這是可能性之一。式（7-58c）是最簡單的關係式，各物理量前面的係數都是常量 ϵ_0 、 ϵ 或 1，這種關係稱為線性關係，而這種電介質稱為各向同性電介質（isotropic dielectric）。但有的電介質不是線性關係，即各向不同性電介質（un-isotropic dielectric），幸好，大部分電介質在通常情況下是線性關係；無論電或磁，我們僅探討線性關係的物質。

(2) 介電常數 κ_e ，電極化率 χ_e

在電路上電容器是很重要的零件，電容器中間有無電介質對電容量有較大的影響；有電介質的電容 C_d 和沒電介質的電容 C_0 的比值剛好等於電容率 ϵ 和 ϵ_0 之比值：

$$\frac{C_d}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \equiv \kappa_e \quad (7-59a)$$

κ_e 稱為介電常數 (dielectric constant)，或稱相對電容率，是無因次量的數值。因為電容和電容器的幾何形狀有關，是正實量 (positive real quantity)，或寫成：

$$C_0 > 0, C_d \geq 0$$

$$\therefore \kappa_e \geq 0$$

κ_e 的大小和電極化向量 $\mathbf{P}$ 的方向有關， $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$ 同向時 $\epsilon > \epsilon_0$ 於是 $\kappa_e > 1$ ；反向則 $\epsilon < \epsilon_0$ ，結果是 $\kappa_e < 1$ 。那麼，有沒有 $\kappa_e = 0$ 的可能呢？理論上應該存在。 $\kappa_e < 1$ 到 $\kappa_e > 1$ ，故中間必經 $\kappa_e = 1$ ，這時 $\epsilon = \epsilon_0$ 相當於沒極化現象發生； κ_e 偏離 1 的值表示有極化，所以定義一個判斷極化情形的量 χ_e 稱為電極化率 (electric susceptibility 或 dielectric susceptibility)，或稱極化常數 (polarization constant)， χ_e 必定如下式：

$$\kappa_e = 1 + \chi_e \quad (7-59b)$$

χ_e 和 κ_e 一樣都是無因次量的數值。從上面的討論 χ_e 和 κ_e 必有下列關係：

$$\left. \begin{array}{ll} \kappa_e = 0: & \chi_e = -1, \text{ 表示 } \chi_e \text{ 有個下限 (尚未找到這種物質)} \\ \kappa_e < 1: & -1 < \chi_e < 0 \cdots \cdots \text{ (尚未找到這種物質)} \\ \kappa_e > 1: & 0 < \chi_e, \text{ 表示 } \chi_e \text{ 沒上限, 但至少是有限值, 那最大值是多少呢?} \end{array} \right\} \quad (7-59c)$$

有的書籍是從電極化向量 $\mathbf{P}$ 和電場 $\mathbf{E}$ 來定義電極化率：

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (7-59d)$$

它和這裡的定義沒有衝突，因將式 (7-59a, b) 代入式 (7-58c) 便得式 (7-59d)。在這裡最引起我們注意的是 $\chi_e = -1$ ，真好奇，它是什麼樣的電介質？ $\chi_e = -1$ 結果是 $\epsilon = 0$ ，於是 $\mathbf{D} = 0$ ，或者說 $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = 0$ ，換句話說電極化向量 $\mathbf{P}$ 剛好抵消掉電場 $\epsilon_0 \mathbf{E}$ ，所以電介質內根本沒電場，電介質變成導體！電介質內沒電場對應於超導體內部根本沒磁場的現象。尋找 $\chi_e = -1$ 的電介質現象該是個科研課題。在 1987 年 5 月 12 日的國際會議仿磁化率 χ_m (magnetic susceptibility) 定義磁性

物質，以 χ_e 值將電介質分類成：

$$\chi_e \begin{cases} < 0 & \text{但很小，稱為抗電物質 (dia-electric substance)} \\ > 0 & \text{但很小，稱為順電物質 (para-electric substance)} \\ > 0 & \text{但很大，稱為鐵電物質 (ferro-electric substance)} \\ = -1 & \text{未解其意} \end{cases}$$

(7-59e)

$\chi_e < 0$ 到 $\chi_e > 0$ 中間必經 $\chi_e = 0$ ，即 $\kappa_e = 1$ 表示 $\epsilon = \epsilon_0$ 沒電介質。把以上出現的物理量，用一個直觀方式整理如下：

$$E_0(\text{真空}) \xrightarrow{\text{電介質}} E + E_{\text{介}} \equiv E_{\text{總}}$$

定義 $E_{\text{介}} \equiv \chi_e E \cdots \cdots$ 極化和 E 成正比的各向同性電介質

$$\begin{aligned} \therefore E_{\text{總}} &= (1 + \chi_e) E \\ &= \kappa_e E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或者是 } \epsilon_0 E_0(\text{真空}) &\xrightarrow{\text{電介質}} \epsilon_0 (1 + \chi_e) E \cdots \cdots \epsilon_0 = \text{常數的各向同性電介質} \\ &\equiv \epsilon E \\ &\equiv D \cdots \cdots \text{顯然 } D \text{ 沒有特別物理意義，是個方便的量} \\ &= \epsilon_0 E + P \\ P &\equiv \epsilon_0 \chi_e E \end{aligned}$$

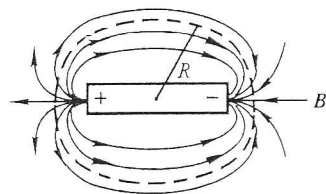
(C) 磁性物質（磁介質）呈現的磁學現象

(1) 磁荷

相對於電荷而言，磁荷稍微煩瑣一些，至少到目前為止自然界並不存在磁荷，即沒磁單極；磁極必成對出現，於是磁力線從正極（ N 極）出來進入負極（ S 極），磁鐵內是負到正，形成無頭無尾的封閉曲線。描述力線和力源關係的 Gauss 定律式（7-8）在磁學時為：

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \mu_0 \sum_i Q_{mi} \quad (S \text{ 內的磁荷}) \\ &= \mu_0 (+Q_m - Q_m) \\ \therefore \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (7-60a)$$

或直接求 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 也得零，因如右圖所示，設封閉的

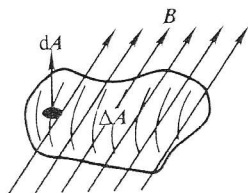


Gauss 曲面 S (封閉曲面)
 $d\mathbf{S}$ 是 S 上的微小面積向量

Gauss 曲面為半徑 R 之球面，則左半球的 B 是從 S 出來，而右半球的 B 是完全和左半球對稱卻進入 S ，因此一負一正相互抵消。至於穿過某面積 ΔA 的磁力線量稱為磁通量 $\Delta \phi_B$ ，其值是：

$$\Delta \phi_B \equiv \int_{\Delta A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (7-60b)$$

$d\mathbf{A}$ 是 ΔA 上的微小面積向量（右圖）， ϕ_B 的因次 $[\phi_B] = \text{T (tesla)} \times (\text{m (米)})^2 \equiv \text{Wb (weber)}$ 。



(2) 磁性物質的磁化，磁化向量 (magnetization vector) M

要探討外磁場的影響，最好使用能把磁場關住的裝置，如圖 7-37(a)，其平均半徑 r 的均質環形管 (toroid) 便是例子。把漆包線緊密地繞成環形管，其橫切面積為 A ， $n =$ 單位長圈數。通電流 I 後依右手定則，電流產生的磁力線如圖示，全部被鎖在環形管內。假定管內沒磁性物質時的磁場為 B_0 ，則 Ampere 定律式 (7-42b) 是：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i (\Gamma \text{ 內電流})$$

$$= 2\pi r n \mu_0 I \quad (7-61a)$$

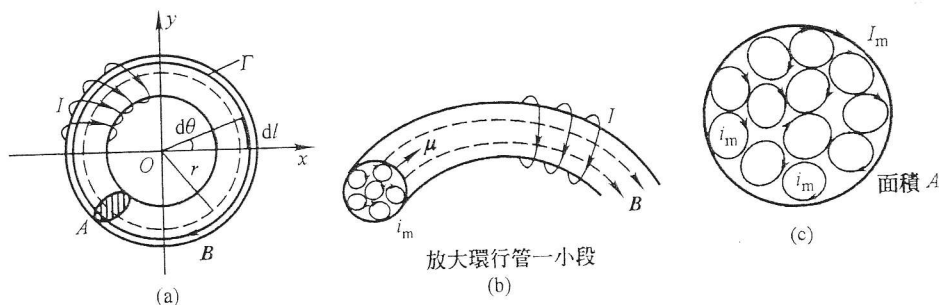


圖 7-37

$\Gamma =$ 封閉曲線， $\mu_0 =$ 真空磁導率 (permeability of vacuum)，如 Γ 為半徑 r 的圓，則 B_0 處處沿著圓的切線方向，圓周上的微小線段 $d\mathbf{l} = r d\theta$ ，而 $d\mathbf{l}$ 指向切線方向，

故 B_0 和 $d\mathbf{l}$ 的夾角 $= 0^\circ$ ，於是 $\oint_{\Gamma} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_0 r d\theta \cos 0^\circ$

$$\therefore \oint_{\Gamma} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_0 = \mu_0 2\pi n I$$

$$\therefore B_0 = \mu_0 n I \quad \text{或} \quad B_0 = \mu_0 n I e_\theta$$

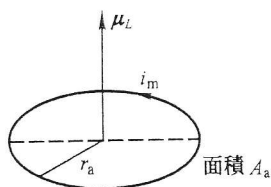
$e_\theta =$ 切線方向的單位向量。顯然只要 n 和 I 固定， B_0 的大小也固定，於是 B_0 是均

勻磁場。如環形管內有均勻的磁性物質，則磁性物質的各原子的電子磁偶矩 μ 立刻受到 B_0 的作用，各 μ 繞著 B_0 做旋進運動。為便於直觀地說明，假定受到 B_0 作用後 μ 都向 B_0 排齊，如圖 7-37(b)，環形管橫切面上好像有好多圓形小電流 i_m ，根據式 (7-47) 各 i_m 造自己的 μ 。相鄰的 i_m 的方向剛好構成反向，效果相互抵消，最後只剩橫切面周圍的電流和，如放大圖 7-37(c) 得 $\sum_j i_{mj} = I_m$ ，結果有磁性物質時的 Ampere 定律式 (7-61a) 變成：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{\Gamma \text{ 內電流}} (I + I_m) = 2\pi r n \mu_0 (I + I_m) \quad (7-61b)$$

I_m 稱為磁化電流，當 $\mu \parallel B$ 時 I 和 I_m 是同向，如果 μ 和 B 剛好反向，或介於同向和反向之間，則 I 和 I_m 變成互為反向或介於同向和反向之間。請特別小心，由於磁偶矩 μ 和磁導率 μ 都使用相同希臘字，故對磁偶矩最好用向量 μ ，以免混淆。

顯然，磁性物質在外磁場 B 的情況下，本來方向隨機的原子電子的磁偶矩 μ (例如電子自旋和軌道磁偶矩 μ_S, μ_L) 和 B 的相互作用下 μ 的方向被鎖定，這現象稱為磁性物質磁化，並產生磁化電流 I_m 。為了具體的印象，使用經典電磁學來定性地了解磁化和有關的物理量，由式 (7-



47) $\mu = IA$ ，原子的半徑 r_a 是平均數個 $\text{\AA}$ ， $1\text{\AA} \equiv 10^{-10}\text{m}$ ，於是面積 $A_a = \pi r_a^2 \doteq 10^{-19}\text{m}^2$ 的數量級，而電子軌道磁偶矩產生的磁化電流 i_m 的大小是：

$$i_m = \frac{\mu_L}{\pi r_a^2} \doteq \frac{\mu_B (\text{Bohr 磁子})}{10^{-19}\text{m}^2} \doteq \frac{9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}}{10^{-19}\text{m}^2}$$

$$\therefore i_m \doteq 9.274 \times 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{T}} = 9.274 \times 10^{-5} \text{ A} \quad (7-61c)$$

所以 I_m 大約是 10^{-4}A 的數量級，是相當大的電流。

我們無法看到微觀現象，觀察到的是宏觀表象。故使用單位體積的磁偶矩 M ，稱為磁化向量 (magnetization vector)，或稱為磁化強度來描述磁化情形：

$$M \equiv \frac{\text{磁偶矩 } \mu \text{ 的總和}}{\text{總體積 } V} = \frac{\sum \mu}{V} \quad (7-62a)$$

M 的因次 $[M] = \frac{[\mu]}{\text{體積}} = \frac{\text{J}}{\text{T} \cdot \text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{T} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$ 。 I_m 和 μ 有關，於是 I_m 和 M 有關，由 $I_m = \sum_j i_{mj}$ 和圖 7-37(c)，以及式 (7-61c) 得：

$$\sum_{\Gamma \text{ 內}} I_m = \sum_{\Gamma \text{ 內}} \left(\sum \frac{|\mu|}{\pi r_a^2} \right) = \sum_{\Gamma \text{ 內}} \left(\frac{(\sum |\mu|) \times \text{長度}}{\text{面積 } A \times \text{長度}} \right)$$

$$= \sum_{\Gamma \cap V_m} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{\text{體積}} \times \text{長度}(\Gamma \text{ 之長}) \Rightarrow |\boldsymbol{M}| \times \text{長度}(\Gamma \text{ 之長})$$

整個環形管內的磁性物質都磁化，於是沿著 Ampere 封閉曲線 Γ 可得如下關係式：

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{\Gamma \cap V_m} I_m, \quad d\boldsymbol{l} = \text{封閉曲線 } \Gamma \text{ 的微小線段向量} \quad (7-62b)$$

為了方便定義及式子的簡潔，和真電流 I 有關的部分表示成下式：

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{\Gamma \cap V} I \quad (7-62c)$$

結果式 (7-61b) 的 Ampere 定律可寫成如下關係：

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r n \mu_0 (I + I_m)$$

或

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H}) \equiv \mu \boldsymbol{H} \quad (7-62d)$$

在 MKSA 制稱 $\boldsymbol{H}$ 為磁場強度 (magnetic field intensity (strength))，這個量完全是為了方便，沒有什麼新的物理意義，只是用 $\boldsymbol{H}$ 表示時僅和真電流 I 有關而已，而含磁化電流 I_m 的 $\boldsymbol{B}$ 稱為磁感應強度 (magnetic induction intensity)，或磁通量密度，

或簡稱磁場 (參見式 (7-39))。 $\boldsymbol{H}$ 的因次和 $\boldsymbol{M}$ 的因次相同，都是 $\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ， $[\boldsymbol{B}] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \equiv \text{T}$ ； μ 是有磁性物質時的磁導率，其因次 $[\mu_0] = [\mu] = \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ 。

(3) 介磁常數 (magnetic substance (material) constant) κ_m ，磁化率 (magnetic susceptibility) χ_m

電流產生的磁場 $d\boldsymbol{B}$ 由式 (7-40) 的 Biot-Savart 定律是和磁導率有關，有無磁性物質，其磁場大小之比值根據式 (7-62d) 剛好是等於磁導率的比值：

$$\frac{B(\text{有磁性物質})}{B_0(\text{沒磁性物質})} = \frac{\mu}{\mu_0} \equiv \kappa_m \quad (7-63)$$

κ_m 稱為介磁常數，或稱相對磁導率 (relative magnetic permeability)。磁導率 μ 是實值量，即 $\mu \geq 0$ ，於是 $\kappa_m \geq 0$ ；在 MKSA 制中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} > 0$ ，所以當 $\kappa_m = 1$ 時， $\mu = \mu_0$ 表示沒磁化現象，而 $\kappa_m \neq 1$ 表示有磁化；因此 κ_m 偏離 1 表示磁化情形，所以可定義下式：

$$\kappa_m \equiv 1 + \chi_m \quad (7-64)$$

將式 (7-63) 和 (7-64) 代入式 (7-62d) 式得：

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (7-65a)$$

χ_m 稱為磁化率, χ_m 和 κ_m 都是無因次量, 是數值。由式 (7-62a ~ d) 以及式 (7-65a) 可得如下關係量:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_m > 1: & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ 和 } \mathbf{H} \text{ 同向, 或 } \mathbf{I} \text{ 和 } \mathbf{I}_m \text{ 同向; 而 } \chi_m > 0 \text{ 表示 } \chi_m \text{ 沒上限,} \\ \text{但由「三寶」} \chi_m \text{ 必須是有限值且其大小和探討的系統有關才行。} \end{array} \right. \\ \kappa_m < 1: & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ 和 } \mathbf{H} \text{ 反向, 或 } \mathbf{I} \text{ 和 } \mathbf{I}_m \text{ 反向, 並且是必須滿足:} \\ -1 < \chi_m < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (7-65b)$$

κ_m 從 $0 \leq \kappa_m < 1$ 變到 $\kappa_m > 1$, 中間必經 $\kappa_m = 1$, 這是 $\mu = \mu_0$ 的沒磁化現象的情形。式 (7-64) 最有趣的是 $\chi_m = -1$, 這時 $\kappa_m = 0$ 或 $\mu = 0$, 則由式 (7-62d) 磁場 $\mathbf{B} = 0$, 表示磁性物質內沒磁場, 磁化向量 $\mathbf{M}$ 的磁場 $\mu_0 \mathbf{M}$ 剛好抵消掉外磁場 $\mu_0 \mathbf{H}$ 。 $\chi_m = -1$ 是磁性物質的一種特殊狀態, 它是 1911 年荷蘭物理學家 H.Kamerling-Onnes 發現的超導狀態 (參見 11 章), 這時磁性物質內沒電阻, 於是磁性物質內一旦有電流, 由於沒能量的消耗, 電流一直暢流, 能維持到 10^9 秒之久。爲了增進了解, 把以上出現的物理量, 用一個直觀方式整理歸納如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\text{真空}) &\equiv \mathbf{B}_0 \xrightarrow{\text{磁性物質}} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{物}} = \mathbf{B}_{\text{總}} \\ \text{定義 } \mathbf{B}_{\text{物}} &\equiv \chi_m \mathbf{B}_0 \cdots \cdots \text{磁化和 } \mathbf{B}_0 \text{ 成正比的各向同性物質時} \\ \therefore \mathbf{B}_{\text{總}} &= (1 + \chi_m) \mathbf{B}_0 \\ &\equiv \kappa_m \mathbf{B}_0 \end{aligned} \right\} \quad (7-65c)$$

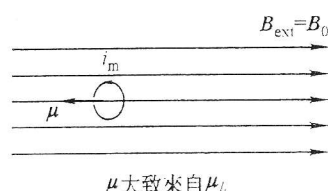
$$\left. \begin{aligned} \text{或者是 } \mathbf{B}_0 &\equiv \mu_0 \mathbf{H} \xrightarrow{\text{磁性物質}} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ &= \mathbf{B}_{\text{總}} \cdots \cdots \text{用磁導率 } \mu_0 \text{ 和 } \mu \text{ 表示時} \\ &\equiv \mu \mathbf{H} \\ \therefore \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \\ \kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (7-65d)$$

(4) 順磁、鐵磁以及抗磁物質

以物質的磁化率 χ_m 的大小以及符號把磁性物質分成下述三種:

(1) 抗磁物質 (diamagnetic substance (material))

如右圖, 當外磁場 $\mathbf{B}_{\text{ext}} \equiv \mathbf{B}_0$ 進入物質中, 物質的



原子電子的自旋磁偶矩 μ_S 不受影響，除了溫度低且 B 強以外；但 μ_L 立刻受到影響，它是抗 B_{ext} 的方向。故磁化向量 M 和 H 是互為反方向，於是式 (7-62d) 變成：

$$\therefore B = \mu_0 (H - M)$$

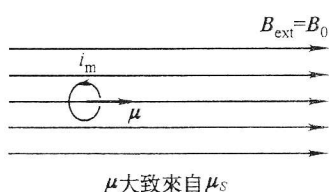
相當於 $\chi_m = \text{負值}$ ，這種物質稱為抗磁物質。而一般的抗磁物質是：

$$-1 < \chi_m < 0, \quad \mu \doteq 10^{-6} \mu_0 \quad (7-66a)$$

在 1845 ~ 1850 年 Faraday 首次發現玻璃棒有抗磁性，其抗磁性較金 (Au)、銀 (Ag)、鉛 (Pb)、鋅 (Zn)、碳 (C) 等物質強。

(II) 順磁物質 (paramagnetic substance (material))

這種物質當外磁場 $B_{\text{ext}} \equiv B_0$ 進來時，原子的電子軌道磁偶矩 μ_L 和自旋磁偶矩 μ_S 與 B_{ext} 相互作用後 μ_L 傾向於隨機 (random)，對磁化沒什麼貢獻，但 μ_S 卻如右圖和 B_{ext} 排齊，於是磁化向量 M 和 B_{ext} 同向，所以式 (7-62d) 變成：



$$B = \mu_0 (H + M) = \mu H$$

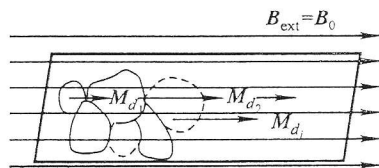
在常溫下 (300 K)，其磁化率 χ_m 和磁導率 μ 的值大約是：

$$\chi_m > 0, \quad \text{但很小}, \quad \mu = \mu_0 [1 + (10^{-4} \sim 10^{-6})] \quad (7-66b)$$

這種物質稱為順磁物質。

(III) 鐵磁物質 (ferromagnetic substance (material))

在室溫 ($\doteq 300\text{K}$) 這種物質的原子電子的 μ_L 間， μ_S 間，以及 μ_L 和 μ_S 之間就有強的相互作用，結果把物質分成好多磁化小域，又稱疇 (domain)。疇的直徑大小約為 10^{-5}cm ，約含 10^3 原子，沒外磁場時各疇的磁化向量 M_{di} 不受拘束地隨機，對外不呈現磁性；但 B_{ext} 進來時，各疇爭著一面重新組疇，一面和 B_0 排齊。如 $M_{di}, i = 1, 2, 3, \dots$ 為各疇的磁化向量，則如右圖所示，幾乎全部磁化，而得 $B =$



$\mu_0 (H + M) \equiv \mu H$ ， $M = \sum_i M_{di}$ ；所以磁化率 χ_m 和磁導率 μ 都很大：

$$\chi_m > 0 \quad \text{且很大}, \quad \mu = \mu_0 [1 + (2 \text{ 或 } 3 \sim 10^3)] \quad (7-66c)$$

這種物質稱為鐵磁物質，溫度升高時鐵磁物質的磁化會減少，甚至於變成順磁物質，這臨界溫度稱為 Curie 溫度 (Curie temperature 或 Curie point) T_C ；例如鐵的臨界溫度 $T_C \doteq 800^\circ\text{C}$ 。設 $M_S =$ 飽和磁化向量大小，即最大磁化，鐵磁物質的磁化向量 M 的大小和溫度的關係一般如下頁上圖。

(5) 磁滯現象 (magnetic hysteresis) , 電滯現象
(electric hysteresis)

以上討論的是磁性物質的定性的大致性質，是室溫的現象並且外磁場 B_{ext} 不強。磁性物質的磁性是和溫度、壓力以及物質的純度有關；加上對象有那麼多原子，於是磁性是相當繁雜不易處理的問題，除了鐵磁物質外，一般的物質在 B_{ext} 的情況下磁化後移走 B_{ext} 都會恢復原狀，無任何磁性。但鐵磁物質重新組織的疇不復原，這現象稱為磁滯現象。磁導率 μ ，介磁常數 κ_m ，磁化率 χ_m 以及磁化向量 M ，全和溫度 T ，外磁場 B_{ext} ，物質本身曾經受到的電磁場的影響，即所謂的物質的「歷史」有關。如果磁化向量 $M = M(T, B_{\text{ext}}, \text{歷史})$ ，其他 μ, κ_m, χ_m 都是一樣是

T, B_{ext} 和歷史的函數。至於如圖 7-38 的磁滯現象，在固定的溫度 T 下依下面步驟變化 B_{ext} ：

① 慢慢地作用外磁場從 $0 \rightarrow B_{\text{ext}}$ ：

磁化情形是大致正比於 B_{ext} ，從 $a \rightarrow b$ ，一直到飽和狀態 S ，得最大磁化向量 M_S ；

② 慢慢地移走 $B_{\text{ext}} \rightarrow 0$ ：

b 不回到 a 而到 c ， B_r 稱為殘留磁化 (remanence) 磁場，或稱頑磁性 (retentivity) 磁場，而 M_r 稱殘留磁化或頑磁性， $B_r = \mu_0 M_r$ 。

③ 慢慢地作用和 ① 相反的外磁場「 $-B_{\text{ext}}$ 」：

磁化現象沿著 $c \rightarrow d \rightarrow e$ 一直到反方向的飽和狀態「 $-S$ 」，得到和 ① 相反方向的最大磁化向量「 $-M_S$ 」。

④ 慢慢地令「 $-B_{\text{ext}}$ 」 $\rightarrow 0 \rightarrow B_{\text{ext}}$ ：

磁化現象是沿著 $e \rightarrow c' \rightarrow f \rightarrow b$ 形成一個封閉曲線，稱為磁滯迴線 (hysteresis loop)。 B_r 大者稱為硬磁性物質，小者稱為軟磁性物質。

凡是物質或物理系統呈現出來的現象，受到以前它們經歷的事實，即受到履歷的影響的現象全都稱為滯後現象 (hysteresis)，是滯後作用帶來的結果。所以對同一物質或物理系統的物理量 O ，影響 O 的量若為「 χ 」，雖 χ 不變，物質或系統的路徑不同的話， O 的值不同；如 O 隨著 χ 的變化形成封閉曲線，稱此曲線為滯後迴

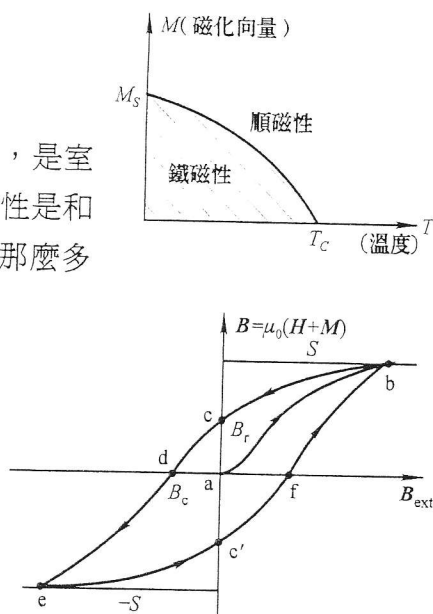
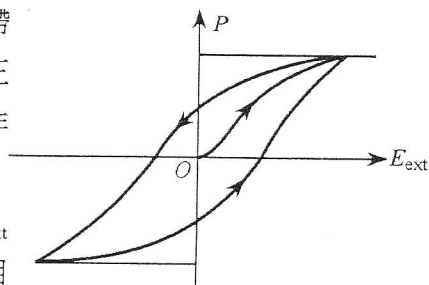


圖 7-38

線。有此性質的物理量不少，如圖 7-38 的 O 便是 B ， χ 是 B'_{ext} ；其他如彈性滯後現象，變壓器、交流電路上的滯後現象等等。滯後現象是物質內部重新安排引起的結果，這時必消耗能量，稱為滯後損失（hysteresis loss）；電路時會消耗電能轉換成熱能。如何減少滯後損失是重要科研題之一。但滯後現象也有其用處，如聲音、映像信號的記錄，正是利用殘留磁化的磁記錄設備。物質磁性的應用非常地廣泛，是目前尖端技術之一。

同樣，鐵電物質也有如右圖的電滯現象， E_{ext} = 外電場， P = 極化向量，變化細節和圖 7-38 相對應。



(D) 物質（電介質、磁性物質）對電磁場的非線性反應

爲了初步和便於了解電極化和磁化現象，在（B）和（C）中把問題簡化，使用各向同性物質或稱均向性物質來討論各有關物理量 $\epsilon_0, \epsilon, \kappa_e, \chi_e, \mu_0, \mu, \kappa_m$ 和 χ_m 。均向性物質的這些物理量，都和方向無關的常量或常數；但實際物質往往其電極化和磁化是有方向性的。有的方向容易極化磁化，有的方向不容易極化磁化，於是上述物理量一般是和方向有關的量。以式（7-62d）做例子來說明，其成分是：

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_x H_x \\ B_y &= \mu_y H_y \\ B_z &= \mu_z H_z \end{aligned} \right\} \quad (7-67a)$$

均向性物質的 $\mu_x = \mu_y = \mu_z \equiv \mu$ ，一般地說，磁導率 μ 是和物質的內部結構有關的量，故對外磁場的反應不一定均勻，不同方向的 H 會產生同一方向的 B ：

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \end{aligned} \right\} \quad (7-67b)$$

$$\text{或使用符號寫成 } B = \mu(H) H, \quad H \equiv |H| \quad (7-67c)$$

$$\text{其他量也可寫成 } D = \epsilon(E) E, \quad E \equiv |E| \quad (7-67d)$$

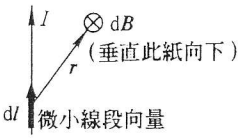
$$\kappa_e = \kappa_e(E), \quad \chi_e = \chi_e(E) \quad (7-67e)$$

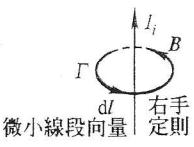
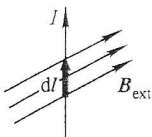
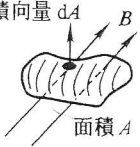
$$\kappa_m = \kappa_m(H), \quad \chi_m = \chi_m(H) \quad (7-67f)$$

像式（7-67b ~ f），有兩個指標（此地是兩個下標）的量稱作張量，一個指標的量稱作向量。不過在室溫，我們使用的物質，主要部分是均向反應，爲了便於察看

以各向同性物質為例，對應表 7-3，將磁學部分的有關物理量整理成表 7-7。

表 7-7

中文名	英文名	記號，關係式	因次(MKSA 制單位)
磁荷	magnetic charge	宏觀世界不存在磁單極	
磁場 又叫 { 磁感應強度， 磁通量密度	magnetic field, magnetic induction intensity, magnetic flux density	B	$[B] = \frac{N}{A \cdot m} \equiv T$ $1T = 10^4 G (\text{gauss})$
磁場強度	magnetic field intensity (strength)	H $B = \mu_0 (H + M) \equiv \mu H$	$[H] = \frac{A}{m}$
磁導率	permeability	μ_0 (真空) μ (磁性物質)	$[\mu_0] = [\mu]$ $= \frac{T \cdot m}{A}$ $= \frac{N}{A^2}$
Gauss 定律	Gauss' law	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ $S = \text{封閉曲面}$ 	
Biot-Savart 定律	Biot-Savart's law	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$ 右手定則 	$[B] = T$ $[I] = A$ $[r] = [dl] = m$

中文名	英文名	記號, 關係式	因次(MKSA 制單位)
Ampere 定律	Ampere's law	$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i (\Gamma \text{ 內電流})$ $\Gamma = \text{封閉曲線}$  右手定則	$[B] = T$ $[I_i] = A$ $[dl] = m$ $T = \text{tesla}$
Ampere 力	Ampere's force	$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ $d\mathbf{l} = \text{微小線段向量}$ $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \text{外磁場}$ 	$[F] = N$ $[B_{\text{ext}}] = T$ $[I] = A = \frac{N}{T \cdot m}$ $[dl] = m$
Lorentz 力	Lorentz force	$\mathbf{f} = q (\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}})$ $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \text{外電場}$ $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \text{外磁場}$ $q = \text{電荷}$ $\mathbf{v} = \text{帶 } q \text{ 者的速度}$	$[f] = N$ $[q] = C(\text{coulomb})$ $[v] = \frac{m}{s}$ $[E_{\text{ext}}] = \frac{N}{C}$
磁通量	magnetic flux	ϕ_B $\phi_B = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ $d\mathbf{A} = \text{微小面積向量}$  面積 A	$[\phi_B] = T \cdot m^2$ $\equiv \text{Wb}$ $\text{Wb} = \text{weber}$

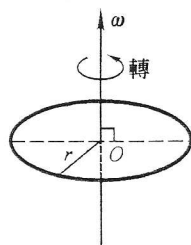
(3) 受重擊的磁鐵磁性往往會減弱，說明為什麼？在火上烤烤磁鐵會變成如何呢？

(4) 比較電偶矩和磁偶矩，它們之間有沒有相互作用？

(5) 到目前為止我們尚未找到電極化率 $-1 \leq \chi_e < 0$ 的電介質，以我們所學的電磁學說明理由。假定真的有抗電物質，試畫圖說明外電場 E_{ext} 和電偶矩 P 的關係圖（參考圖 7-6）。

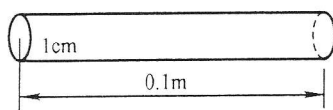
(6) 在 Curie 溫度以上，比較順磁和鐵磁物質的磁化現象，如果兩者的磁化都達到飽和狀態，兩者會不會無法區別？或者是能區別？對應式 (7-59e) 寫下磁化率 χ_m 和磁性物質的關係式。

(7) 如右圖，正電荷 q 均勻地分布在半徑為 r 的圓環上，圓環以經圓心 O 垂直於圓環面的軸，用角速度 ω 均勻地旋轉著，求 q 的運動所產生的物理量是什麼？且求其量。



(8) 地球的磁偶矩 $\mu_{\text{地}} = 8 \times 10^{22} \text{ J/T}$ ，如果它是由繞著赤道的圓環電流 I 產生的，設赤道半徑約 6400 km，求 I 是多大？

(9) 如右圖，長 0.1m 半徑 $r = 1\text{cm}$ 的均勻圓柱型順磁物質，均勻磁化後的磁化向量大小 $M = 2 \times 10^4 \text{ A/m}$ ，求總磁偶矩大小。如果把順磁物質換成順電物質， M 改為電極化向量，其大小 $P = 2 \times 10^4 \text{ C/m}^2$ ，則總電偶矩多大？



(10) 把 (9) 的順磁圓柱換成質量密度 $\rho = 7.9 \text{ g/cm}^3$ 的均勻鐵磁物質的鐵圓柱。假定每個鐵原子都均勻地磁化，每個原子的磁偶矩 $|\mu| = 2.1 \times 10^{-23} \text{ J/T}$ 。鐵的克分子量大約是 55.85 g/mol，每克分子量含有的原子數 $= 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$ ，求總磁偶矩 $\mu_{\text{總}}$ 。mol 表示莫耳 (mole)，對 mole、克分子量的定義，請見第 6 章參考文獻 (2)。

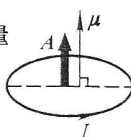
(11) 如果沒磁滯現象，能不能自己造小磁鐵？

(12) 利用電滯現象，能造出什麼東西？那麼為什麼買不到這種玩具，卻有好多磁鐵玩具？

(13) 沒磁化的小磁棒在外磁場 B_{ext} 內會不會受到力矩 τ ？試畫圖說明抗磁的小磁棒在 B_{ext} 內的轉動情形。

(14) 舉電磁以外的有滯後現象的例子。

(15) 比較電介質和磁性物質。

中文名	英文名	記號，關係式	因次(MKSA 制單位)
磁偶極矩 (磁偶矩)	magnetic dipole moment	μ $\mu = IA$ 力矩 $\tau_B = \mu \times B_{\text{ext}}$ 【Ex】電子 $\begin{cases} \text{軌道 } \mu_L = -g_L \frac{e}{2m} L \\ \text{自旋 } \mu_S = -g_S \frac{e}{2m} S \end{cases}$ $e = \text{電子電荷大小}$ 面積向量 	$[\mu] = A \cdot m^2 = \frac{J}{T},$ $[L] = [S] =$ $\text{kg (千克)} \frac{m^2}{s (\text{秒})},$ $[m] = [\text{kg}],$ $[\tau] = J$ $[e] = C$ $g_L \doteq 1$ $g_S \doteq 2.0023$
取向能	orientation energy	$U_B, \quad U_B = -\mu \cdot B_{\text{ext}}$	$[U_B] = J$
介磁常數 或相對磁導率	magnetic substance constant (relative magnetic permeability)	κ_m $\kappa_m =$ $\frac{\mu (\text{有磁性物質時的磁導率})}{\mu_0 (\text{真空時的磁導率})}$	$[\kappa_m] = \text{無因次}$
磁化率	magnetic susceptibility	χ_m $\chi_m = \kappa_m - 1$ 或 $\kappa_m = 1 + \chi_m$	$[\chi_m] = \text{無因次}$
磁化矢量(向量) 或磁化強度	magnetization vector (magnetization intensity (strength))	M $M = \frac{\sum \mu_i}{\Delta V}, \Delta V = \text{微小體積}$ $= \text{單位體積內的磁偶矩}$ $= \chi_m H$	$[M] = \frac{A}{m}$ $= [H]$

練習題

(1) 你怎麼知道地球是個大磁鐵？

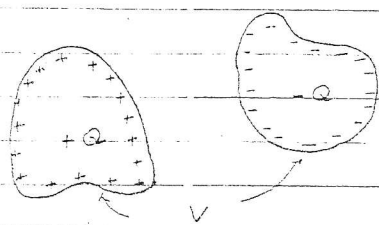
(2) 仿 149 頁上圖 (a) 和 (b)，畫磁偶矩 $\mu_{S,L} = g_{S,L} \frac{+e}{2m} S (L)$ 在外磁場 B_{ext} 的情況下的旋進圖。

第五節 電容及電介體

簡介 在本節中我們將討論電容及電介體

基本觀念

兩個隔絕的帶着大小相同而符號相反的導體構成一電容的系統。

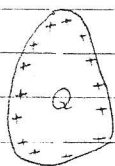


若導體所帶之電荷分別為 Q , $-Q$, 而兩導體間之電勢差

為 V 則該系統之電容定義為

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

此一觀念有時也推廣到一個帶電荷導體的情形。若一導體所帶之電荷為 Q , 其電位

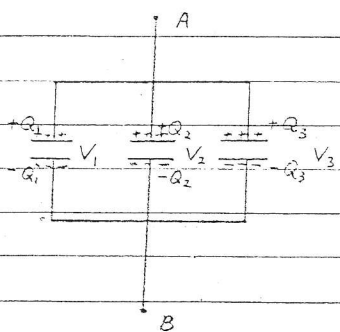


為 V (我們取離該導體無窮遠處之電位為零)

則其電容也定義為

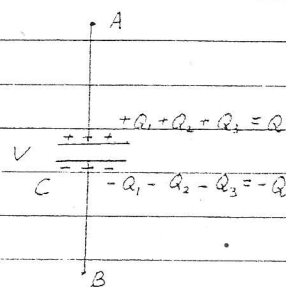
$$C = \frac{Q}{V} \quad (2)$$

電容之串聯與並聯



(a) 並聯

此一系統之電容為



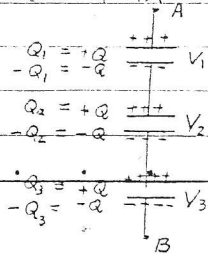
之電容相同

$$\text{由於 } V_1 = V_2 = V_3 = V = V_A - V_B \quad (3)$$

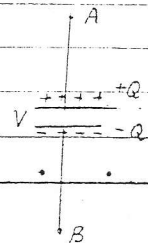
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q, \quad Q_1 = C_1 V_1, \quad Q_2 = C_2 V_2, \quad Q_3 = C_3 V_3 \quad (4)$$

$$\text{因此 } C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (5)$$

(b) 串聯



之電容為



之電容相同

由於 $V_1 + V_2 + V_3 = V = V_2 - V_3$ (6)

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ (7)

$Q_1 = C_1 V_1, Q_2 = C_2 V_2, Q_3 = C_3 V_3$ (8)

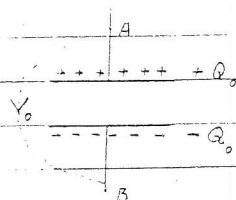
因此 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ (9)

我們現在來討論電介質及電介質常數

(a) 巨觀的描述

電介質是絕緣物質。它不允許電荷通過，它也不含“自由電子”，但可被偏極化。

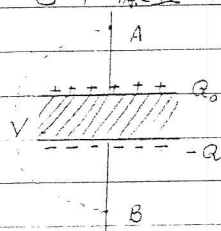
若以下的裝置中兩板間的空間是真空



$C_0 = \frac{Q}{V_0}$ (10)

C_0 代表在真空中此一系統之電容

若以電介質置於兩板之間同時維持在平板上之電荷不變



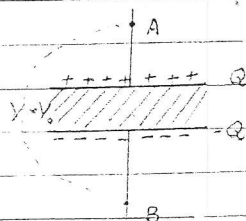
我們發現其電位差由 V_0 變成 $V < V_0$

V 與 V_0 之間之關係為

$V = \frac{V_0}{\kappa_e} \quad \kappa_e > 1$ (11)

當然其電容由 C_0 變成 $C = \kappa_e C_0$ (12)

若以電介質置於兩板之間但設法維持其電位不變，則我們發現



在兩平板上電荷之大小由 Q_0 變成 $Q > Q_0$

Q 與 Q_0 之間的關係是

$Q = \kappa_e Q_0$ (13)

此處之 κ_e 與 (11) 式中之所得之值相同，此時之電容 $C = \kappa_e C_0$ (14)

因此以上兩個實驗結果均要求 $C = \kappa_e C_0$ ， κ_e 為置於兩板間之電介質之性質

有關，我們稱之為該電介質之介電常數 $\epsilon_0 \epsilon_r \equiv \epsilon$ 稱為該電介質之電容率。

此處 ϵ_r 是真空之電容率。

(b) 我們現在要從微觀的觀念來了解以上之結果

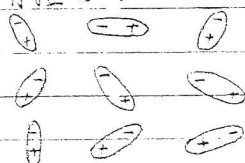
電介質之分子可分成

(i) 有極分子：分子中正電荷與負電荷之中心不相重，此類分子有永久的電偶極矩。

(ii) 非極分子：分子中正電荷與負電荷之中心相重，此類分子無永久的電偶極矩。

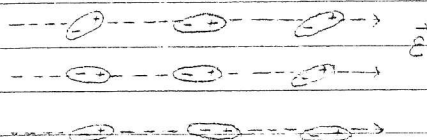
當無外加電場時

(i) 有極分子



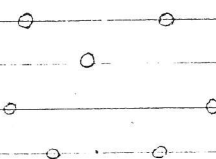
電偶極矩之指向是無規的
因此總電偶極矩為零

當外加電場時

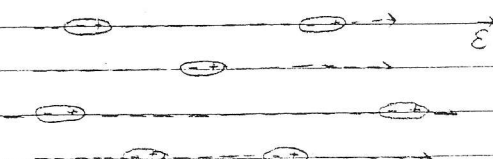


由於外加電場使得電偶極矩
沿電場排列而使得總電偶極
不為零

(ii) 非極分子

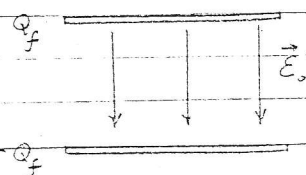


非極分子無永久的電偶極
因此在無電場時無總電
偶極矩



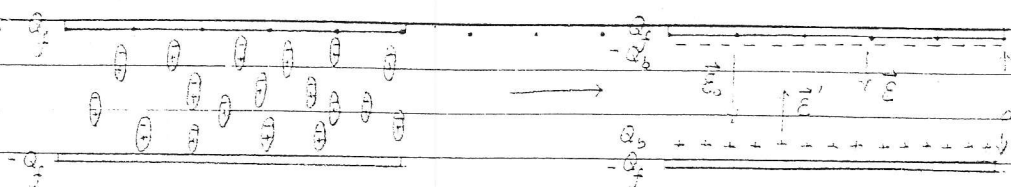
由於外加電場使得分子中正電荷
與負電荷的中心分開而產生電偶
極矩，稱為感應電偶極。

因此不論是有極及非極分子，外加電場會產生沿此電場之淨電偶極



Q_f 自由電荷在真空情況下產生一均勻電場 E_0 。

若將電介質置於兩平板之間則情況如下。



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad (15)$$

此處 $\vec{E}$ 是將電介質置於兩平板後電場之強度
 $\vec{E}_0$ 是電介質置於兩平板前之電場強度
 $\vec{E}'$ 是由感應電荷 $-Q_b$ 及 Q_b 所產生之電場強度

$$|\vec{E}'| = \frac{|Q_f| - |Q_b|}{A\epsilon_0} \quad (16)$$

$|Q_b|$ 與 $\vec{P}$ 之關係

$\vec{P}$ 是在單位體積中介質之電偶極矩 $= n\vec{p}$, ρ 是介質之偏極化

此處 n 是單位體積中之分子數, $\vec{p}$ 是每個分子之電偶極矩。

因此該介質之總電偶極矩之大小 $= \rho A d$, d 是兩板間的距離 (17)

由 $-Q_b$ 及 Q_b 離 d 時之電偶極大小為 $|Q_b| d$ (18)

(17) 式及 (18) 式之結果應當相等也即是 $\rho A d = |Q_b| d$ (19)

由 (15) 式及 (19) 式得

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{free} - |\vec{P}|) \quad (20)$$

此處 $\sigma_{free} = \frac{|Q_f|}{A}$ (21)

很多電介質中 $\vec{P} \propto \vec{E}$ (22)

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}, \text{ 此處 } \chi_e \text{ 是該介質之電極化率} \quad (23)$$

$$\text{由於 } \vec{E}' = -\chi_e \vec{E} \quad (24)$$

將 (24) 式代入 (15) 式得

$$(1 + \chi) \vec{E} = \vec{E}_0 \quad (25)$$

由於 $V = |\vec{E}|d$, $V_0 = |\vec{E}_0|d$, 所以

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 + \chi_0} \quad (26)$$

比較第(11)式及(26)式得

$$\kappa_0 = 1 + \chi_0 \quad (27)$$

電位移 $\vec{D}$ 之定義為

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_0) \vec{E} \\ &= \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{此處 } \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_0) = \epsilon_0 \kappa_0 \quad (29)$$

第(20)式可寫成

$$\hat{n}_y (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \sigma_{free} \quad (30)$$

因此

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{free} \quad (31)$$

利用(31)可寫成

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{free}}{\epsilon} \quad (32)$$

所以當我們計算在電介體中之電場時其方法可在真空中相同，唯一的不同

同是需要將 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \kappa_0 \epsilon_0$.

(33)

居禮定律

$$\vec{P} = \chi_0 \epsilon_0 \vec{E} \quad (34)$$

一般而言，物質的偏極化是由 (1) 感應電偶極，此一效應與溫度無關。

(ii) 外在電場使得分子之電偶極矩沿著電場排列，但分子之熱運動會破壞此一效應。

用此我們預計此一效應將隨溫度之減低而加大。

實驗結果顯示，很多介質滿足以下之公式

$$\epsilon = A + \frac{B}{T} \quad (35)$$

稱為居禮定律，顯然地第一項來自感應電偶極矩第二項來自永久電偶極矩之排列。

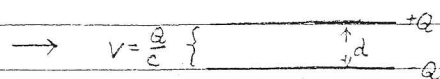
儲存在電容器中之電位能



$$V_q = \frac{q}{C}$$

需將 dq 由帶負電的平板移至帶正電的平板，所需作之功

$$dW = dq V = dq \frac{q}{C} \quad (36)$$



$$\text{所需作的功為 } W = \int_0^Q \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (37)$$

因此以上的電容器中所儲存之電位能

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

在兩個平行板之時候，在兩板間的電場強度為 $\frac{V}{d}$ ，在兩板外的電場為零。

此一電容器的電容為 $C = \frac{A \epsilon_0}{d}$ ($|\vec{E}| = \frac{Q}{A \epsilon_0}$, $V = |\vec{E}| d$, $C = \frac{Q}{V}$)

$$\begin{aligned} \text{所以 } U_E &= \frac{1}{2} \frac{A \epsilon_0}{d} V^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d} \right)^2 A d \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{因此 } \frac{U_E}{A d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (39)$$

$$\text{也即是電位能之密度為 } u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (40)$$

分類:
編號:
總號:

Magnetism in Material Medium

magnetic dipole 之來源

- (i) orbiting electron $\Rightarrow$ current loop
 - (ii) intrinsic spin of the electron
 - (iii) intrinsic spin of the nucleus
- } 原子物理

Diamagnetic materials

未加磁場時, 原子不帶磁矩

molecules do not possess a magnetic moment in the absence of an external magnetic field

Apply magnetic field $\Rightarrow$ magnetic dipoles are produced in a direction opposite to the applied magnetic field.

抗磁性

Paramagnetic material

molecules and atoms have permanent magnetic dipole moment, interaction between neighboring molecules is negligible

in the absence of applied magnetic field $\Rightarrow$ the orientation is random

Apply magnetic field $\Rightarrow$ magnetic dipoles are lined-up along the direction of the applied magnetic field

$\rightarrow$ Magnetization

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \text{magnetic dipole moment / volume} \\ &= N \vec{m} \\ &\quad \downarrow \text{magnetic moment / molecule} \\ &\quad \text{number of molecule / volume}\end{aligned}$$

分類:

編號:

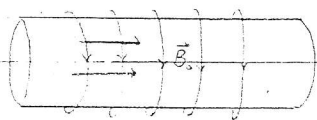
總號:

第六節 物質的磁化

1. 簡介 我們在此節中將討論在介質中電流及磁感應之關係

2. 基本觀念

(a) 巨觀的描述



一無窮長的螺線圈置於真空中，若線圈上有電流 I 通過

則在螺線管中會產生一均勻之磁感應場 B 。

若將介質置於螺線圈內，則我們發現其磁感應場變成 B

我們定義

$$\frac{|B|}{|B_0|} = \kappa_m$$

(1)

此處 κ_m 稱為該介質之相對磁導率。

一般物質可分為 (i) 抗磁性 (ii) 順磁性 (iii) 鐵磁性 (iv) 反鐵磁性 及 (v) 亞鐵磁性。

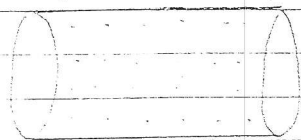
我們將首先討論前兩種，稍後再討論後三種。

在抗磁性時 $\kappa_m < 1$ ，在順磁性時 $\kappa_m > 1$

(b) 對以上結果之微觀了解

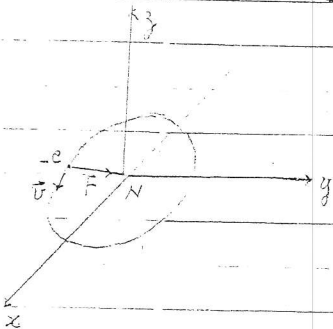
(i) 抗磁性物質

當抗磁性物質在未加磁場時，它的原子不帶磁矩



當抗磁性物質在受一外加磁場後，則其原子會產生磁矩，其方向與外加磁場之方向相反

我們現在從原子的觀念來討論此問題



若電子以在 $x-y$ 平面作等速圓周運動則其所受之力

$$F = m_p \omega^2 r$$

此處 r 是電子運動的半徑， ω 是角速度， F 是來自核子對電子所施之力

當電子沿反時鐘方向運動時，它之磁矩為

$$-\frac{e}{2\pi} \omega (\pi r^2)$$

其方向為沿 $-z$ 軸

但由於電子有同等的機會沿順時鐘方向運行，

因此當沒有外加 B 場時其平均磁矩為零

當外加一沿 z 軸之 B 場則其所受之力為 $F \pm e \omega_p B$ (指向核心)，此處 $+$ ， $-$ 號分別是指電子是反時鐘，及順時鐘方向運動的情形

假設 B 不大因此不改變電子之半徑，則由運動方程式

$$m_p \omega^2 \pm e \omega_p B = m_p \omega^2$$

在反時鐘運行時

$$m_p \omega^2 + e \omega_p B = m_p \omega^2$$

$$m (\omega^2 - \omega_0^2) = e \omega B$$

$$m (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = e \omega B$$

若 B 不大時 $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ ，則

$$\Delta \omega = \frac{e}{2m_p} B, \text{ 其磁矩} = -e(\omega_0 + \frac{e}{2m_p} B)(\pi r^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \hat{z}$$

同理當有時鐘時

$$\Delta \omega = - \frac{e}{2m_e} B$$

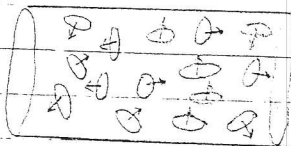
$$\text{則其磁矩} = + e(\omega_0 - \frac{e}{2m_e} B) (\pi \rho^2) \frac{1}{2\pi} \hat{z}$$

$$\text{所以兩者之平均磁矩為} - \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e} B \hat{z}$$

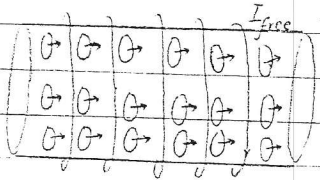
也即是每個原子當有外加磁感應時會產生一平均磁矩，其方向與外加B方向相反而其大小成正比

(ii) 順磁性物質

這些物質的分子本身帶有永久性磁矩，但在無外加B場其磁矩之方向是無規的



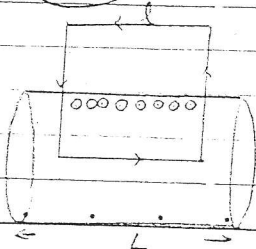
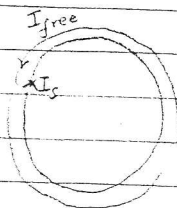
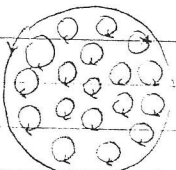
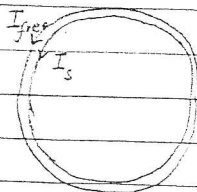
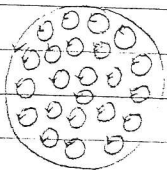
但當外加一磁場時則磁矩則沿B場之方向排列而形成以下的情形



在兩種情況下

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

此處 $\vec{B}'$ 是由感應磁矩所產生之磁感應場



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l = \mu_0 (N I + I_{eff})$$

$$\text{故 } |\vec{B}| = \mu_0 \frac{N}{l} I + \mu_0 \frac{I_{eff}}{l}$$

因此 $|\vec{B}| = \mu_0 n' I + \mu_0 i_{\text{eff}}$

此處 i_{eff} 是單位長度中之有效電流, n' 是單位長度中之線圈數

我們現在希望找出 i_{eff} 及 $|\vec{M}|$ 之間的關係

$\vec{M}$ 是單位體積中之磁矩, 則整個圓筒中之總磁矩 = $\vec{M} / AL$

若將整個圓筒當成一大磁矩, 則其磁矩則其磁矩 = $I_{\text{eff}}^{\text{tot}} A$

以上兩結果必須相同, 因此 $\vec{M} = \frac{I_{\text{eff}}^{\text{tot}}}{L} = i_{\text{eff}}$

所以 $\vec{B} = \mu_0 (n' I + |\vec{M}|)$

也即是 $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - |\vec{M}| = n' I$

由於 $\vec{B}$, $\vec{M}$ 是沿同一方向

定義 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ 為磁場強度則顯然地取以上之圖得

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} - i_{\text{eff}} \cdot l$$

$$H l = N I = I_{\text{free}}$$

也即是 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{free}}$

此即是在介質中之公式

由於 $\vec{M} = n \vec{m}$ 此處 n 是單位體積中之磁矩數, 而我們採用的模型顯示

$\vec{m} \propto \vec{B}$, 因此 $\vec{M} \propto \vec{B}$, 同時 $\vec{H}$ 也 $\propto \vec{B}$, 所以 $\vec{M} \propto \vec{H}$

我們將此一關係寫成

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

此處 χ_m 稱為磁化率

代入 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ 得

$$(1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} = \vec{B}$$

令 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ 則得

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{若此公式成立則} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

由於 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$

$$= \vec{B}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$$= \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{\mu} \chi_m \vec{B}$$

$$(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \chi_m) \vec{B} = \vec{B}_0$$

$$(1 - \frac{\chi_m}{1 + \chi_m}) \vec{B} = \vec{B}_0$$

$$\frac{1}{1 + \chi_m} \vec{B} = \vec{B}_0$$

$$\frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_0|} = 1 + \chi_m = \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\chi_m = \chi_m - 1$$

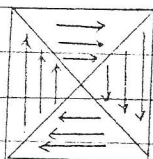
順磁性 $\mu > \mu_0$

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \text{居禮定律}$$

抗磁性 $\mu < \mu_0$

χ_m 与温度幾乎無關

我們現在來討論鐵磁性。

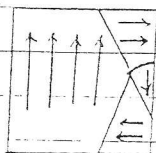


沒有外加磁場時

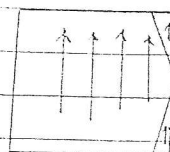
當所加之磁場小時，則磁域及邊界的改變

在除去外加磁場後可以復原，但外加磁場

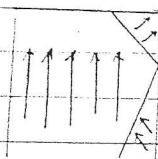
太大時則邊界的改變是不可逆



$\uparrow H$ 磁域增大

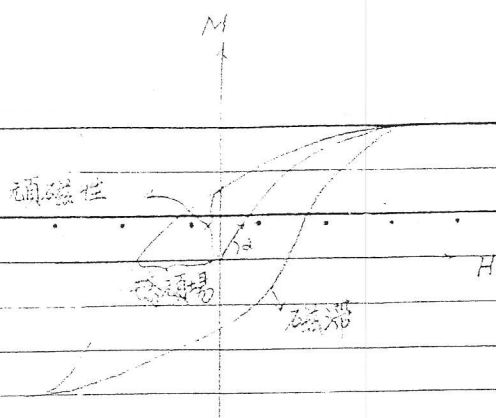


H 飽和



H 磁域增大
同時磁域轉向

分類：	
編號：	6
總號：	



當溫度抵達臨界溫度以上時鐵磁性效應消失，物質性質與順磁性物質相似。

分類:
編號:
總號:

Summary

Dielectric

Electric dipole

Non-polar molecules

Molecules do not possess permanent electric dipole moment in the absence of applied electric field.

Apply external electric field $\Rightarrow$ induced dipole moment along $\vec{E}_{\text{applied}}$

Polar

Molecules possess permanent electric dipole, but the orientation is random in the absence of applied electric field.

Apply external electric field $\Rightarrow$ all electric dipole line up.

↑ Polarization

$$\vec{P} = \text{單位體積中之 total electric dipole moment}$$

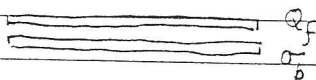
$$= n \vec{p}$$

↓ dipole moment per molecule
number of molecule / volume

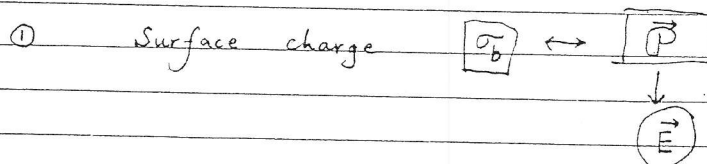
$$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow P = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

↓ 電極化率

Surface charge Q_b



plane plate



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad \vec{E}' \propto \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{free}} \rightarrow \text{equation in the medium}$$

Chapter 32: Magnetism of Matter:

Maxwell's Equations

32.1. Magnets

32.2. Gauss' Law for Magnetic Fields

32.3. The Magnetism of Earth

32.4. Magnetism and Electrons

32.5. Magnetic Materials

32.6. Diamagnetism

32.7. Paramagnetism

32.8. Ferromagnetism

32.9. Induced Magnetic Fields

32.10. Displacement Current

32.11. Maxwell's Equations

Magnets

- **Magnets have been known since antiquity in the form of small pieces (lodestones) of a naturally occurring magnetic iron ore called magnetite**
- **The Greeks eventually noticed that these pieces tended to align themselves pointing north**
- **Magnets were used for navigation for many centuries**
- **Magnets are magnetic dipoles whose properties are due to the arrangement of electrons in their atoms**
- **Magnetic monopoles are NOT known to exist**

Gauss' Law for Magnetic Fields

- **Gauss' Law for magnetic fields is just a formal way of stating that magnetic monopoles do not exist:**

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Contrast this with Gauss' Law for electric fields:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

- If magnetic monopoles existed, they should have a net flux out of any area that completely encloses them

The Magnetism of Earth

- The earth forms a giant magnet
- The earth's magnetic field is thought to be due to the movement of molten iron in the earth's core
- The earth's magnetic field is not aligned with the earth's axis
- The average strength of the earth's magnetic field is about half a Gauss ($50 \mu\text{T}$)
- The strength and direction of the earth's magnetic field varies from point to point on the earth.
- The field declination is the deviation of the magnetic field from true north
- The field inclination is the deviation of the magnetic field from horizontal
- The northern pole of the earth's magnetic field is located near Baffin Bay in Canada

- The "north" pole of the earth's magnetic field is actually a south magnet pole as conventionally defined
- The earth's magnetic field gets stronger and weaker over a period of centuries and has reversed itself many times over millions of years
- The earth's magnetic field extends into space and traps charged particles from the sun in the Van Allen belts
- This protects the earth from higher radiation exposure

Magnetism and Electrons

- An electron has an intrinsic angular momentum (called spin) S
- Associated with this angular momentum is an intrinsic spin magnetic dipole moment μ
- The magnetic moment μ is related to S by:

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

where $e = 1.6 \times 10^{19} \text{ C}$ and $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
and the minus sign means that S and μ are oppositely directed

- S is different from a macroscopic angular momentum in that it cannot be directly measured; its component along any axis can be measured
- S is also quantized which means it is limited to certain values (in this case, the same value, either positive or negative)

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi} \quad \text{with } m_s = \pm \frac{1}{2}$$

where m_s is the spin magnetic quantum number and h is Planck's Constant ($h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$)

•The spin magnetic moment μ also cannot be directly measured, but its component can

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z \Rightarrow \mu_{s,z} = -\frac{e}{m} m_s \frac{h}{2\pi} = \pm \frac{eh}{4\pi m}$$

• $\mu_{s,z}$ is called the Bohr magneton and has the value:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

•Spin dipole moments of electrons and other elementary particles can be measured in terms of μ_B

•In a magnetic field the energy associated with the spin magnetic moment is:

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = \mu_{s,z} B_{\text{ext}}$$

Orbital Magnetic Dipole Moment

•In addition to the spin magnetic moment, the electron also has a magnetic moment associated with its orbit around the nucleus

•The orbital angular momentum is symbolized by L

•The orbital magnetic dipole moment μ is:

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{\text{orb}}$$

•The component along the z axis is:

$$L_{\text{orb},z} = m_\ell \frac{h}{2\pi} \quad \text{with } m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\text{limit})$$

- The orbital magnetic dipole moment behaves as the spin moment does:

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_\ell \frac{eh}{4\pi m}$$

Loop Model for Electron Orbits

- The complete explanation for the behavior of electrons in atoms is given by quantum mechanics
- But semi-classical models yield similar results in most cases
- The semi-classical model of an electron orbiting about the nucleus gives a magnetic moment:

$$\mu_{\text{orb}} = iA$$

- The current i is that of the electron circling the nucleus:

$$i = \frac{\text{charge}}{\text{time}} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v}$$

where the period is the circumference divided by the speed

- Since $A = \pi r^2$ and substituting for current:

$$\mu_{\text{orb}} = iA = \frac{e}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

- The angular momentum for a circular orbit is $L = mvr$

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2} \frac{L}{m} = \frac{e}{2m} L$$

- So, including the sign due to opposing directions of $\mathbf{L}$ and $\boldsymbol{\mu}$:

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{\text{orb}}$$

Loop Model in a Non-Uniform Field

- It has previously been shown that the net force exerted by a uniform magnetic field on a current loop is zero
- So how are the magnetic forces between atoms created?
- It should be noted that the magnetic dipoles within atoms do not produce uniform magnetic fields
- In fact, the dipole magnetic fields associated with atomic current loops spread out and drop off rapidly with distance
- Under these circumstances, current loops near atoms are subject to a net magnetic force

Magnetic Materials

- Each electron in an atom has both a spin and an orbital magnetic moment
- These combine vectorially to produce a total magnetic moment for

each electron

- **The magnetic moments of the electrons within an atom combine vectorially to produce a total magnetic moment of the atom**
- **And finally, the magnetic moments of the atoms within a substance combine vectorially to produce an overall magnetic moment for the substance**
- **Substances react to magnetic fields in three general ways:**

Diamagnetism

Paramagnetism

Ferromagnetism

- **Diamagnetism is similar to electrostatic polarization of a dielectric in that the induced magnetic moment tends to oppose the field that creates it.**
- **Paramagnetism is created when atoms with permanent dipole moments tend to align with an external magnetic field; the resulting field is greater than that of the external magnetic field**
- **Ferromagnetism is similar to paramagnetism except much stronger and occurs primarily in iron, nickel, cobalt**

Diamagnetism

- **Diamagnetic materials do not have permanent dipole moments**
- **Diamagnetism is the weakest of the three types of magnetism in materials**

- All materials exhibit diamagnetism but it is overwhelmed in paramagnetic and ferromagnetic materials
 - Diamagnetism arises because the dipole moments induced in atoms tend to line up opposite of the direction of the external magnetic field that created them
 - Diamagnetic materials thus weaken the external field
-

Magnetization Vector and Magnetic Field Strength

- To describe the magnet field of materials a new symbol, M , is used
- M is the magnetization vector of a material (dia-, para-, or ferro-magnetic)
- To describe the external magnetic in the presence of materials a new symbol, H , is used
- H is the magnetic field strength due to some source of external magnetic field
- B remains the overall total magnetic field and is often called the magnetic induction or magnetic flux density to avoid confusion with H
- H and M have different units than B to account for the magnetic properties of materials; both have units of Amps/meter

$$B = \mu_0(H + M)$$

- Because materials differ in the intensity of their magnetism, the constant χ , the magnetic susceptibility, is used to relate their magnetism to the external field strength that caused the magnetization

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$$

- Including the magnetic susceptibility in the $\mathbf{B}$ equation

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi)$$

- And the magnetic permeability for a substance is

$$\mu_m = \mu_0 (1 + \chi) \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}$$

Paramagnetism

- In paramagnetic materials, the various electron magnetic moments in an atom do not cancel and this leaves a permanent magnetic dipole moment
- When an external magnetic field is applied, the dipole moments tend to line up in the direction of the external field
- The magnetic susceptibilities for diamagnetism and paramagnetism are very small; typically 10^{-9} to 10^{-3}
- The reason that the susceptibilities are so small is that the alignment of the magnetic dipole must compete with the random thermal motion of the dipole
- The average translational kinetic energy from theory is $1.5 kT$ where k is Boltzmann's Constant ($k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)
- Compare this with the maximum dipole energy of $\Delta E_{UB} = 2\mu_B$ which is normally much smaller

- So it is expected that the magnetization M should increase linearly as the external B field is increased until the dipoles are mostly aligned
- This deduction was proven experimentally by Pierre Curie in 1895 and is called Curie's Law

$$M = C \frac{B_{\text{ext}}}{T}$$

where C is a constant for each material

Ferromagnetism

- Ferromagnetism is a much stronger effect than para- or diamagnetism
- The permeabilities for ferromagnetic materials are hundreds to thousands of times greater than μ_0
- Ferromagnetism is a result of the combining in the same direction of the many parallel spin electrons in iron, nickel, or cobalt
- The effect (called exchange coupling) extends beyond any single atom and links thousands to millions of ferromagnetic atoms
- If the temperature is raised above several hundred °C, the exchange coupling effect is overwhelmed and the atoms cease to couple in domains
- Under these conditions, ferromagnetism ceases to operate and the material becomes weakly paramagnetic
- Normally, however, those atoms will have a commonly oriented magnetic moment in a region called a magnetic domain

- Any piece of ferromagnetic material will normally consist of thousands of microscopic domains that are randomly oriented with respect to each other
- When a magnetic field is applied, some of the domains will shift their dipole alignments toward that of the external field
- As the field is strengthened, more of the domains will be realigned and the resulting magnetization will be much more intense than in non-ferromagnetic materials
- Even when the external field is removed, some of the domains will remain at the alignment they held, creating a permanent magnetic moment, i.e. a permanent magnet
- Lodestone is created when lightning strikes a surface deposit of iron ore and the high currents involved create a strong, though temporary, magnetic field
- Once a ferromagnetic material is magnetized, it is difficult to remove the magnetization
- Even if the external field is reversed in direction, some of the original magnetization will persist
- This effect is called hysteresis and makes it difficult to demagnetize any ferromagnetic material
- The usual way demagnetization is done is to place the material in a magnetic field that reverses itself many times a second and then to slowly withdraw the material from the field

Induced Magnetic Fields

- Faraday's Law of Induction can be written:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

- James Clerk Maxwell reasoned that, if a varying magnetic field creates an electrical field, might not a varying electric field create a magnetic field

- It turns out this conjecture is correct, a changing electric field between the plates of a capacitor does create a magnetic field

- This is one of Maxwell's contributions to electromagnetic theory

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- This is generalized to include the more typical sources of magnetic field, static currents

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{enc}$$

- This is called the Ampere-Maxwell Law

Displacement Current

- Since magnetic fields are generally created by currents, it is natural to think of Maxwell's contribution as a current

- The B field is proportional to i_{enc} so the $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ term created by Maxwell is just μ_0 times a current

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 i_d \Rightarrow i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$