圓周運動

一. 目的:

學習使用圓盤氣墊桌,並探討有關圓周運動的各種性質。

二、原理:

假設有一個質點在x-y平面上作運動(圖1),其位置向量以r表示，則速度為

$$v=\frac{dr}{dt} \qquad (1)$$

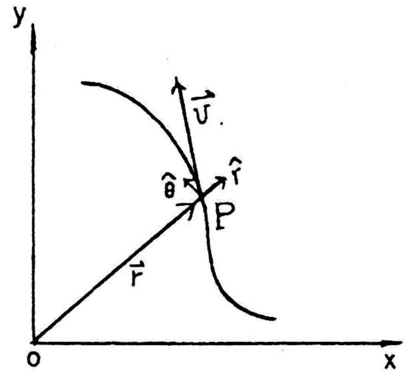

圖 1

由於質點的運動限定在x-y平面土，速度、加速度也都限定在同一平面上，因此可以用極平面坐標方式表示其運動方程式。在平面上的任何向量A均可表示為

$$\mathrm{A}=A_r\hat{r}+A_\theta\hat{\theta} \qquad (2)$$

其中$\hat{r}$和$\hat{\theta}$分別為沿半徑方向，和沿圓孤循逆時針方向的單位向量。由於$\hat{r}$和$\hat{\theta}$的方向會隨著質點的位置向量而改變，因此$d\hat{r}/dt$和$d\hat{\theta}/dt$均不為零，而且

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

(3)

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\hat{r} \qquad (4)$$

如果把$\mathrm{r}=r\hat{r}$代入(1)式做微分,會發現速度向量有$\hat{r}$方向和$\hat{\theta}$方向兩個分量，即

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}(r\hat{r})=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

把速度向量再對時間微分，加速度也有沿著$\hat{r}$方向和$\hat{\theta}$方向兩個分量

$$\mathrm{a}=\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{r}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left[2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta}$$

如果質點的速率比光速小很多，由牛頓第二定律可知:
此物體所受的力為

$$F = ma$$

$$= m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + m\left[2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta} \quad (5)$$

以下我們只討論質點作圓周運動的情形，因為r的大小不會隨時間而變，在(5)式中$dr/dt = 0$，$d^2r/dt^2=0$，(5)式變成

$$F = ma$$

$$= \left[-mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[mr\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta} \quad (6)$$

(6)式右邊的第一項$[-mr(d\theta/dt)^2]$ 為加速度a 沿半徑方向的分量，指向曲率中心，因此稱為向心加速度；第二項則為質點具有角加速度時之切線加速度。對於作等速圓周運動的質點而言，r為定值，$d\theta/dt$=常數，(6)式中第二項為零。所以，加速度為

$$a = \left[-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r}$$

式中負號代表加速度指向圓心。定義角速度$\omega \equiv d\theta/dt$，(7)式亦可寫作

$$a = (-r\omega^2)\hat{r}$$

由於ω是向量r在單位時間內所掃過的角度(以rad/s為單位)，質點的運動週期為$T = 2\pi/\omega$，將上式中之以T的關係式代入得

$$a = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\hat{r}$$

又因$v = r(d\theta/dt)$，(7)式也可以表示為

$$a = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

而物體所受到的向心力則為

$$F = -m\frac{v^2}{r}\hat{r} = -m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\hat{r} = -m\omega^2\hat{r} \quad (8)$$

(一) 圓周運動的應用(a) :拋物線形軌道

圖2表示一個平滑曲線軌道，軌道上有一凹槽可置鋼球。假設軌道以角速度ω繞鉛垂的對稱軸旋轉，而且球可以停在軌道上的任何位置，則軌道的形狀如何?圖3表示鋼球所受的兩個力，一個是軌道對球所施的正向力N。一個是球所受的重力mg。這兩個力的合力就是鋼球作圓周運動所需的向心力$mr\omega^2$，方向在圓周所處的水平面上指向圓心。因此，可以在圖3做一個簡單的座標，以分量方式分析力的條件，得到

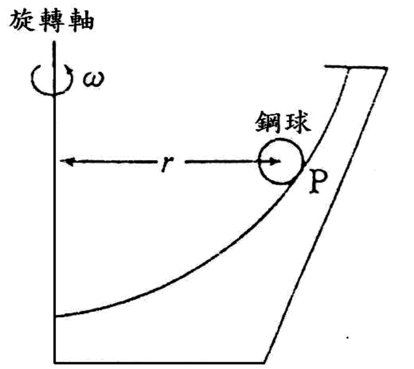

圖 2

$$N\sin\theta = mr\omega^2$$
$$N\cos\theta - mg = 0$$

兩式相除得

$$\tan\theta = \frac{r\omega^2}{g} \qquad (9)$$

由於$\tan\theta$是曲線在P點之切線斜率dy/dr，因此

$$\frac{dy}{dr} = \tan\theta = \frac{r\omega^2}{g}$$
$$\frac{g}{\omega^2}dy = rdr$$

兩邊積分，便可得到

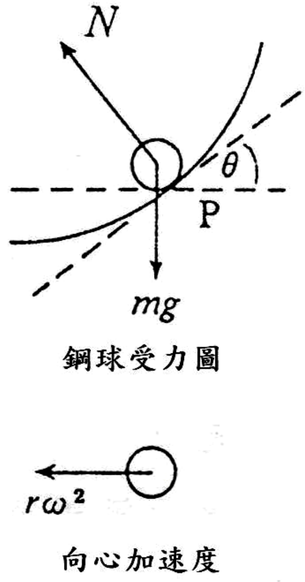

圖 3

$$\frac{g}{\omega^2}(y-\alpha) = \frac{1}{2}r^2$$

或

$$y = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + \alpha \qquad (\alpha\text{為常數}) \ (10)$$

這是一個拋物線方程式，表示若要使鋼珠可以停留在軌道上任意位置，軌道必須設計成拋物線形狀。如果在選擇座標時以軌道的最低點為原點，則拋物線形軌道可表示為$y = (\omega^2/2g)^{1/2}$。一旦製好一個拋物線形狀的軌道，其方程式可能為$y = Ar^2$，在轉速ω滿足$\omega = (2gA)^{1/2}$時，鋼球便可在軌道上任意位置停留，而且，ω與r及m均無關。 轉速過高或過低時，鋼球便不能停在軌道上。$\omega < (2gA)^{1/2}$時鋼球會向下滑，最後停在軌道最低點；

$\omega > (2gA)^{1/2}$時鋼球會一直滾到軌道的最頂端(如果軌道有極限的話)。

因為$g = \omega^2/2A$，而且A值已知(表示軌道形狀已知)，所以，只要測得鋼球正好要往上滾那一瞬間(或正要往下滾時)的ω值，便可以求出重力加速度 g值。

(二)圓周運動的應用一(b)：旋轉的水面

圖4是一個扁平的長方形水槽，當水槽繞其鉛垂的對稱軸旋轉時，水面會變成什麼樣子呢?假設 $f(x,y)$ 是表示水面形狀的函數(參看圖5)，在x位置取一小體積δV的水，其質量為m (=$\rho\delta$V，ρ為密度)，這一部份水所受的重力為

$$F_g = mg(-\hat{y}) \qquad (11)$$

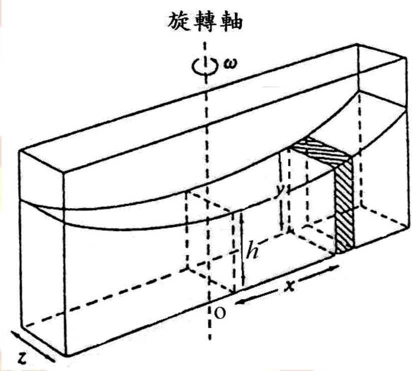

圖 4 扁平長方形水槽

它做圓周運動所需的向心力F_c，是正向力N與重力F_g的合力，且

$$F_c = mx\omega^2(-\hat{x}) \qquad (12)$$

由於正向力與切線方向垂直，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_c}{F_g} = \frac{x\omega^2}{g} \qquad (13)$$

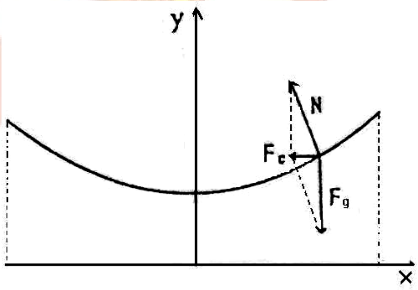

圖 5

積分之後得到“水面"之方程式為

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + \text{constant} \qquad (14)$$

令x = 0處，液體高度為$y = h$，得到

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + h = Ax^2 + h$$

其中$A = \omega^2/2g = 2\pi^2/T^2 g$ 。因此水面為一拋物面，而此處之x實際上便是(10)式中的半徑r。

這裡的導證過程假設水槽為扁平的長立方體，而且轉軸與對稱軸重合。實際上如果是一個圓柱形水槽，以其對稱軸為轉軸，(14)式仍然成立，但方程式要修改為

$$y = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + \text{constant}$$

三、儀器與配件:

圓盤氣墊桌，電源供應器，吹風馬達，旋轉架，拋物線形軌道，鋼球兩個，扁平長方形水槽，弧形水槽，砝碼若干，滑車，250 g圓柱體2 個。

【注意事項】

圓盤氣墊桌的主要結構是兩個圓盤。上圓盤經由馬達帶動，可作固定頻率的轉動，稱為旋轉盤。下圓盤有許多小孔，可以由吹風馬達供應空氣，將上圓盤吹起，使它在不受摩擦的情況下轉動。使用空氣桌時，必須特別注意下列事項:

1.實驗當中，必須先把風送入空氣桌內，才可以把旋轉盤放上去，而且要在旋轉盤拿掉後才可以關掉吹風馬達的電源。
2.把儀器固定在旋轉盤上時， 切記要運用適當長度的螺絲。儀器鎖緊後，一定要檢查，螺絲不可以突出於轉盤的下方。
3.旋轉盤取下後，放置時必須上下顛倒，也就是有白線的那一面朝下，以免損壞底面。
4.驅動輪轉動後，旋轉盤會循順時針方向轉動，此時千萬不可施加逆時針方向的力，以免損壞馬達。

四、步驟:

(一) 週期與向心力的關係:

1.依圖6方式用兩根短螺絲將支架固定在旋轉盤上[#1]，在上方的鐵桿上放置一個較大的滑動體A，並在靠近圓心側固定一個環軸B，使滑動體不致滑近圓心。將滑動體A綁上一條繩子，繞過轉輪後，掛上一個砝碼架[#2]，注意砝碼需要正好在旋轉盤圓心的正上方。並調整橡皮筋的位置，使它剛好接觸到砝碼架的底部，以便觀察砝碼架是否上昇。
2.開動電源供應器C。藉由驅動輪帶動轉盤，逐漸增加電壓，以增加轉盤的轉速[#3]。當轉速大到滑動體A剛好開始向外移動時，便停止增加電壓。測量此時轉盤的週期T[#4]及繩上所懸掛的質量。
3.改變砝碼的質量，重覆前面的步驟。

#1 螺絲要鎖緊，以免支架晃動。

#2 繩子不可太長(為什麼?)。

#3 電源供應器上有兩個輸出電壓的控制鈕，它們是等效的，而且對輸出電壓具有相乘的效果。

#4 最好測量轉盤轉動數圈所需的時間，再取平均值。

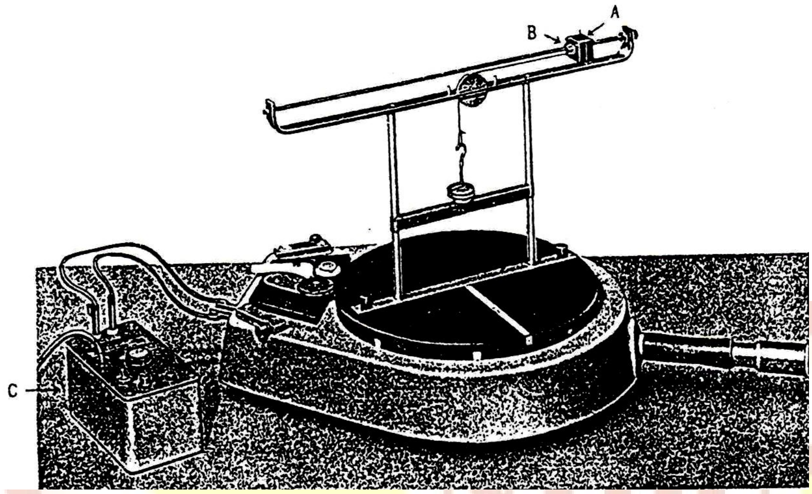

圖6

4.作出力對T^{-2}的關係圖，是否成一直線?若是直線不通過原點，代表什麼意義?

(二)週期和軌道半徑的關係:

1.裝置如圖6但滑動體A改用較小的那一個。在砝碼架上加上三個10g的砝碼。按照步驟(一)的方式，增加轉盤的轉速，直到滑動體A向外移動，測量此時轉盤的週期。

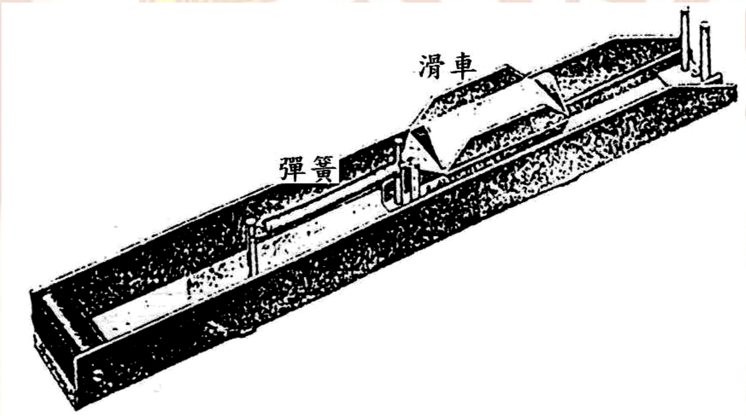

圖7 滑車及底座。

2.改變滑動的旋轉半徑，重覆前面的步驟。

3.在對數紙上畫出半徑對週期的關係圈。

(三) $F = 4\pi^2 rm / T^2$ 的驗證:

1.用長螺絲將圖7中的滑車固定在旋轉盤上，將兩個250g的圓柱體橫放在滑車內。開動驅動輪，慢慢增加轉速，直到滑車恰好碰到軌道的一端為止。測量此時旋轉盤的週期。

2.取下旋轉盤，測量當滑車拉到軌道一端時，滑車加圓柱體的質量中心到圓盤中心的距離r及滑車加圓柱體的總質量[#5]。計算向心力，並以此為計算值F_c。

3.直接用彈簧秤量把滑車拉到頂端所需的力F_e[#6]，和計算值F_c比較。

#5 滑車用底座約為400g，在固定端有一圓柱形重錘，大約360g，滑車約80g，砝碼約10g。必要時可拆開稱出各部份質量。

#6 可以自行設計其它量彈簧拉力的方法。

4.改變質量m，重覆前面步驟數次，比較所得的F_c 和F_e，並討論誤差的由來。

(四)在繞著鉛垂對稱軸轉動平滑拋物線形軌道上，鋼球的運動情形:

1.如圖8裝置，把直徑19 mm的鋼球放在軌道上，開動驅動輪，並逐漸增加轉速，當轉速增加到某一程度時鋼球會停在軌道的任何一點上(為什麼?)。

2.更換不同質量的鋼球，重覆步驟1。是否在相同的轉速時，都有同樣的現象發生?請提出你的解釋。

3.把軌道的輪廓描繪在方格紙上(如何確定你的方格紙y軸與軌道對稱軸重合?)，求出其軌跡方程式 $y = Ax^2+h$，並計算出A值。

4.依照$A = \omega^2 / 2g$ (國立清華大學校園內的g值為978.9239 cm/s^2)算出A值，並與步驟3所得作比較。

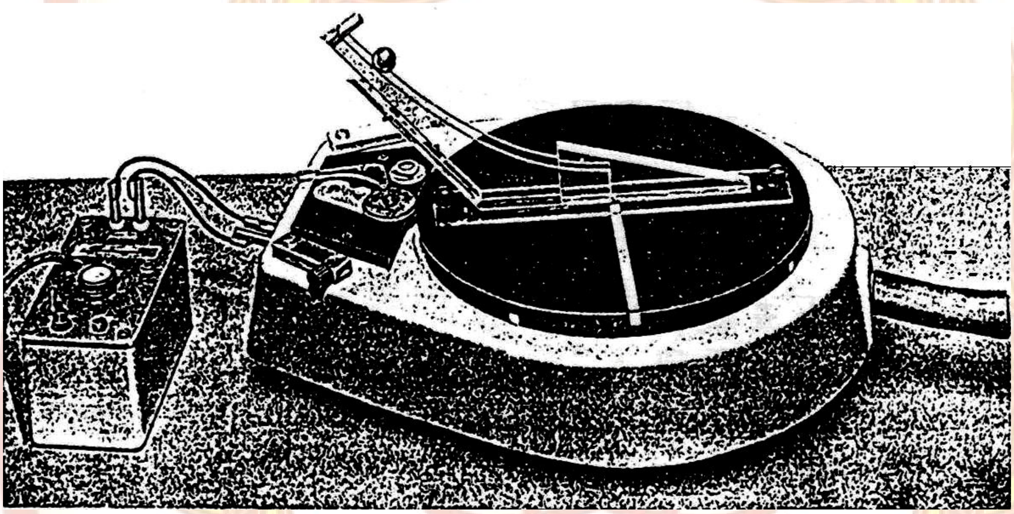

圖8拋物線形軌道

(五)旋轉中的水面:

1.把扁平的長方形水槽用短螺絲固定在旋轉盤的直徑上，
並在水槽內加入約1/3的水[#7]。

#7 可在水中加入染料以便觀察。

2.驅動旋轉盤，逐漸增加其轉速，觀察水面隨轉速而變化的情形。選擇一條你認為最好看的曲線，測量此時轉盤轉數圈所需要的時間，同時，把所看到的曲線畫在方格紙上[#8]。以水位的最低點為原點，算出 $y = Ax^2$ 式中的A值。

#8 你可以用任何的方法畫出所看到的曲線，但必須以不破壞儀器為原則。

3.直接由轉速推算出A值並與步驟2所得者作比較。

4.改用弧形水槽，觀察轉動時之水面形狀。

五、問題:

1.在原理(一) (即步驟(四))部份的推導過程中，曾假設鋼球為一質點，而得到軌道形狀應為一拋物線。若是鋼球大小不可忽略，則製作時，軌道形狀仍然可以做成拋物線嗎?試討論之。(提示:一條拋物線上每一點沿法線方向向內平移一固定距離R之後是否仍為拋物線?)

2.步驟(五)所使用水量的多寡，會影響實驗的進行嗎?為什麼?

3.步驟(三)中$F = 4\pi^2 rm / T^2$之驗證，把滑車加上砝碼當作全部質量一起集中在質量中心，你認為合理嗎?為什麼?你如何決定質量中心的位置?

六、參考文獻:

1.李怡嚴:大學物理學，第一冊，十五版(東華書局，民國76年10月), §1-5~§1-6, p.131~ p.145。

2.D. Halliday & R. Resnick: Fundamentals of Physics, extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, In c., 1988), §4-7, p.62~p.64。