

磁矩與磁場

一、目的:

以高斯(Gauss)方法測量磁鐵的磁矩和地磁的水平分量，並藉此觀察磁棒所產生的磁場，以及它在均勻外加磁場中所受的力矩。

二、原理:

(一) 離磁鐵甚遠處的磁場:

待測點與磁鐵的距離遠大於磁鐵的大小時，磁鐵可以當作一個很小的磁矩來看，我們可以在空間內設定一個圓柱坐標(參看圖1)，以磁矩的中心為原點，磁矩 μ 的方向為 $+z$ 軸;在距原點 r 處的待測點 P 的磁場為:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mu \cdot \hat{r})\hat{r} - \mu}{r^3} \quad (1)$$

其中 μ_0 為 $4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A$; μ 為磁鐵的磁矩，單位為 $A \cdot m^2$

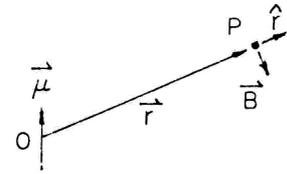


圖 1

(二) 在磁鐵附近的磁場:

如果 P 點與磁鐵的距離不遠大於磁鐵的小，磁鐵不能當作一個很小的磁矩，就不能用(1)來計算它所產生的磁場。但是我們仍然可以把磁鐵看成是由許多小磁鐵所構成的。小磁鐵產生的磁場可以用(1)式計算，把所有小磁鐵所產生的磁場相加，就可以得到整個磁鐵所產生的磁場。

如果磁鐵呈細長棒形狀，而且均勻磁化，則最後的結果非常簡單:相當於由在 N 端的 "N 磁荷" 和在 S 端的 "S 磁荷" 產生之磁場的向量和，"磁荷" 產生的磁場，以距離平方反比方式來計算。以下利用向量分析對此給予簡潔的證明。

首先設定坐標，使 z 軸與磁鐵平行，原點位在磁鐵的中心，同時假設 P 點在 $x-z$ 平面上(參看圖2)。由於我們假設磁鐵呈細長狀，而且均勻磁化，因此若令整個 L 長度內磁鐵的磁矩為 μ ，則長度為 dz 內的磁矩為:

$$d\mu = \frac{\mu}{L} dz \hat{z} \quad (2)$$

$d\mu$ 對 $P(a,b)$ 點所產生的磁場為:

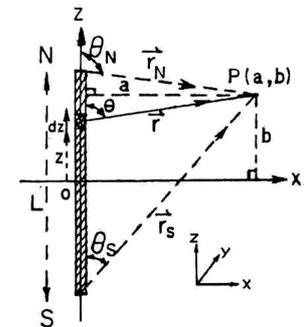


圖 2 由磁棒所產生的磁場

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L} \frac{3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{z}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L} \frac{dz}{r^3} (3\cos\theta \hat{r} - \hat{z}) \quad (3)$$

θ 是 r 與 z 的夾角。 z, r, θ 三個變數中只有一個是獨立變數。現在以 θ 為自變數，把 z 和 r 表示成 θ 的函數：

$$z = b - a \cot \theta \quad dz = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$r = a \csc \theta \quad \hat{r} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}$$

將他們代入(3)式

$$dB = \frac{\mu_0 \mu a \csc^2 \theta d\theta}{4\pi L} \frac{3\cos\theta(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) - \hat{z}}{a^3 \csc^3 \theta}$$

$$= \frac{\mu_0 \mu d\theta}{4\pi L a^2} [3\sin^2 \theta \cos \theta \hat{x} + (3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin \theta) \hat{z}]$$

因此，磁鐵整體產生的磁場為：

$$B = \int dB$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L a^2} \int_{\theta_S}^{\theta_N} d\theta [3\sin^2 \theta \cos \theta \hat{x} + (3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin \theta) \hat{z}]$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L a^2} [\sin^3 \theta \hat{x} + (-\cos^3 \theta + \cos \theta) \hat{z}]_{\theta_S}^{\theta_N}$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L} \left[\frac{\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}}{a^2 \csc^2 \theta} \right]_{\theta_S}^{\theta_N}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mu / L \hat{r}}{r^2} \right]_{r_S}^{r_N}$$

$$B_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mu / L \hat{r}_N}{r^2} - \frac{\mu / L \hat{r}_S}{r^2} \right] \quad (4)$$

因此，位於N極的"磁荷"大小為 $+\mu/L$ ；位於S極的"磁荷"大小為 $-\mu/L$ 。我們只要用高斯計(Gauss meter)測出磁鐵外一點的磁場，量出這點到兩極的距離和方向，以及磁鐵的長度，就可以由(4)式計算磁鐵的磁矩。

上面的方法絕對不能用來計算磁鐵內部的磁場。這是因為我們一開始就假設P點在磁鐵之外，離各小磁鐵很遠，可以使用(1)式導證。如果P點在磁鐵之內，不論磁鐵被分割成多小，總有一些小磁鐵非常接近P點，(1)式不再成立，自然得不到(4)式的結論。

(三) 磁鐵內部的磁場:

磁鐵的磁矩可以當作由許多微小的電流環路所構成的，這些小環路可以合成巨觀的等效環路。假設磁鐵均勻磁化，則等效環路分佈均勻，電流都相等，我們可以把截面積A的磁鐵分成 N_M 圈環路，每一環路上的電流為 i_M 則總磁矩為:

$$\mu = N_M i_M A \quad (5)$$

因為磁鐵呈細長形狀，等效環路是一個個長的螺線管形狀(如圖3示)，因此螺線管內部的磁場為:

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N_M}{L} i_M = \mu_0 \frac{\mu}{LA}$$

$$B = \mu_0 \frac{\mu}{V} \quad (6)$$

μ/V 是單位體積內的磁矩，亦即"磁化強度" $M (= \mu/V)$ ，而磁鐵內的磁場則為:

$$B_{in} \approx \mu_0 M \quad (7)$$

可得知，磁鐵內部的磁場和磁化強度成正比。靠近兩端處因為磁場線開始分散，磁場較弱。從磁鐵外來看，磁場線是由兩端發出，因此可以當作由兩極的"磁荷"產生。對於實際的磁鐵而言，磁化情形可能不均勻，在靠近兩端處磁場還會更弱一些。

(四) 以高斯方法測量磁鐵的磁矩和地磁的水平分量:

1. 將磁鐵水平懸吊，使它的平衡位置沿南北方向，形成一個扭擺。當磁鐵轉動一個小角度，和地磁的水平分量 B_h 夾 θ 角時(參看圖4)，磁鐵所受的力矩為:

$$\tau = \mu \times B_h$$

$$\tau = -\mu B_h \sin \theta$$

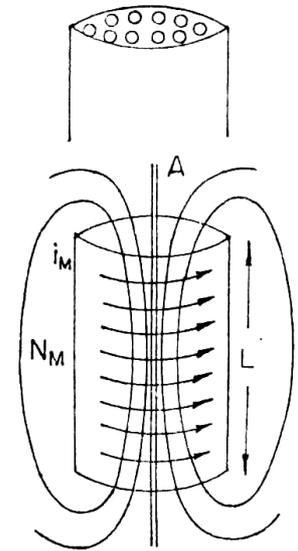


圖3 棒狀磁鐵的磁場線

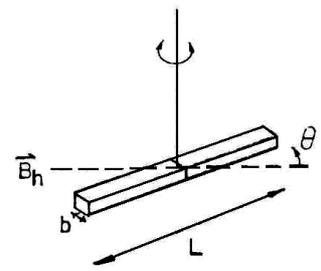


圖4 以磁棒作為扭擺測量 μ/B_h 值

若 $\theta < 10^\circ$ ，以 θ 代替 $\sin\theta$ 誤差小於 1%，因此上式可以寫為：

$$\tau \approx -\mu B_h \theta$$

由力矩方程式知：

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

其中 I 為磁鐵的轉動慣量，可以由磁鐵的質量 m ，長度 L 和寬度 b 計算而得 $I = 1/12m(L^2 + b^2)$ ，兩式合併得到運動方程式：

$$d^2\theta/dt^2 + (\mu B_h / I)\theta \approx 0$$

此扭擺作簡諧振盪，角頻率為：

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu B_h}{I}}$$

因此 μB_h 與週期的關係式為：

$$\mu B_h = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (8)$$

2. 按圖 5 方式將磁鐵沿東西方向放置並對準指南針，指南針因磁鐵的磁場 B 的影響而偏轉一個角度 θ ，則

$$\frac{B}{B_h} = \tan\theta \quad (9)$$

按照原理(二)，可以用“磁荷”方式計算 B

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L} \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+L)^2} \right] \quad (10)$$

把(10)式代回(9)式內，整理後得到：

$$\frac{\mu}{B_h} = \frac{4\pi L \tan\theta}{\mu_0 \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+L)^2} \right]} \quad (11)$$

由(6)式和(9)式，就可以解出 μ 和 B_h 。

(五) 磁場線：

場線的意義是：場線上任何一點的切線方向，即是此處場的方向。場線的微分方程式很容易寫出，卻很難解出(除非用數值解法)。不過，磁鐵的磁場線卻很容易用實驗方法畫出來。

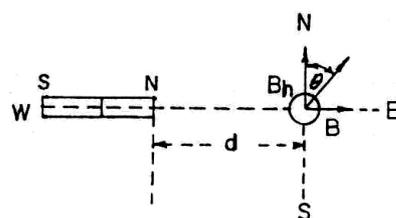


圖 5 測量 μ/B_h 值的裝置圖

將磁鐵固定在大張壁報紙上，壁報紙不要移動。將小型指南針放在磁鐵端點附近，沿著指針的方向慢慢移動，指南針移動的軌跡就是磁場線。其實磁鐵附近的磁場是由磁鐵的磁場和地磁合成的。在靠近磁鐵的地方，磁鐵的磁場較強，磁場線從磁鐵N端出發回到S端，只是有些變形。在離磁鐵較遠的地方，磁場線並不回到磁鐵的另一端，而是跑到地磁的南、北極去了，如圖6所示。在 p, p' 兩點附近的區域，磁鐵產生的磁場和地磁的水平分量互相抵消，指南針在這兩個區域指向不明，很難畫出磁場線。可以從前面的方法得到 μ ，計算磁鐵在 P, P' 兩點產生的磁場，按查一下其大小是否和 B_h 相等而且方向相反。

* (六) 磁鐵本身的磁場線：

如何畫出不受地磁影響的磁場線呢？在桌上沿地磁方向固定一條線，每次指南針要前進時，旋轉壁報紙（磁鐵固定在壁報紙上，當然會跟著一起轉）使指南針方向和地磁方向一致，如此則地磁不會影響指南針的指向，可以畫出不受地磁影響的磁場線。

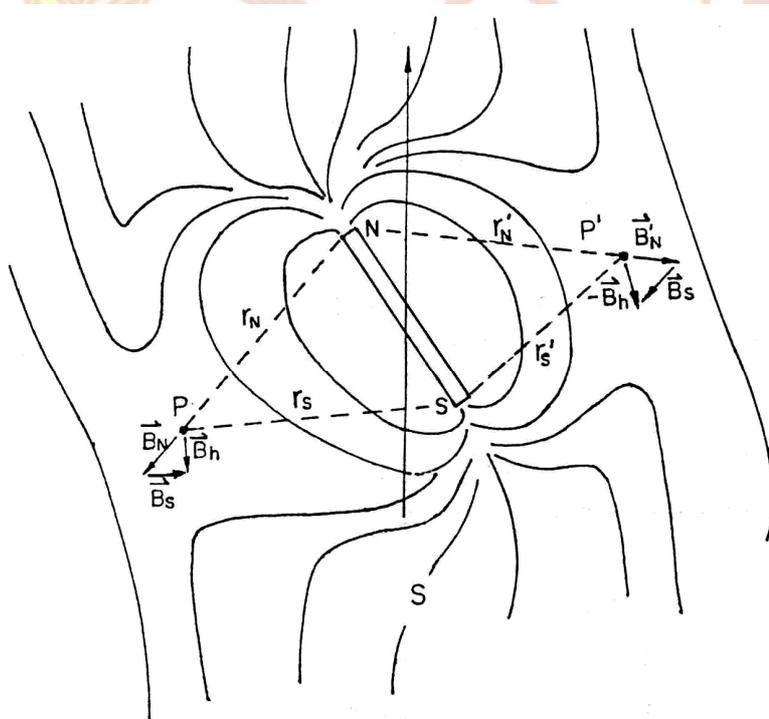


圖6 描繪磁棒與地磁合成的磁力線

三、步驟:

4 (一) 以高斯方法測量磁鐵的磁矩和地磁的水平分量:

1. 測量磁鐵的質量 m 、長度 L 、寬度 b ，計算慣性矩。
2. 用細棉線(線愈細愈好，能儘量使地磁的力矩為唯一的恢復力矩)將磁鐵水平懸吊在木盒子內。調節木盒子的方向和水平螺絲，使磁鐵可以自由地作小角度扭轉。
3. 等磁鐵的擺幅小於 10° 時，用馬表測週期 T 。最好測10個週期的時間後取平均值。
4. 將慣性矩的 I 和週期 T 代入(6)式，計算磁矩 μ 和地磁水平分量 B_h 的乘積。
5. 用大型三角板或L型尺作圖，將磁鐵沿東西方向放置並對準指南針，使指南針偏轉一個角度 θ 。調節磁鐵和指南針的距離 d ，使 θ 介於 $20^\circ \sim 30^\circ$ 之間。測量 d 和 θ 。代入(9)式，計算 μ/B_h 值。
6. 由步驟4和5的結果解出磁矩 μ 和地磁的水平分量 B_h 。

(二) 畫磁場線:

1. 將大張壁報紙固定在桌上，將磁鐵固定在壁報紙的中央，方向和地磁約夾 45° 。
2. 將指南針(愈小愈好)放在磁鐵的N端附近，使指南針沿著指針的方向慢慢移動，用鉛筆點出移動的軌跡，就是一條磁場線。
3. 如此畫出至少10條磁場線。
4. 找出磁鐵的磁場和地磁互相抵消的點(在這個點，因為磁場為零，指南針會指向任意方向，轉動指南針一試即知)。量出這個點和磁鐵N端的距離 r_N 和磁鐵S端的距離 r_S 。由 r_N 、 r_S 和前面求出的磁矩 μ 計算磁鐵在這點所產生的磁場，驗證是否和地磁的水平分量 B_h 大小相等方向相反?

*(三) 描繪不受地磁影響的磁場線

1. 利用兩支圖釘將一條線沿地磁方向架好。

2. 利用壁報紙背面作圖。磁鐵固定在壁報紙的中央。
3. 將指南針放在磁鐵的N端附近，每次要移動指南針之前，旋轉壁報紙(磁鐵當然一起轉),使指南針和地磁方向一致(即和線的方向一致)，如此則指南針移動的方向不受地磁方向影響，因此可以畫出磁鐵本身的磁場線。

四、問題:

1. 由你的實驗結果，計算磁鐵內部的磁場(應事先量得磁鐵的厚度)。
2. 由你的實驗結果，計算磁鐵的中垂線上距離磁鐵10cm 處的磁場，參看圖7。

五、參考資料:

1. J. D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd ed., (美亞，台灣版，1985) §5-6, p.180~p.184。
2. R. K. Wangsness: Electromagnetic Fields, 2nd ed., (John Wiley & Sons, 1986) Chap.19, exercise 19-5。

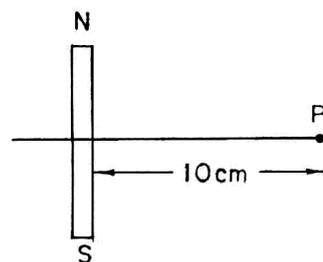


圖 7