剛體轉動

一、目的:

觀察空氣墊迴轉儀的進動和章動現象，以增加對剛體轉動的了解。

二、原理:

(一)儀器:

空氣墊迴轉儀包括一個銅球和底座。底座有一個半球形凹槽，用以容納銅球。高壓氣流從凹槽中央噴出，使銅球浮起，因此銅球轉動時受到的摩擦力極小。一個吹風機可以同時供應兩組儀器所需的氣流。不論是否兩組同時使用，都要把銅球放在凹槽內，否則氣流從空著的凹槽內大量噴出，會減低使用組氣流的壓力。球和凹槽必須極為密合，因此要儘量避免它們受撞擊。取球時，用雙手捧住，輕置凹槽內。切勿從主軸提起，以免滾落或磨損表面。起動銅球，可以用拇指和食指捻轉主軸末端幾次，轉速可達800rpm(每分鐘800轉)。因主軸螺紋方向的關係，只能順時針方向轉動，逆時針方向轉動會使主軸鬆脫。

銅球轉速不高時，可以用馬表測量轉動數圈所需時間，直接算出轉速。轉速較高時，則需使用光電式轉速計。將轉速計的光線射到反光片上，調節方向，使反射光循原路回到轉速計，就可以在表上讀出轉速。反光片一半是黑色，用以吸光，另一半則可反光。銅球每轉動一週，轉速計接收到的光線

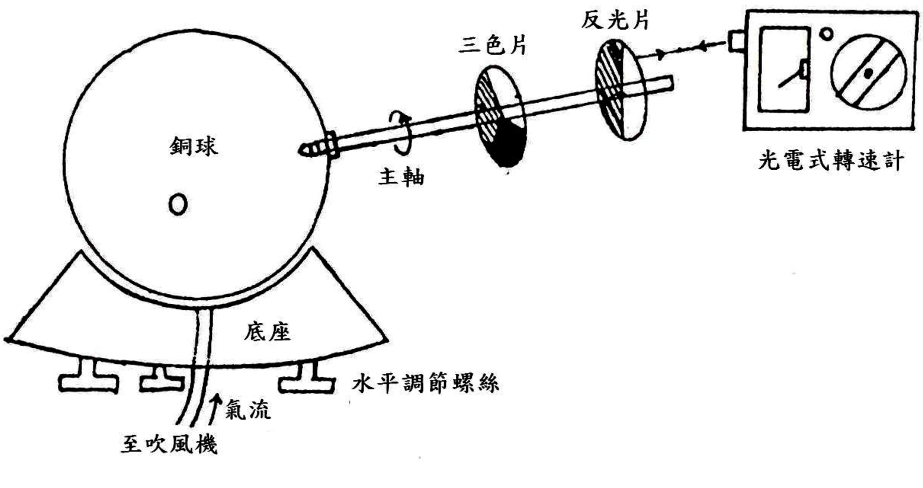

圖1空氣墊迴轉儀裝置圖

強度也變化一週期，內部的電路依光線變化的頻率而定出讀數(參看圖1)。轉速計的使用，須經一段時間的練習才能熟練。

進動的頻率較慢時，可以用馬表直接測量週期再換算。不過銅球轉速在一分鐘之內就會降低1/10，可以測1/4週期的時間換算。

因為銅球和主軸的形狀不很規則，轉動慣量I，轉動慣量差ΔI (指因主軸$\hat{z}$方向不對稱所造成的$I_x \neq I_z$)，以及重力矩等均不易計算，只能大約估計。兩支主軸(圖2)尺寸不同，茲將這些值分列如下:

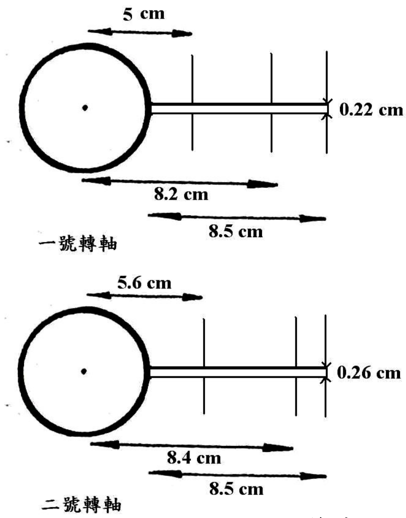

圖 2 兩支主軸的直徑尺寸等基本數據。

	I	ΔI	mgr
一號轉軸	1326 C.G.S	67 C.G.S	5968 C.G.S
二號轉軸	1326 C.G.S	88 C.G.S	8094 C.G.S

(二) 剛體的主軸:

繞一個固定軸轉動的剛體，有一個和平移動中的質量對應的量，稱為轉動慣量(moment of inertia)

$$I = \int \rho r_\perp^2 dV \qquad (1)$$

$r_\perp$的定義如圖3所示。角動量沿轉軸的分量為

$$L = I\omega$$

轉動的動能為

$$T_{rot} = 1/2 I\omega^2$$

可是，一個慣性矩不足以描述一個可以繞任意軸轉動的剛體。對於一般形狀的剛體，轉動慣量是一個3×3的張量$[I_{ij}]$。

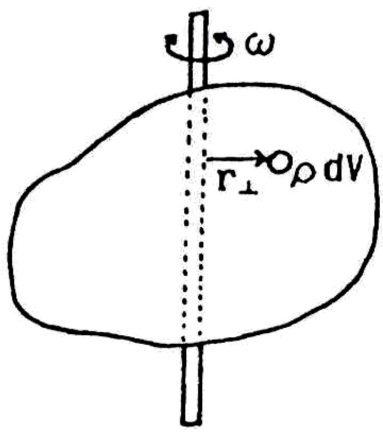

圖 3

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}{}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right]$$

這時角動量各分量L_i為

$$L_i = \sum_j I_{i,j} \omega_j$$

轉動的動能

$$\mathrm{T_{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i I_{ii} \omega_i^2$$

這些式子看起來複雜多了。可是，我們總可以找到一組坐標軸，使慣性張量對角線以外的量變零。於是慣性張量變成只有三個分量，即I_{11}、I_{22}和I_{33}。為了方便，我們把體坐標定義成x、y、z方向，把三個轉動慣量稱為I_x、I_y 和I_z，而得到較簡潔的表示式:

$$L_x = I_x\,\omega_x$$

$$L_y = I_y\,\omega_y$$

$$L_z = I_z\,\omega_z$$

$$T_{rot} = 1/2(I_x\omega_x^{\,2} + I_y\omega_y^{\,2} + I_z\omega_z^{\,2})$$

(三)剛體的運動方程式－歐拉方程式(Euler’s equation)：

轉動應遵守力矩方程式

$$\frac{dL}{dt} = \tau \qquad (2)$$

在這個式子裡，角動量的變化率是在慣性坐標系裡觀察到的。可是為了容易表達，我們必須把角動量的分量投影到固定在剛體上的主軸。剛體轉動時，固定在剛體上的主軸也跟著轉，因此它必然不是慣性坐標系。可以，我們在微分角量L時，不但要考慮角速度ω的分量的變化，還要考慮剛體主軸的轉動。

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_x\omega_x\hat{x} + I_y\omega_y\hat{y} + I_z\omega_z\hat{z})$$

$$= I_x\frac{d\omega_x}{dt}\hat{x} + I_x\omega_x\frac{d\hat{x}}{dt} + I_y\frac{d\omega_y}{dt}\hat{y} + I_y\omega_y\frac{d\hat{y}}{dt} + I_z\frac{d\omega_z}{dt}\hat{z} + I_z\omega_z\frac{d\hat{z}}{dt}$$

因為剛體以ω的角速度在轉，沿各軸方向的單位向量的變化率為

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \omega \times \hat{x} = (\omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}) \times \hat{x}$$

$$= -\omega_y\hat{z} + \omega_z\hat{y}$$

同理，

$$\frac{d\hat{y}}{dt}=-\omega_z\hat{z}+\omega_z\hat{x}$$

$$\frac{d\hat{z}}{dt}=-\omega_x\hat{y}+\omega_y\hat{x}$$

將這些式子代回(2)式，整理後把各分量列出，可得

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt}-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z=\tau_x$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt}-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x=\tau_y$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt}-(I_x-I_y)\omega_x\omega_y=\tau_z$$

這就是歐拉方程式

(四)剛體轉軸的自由進動：

現在考慮一種最簡單的情形。圖四繪示迴轉儀的銅球放在半球凹槽內，因此球心的位置是固定的。但是因為銅球連著一支主軸，質量中心位於主軸上離球心 r 的地方，而不在球心。因此，整個系統(指球和主軸)所受到的重力力矩為

$$\tau = mgr\sin\theta$$

θ是主軸和鉛錘方向的夾角。τ的方向垂直紙面內向(參看圖4)。因為迴轉儀具備z軸對稱，所以$I_x=I_y$。不過，有了主軸之後I_x比I_z會稍大一些(即ΔI)。

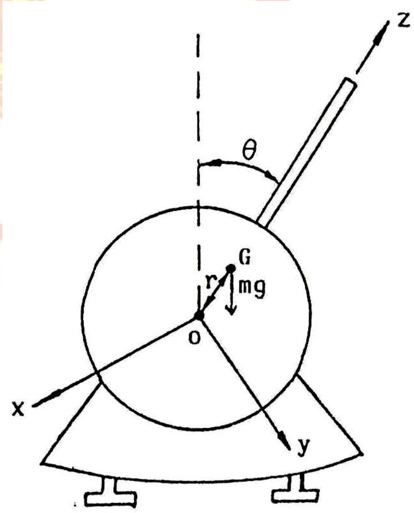

圖 4

$$I_x=I_y=I+\Delta I \quad ; \quad I_z=I$$

假設θ非常小，τ→0，迴轉儀可以當作不受力矩，則歐拉方程式為

$$(I+\Delta I)\frac{d\omega_x}{dt}-\Delta I\omega_y\omega_z=0 \qquad (3)$$

$$(I+\Delta I)\frac{d\omega_y}{dt}-\Delta I\omega_z\omega_x=0 \qquad (4)$$

$$I\frac{d\omega_z}{dt}=0 \qquad (5)$$

由(5)式，可以看出ω_z不隨時間而變。將(3)式對時間為分，再從(4)式把ω_y代入可得，

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2}+\left(\frac{\Delta I}{I+\Delta I}\omega_z\right)^2\omega_x=0$$

並選擇適當的起始條件，可得

$$\omega_x = A\cos\Omega t \tag{6}$$

其中

$$\Omega=\frac{\Delta I}{I+\Delta I}\omega_z \tag{7}$$

將(6)式代回到(3)式，得到

$$\omega_y = -A\sin\Omega t$$

可見ω繞著主軸進動，其角頻率為Ω。由z軸向銅球俯視，Ω的方向是順時針方向(若$\Delta I<0$，則變成逆時針方向)。因為三個軸的慣性矩不完全相等，角動量L和ω並不平行。為了維持角動量和能量守恆，L的方向不能改變(沿z軸)，因此ω繞z軸運動。

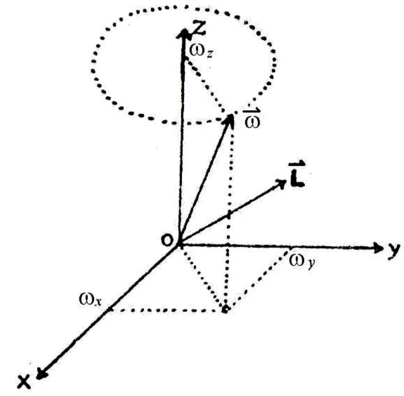

圖 5

欲觀察此現象，可以先使迴轉儀繞z軸轉動。此時因為主軸之一為轉軸，L和ω平行，ω不會進動。然後，已一隻塑膠尺輕拍轉軸末端,使迴轉儀的轉動不只是繞z軸，同時也繞x軸和y軸，即角速度ω具備x軸和y軸的分量。根據前面的公式ω以及Ω的角頻率繞z軸進動。當ω進動到三色片的紅色區域時，其他兩顏色繞著紅色區域外圍旋轉，顏色混淆，我們只會觀察到紅色顯現。當ω進動到黃色區域時，只看到黃色顯現(參看圖6)。因此，看顯現的顏色就知道轉軸進動到那裡。我們可以用馬表直接測量轉軸進動的角頻率Ω。並由顏色表現的次序知道進動的方向。

(五)剛體主軸的偏移:

圖7中，我們以一個小夾子夾住z軸，使迴轉儀失去z軸對稱性，新的主軸因此移向圖7標示的位置。一開始時使剛體繞z軸旋轉，轉軸不在主軸上，而是繞z´軸進動。可觀察到如下之現象:開始時z軸是轉軸，迴轉儀顯得很穩定。等到轉軸進動到其他位置，z軸就繞著它旋轉。過一段時間轉軸回到z軸時，又收復到穩定情況。

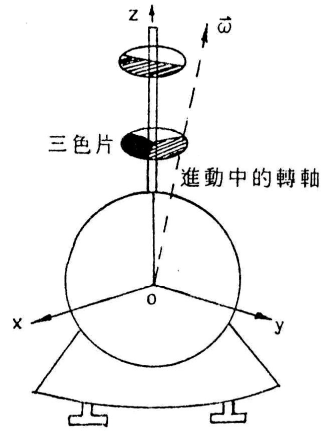

圖6繞主軸的進動

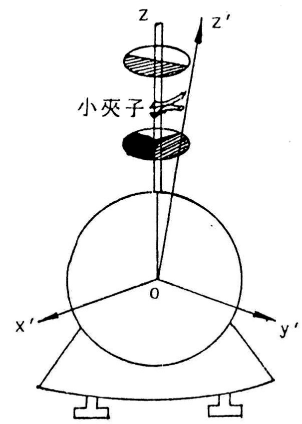

圖7利用大夾子改變主軸的方向，x′,y′,z′為新的主軸方向。

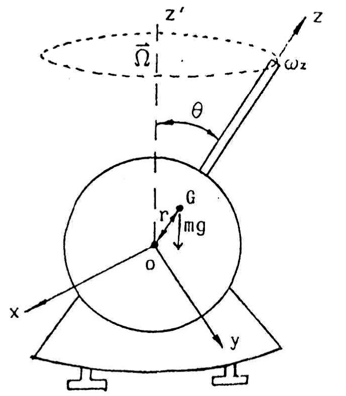

圖8主軸與外力(重力)夾成θ角，引起推動現象。

(六)力矩作用時的等速進動:

使迴轉儀的z軸和鉛錘線(z′軸)夾θ角，同時使它繞z軸以角速度ω_z旋轉，試問迴轉儀的運動為何(參看圖8)?

迴轉儀所受重力力矩為$mgr\sin\theta$,方向垂直紙面指向外。這個力矩會一直垂直於z軸，且大小不變。由力矩方程式$dL/dt=\tau$及 $L=I_z\,\omega_z\,\hat{z}$ 知道:這個系統有一個繞z′軸進動的解，假設其進動角頻率為Ω，則

$$\Omega\times L=\frac{dL}{dt}=\tau \qquad (8)$$

故

$$\Omega\ I_z\omega_z\sin\theta=mgr\sin\theta \qquad (9)$$

$$\Omega\ I_z\omega_z=mgr$$

$$\Omega\ =\frac{mgr}{I_z\omega_z} \qquad (10)$$

這種處理有兩個漏洞:第一，我們先假設$\hat{z}$繞著$\hat{z}'$作等速的進動再去求$\hat{\Omega}$。第二，z軸一開始進動，角動量就不只是$I_z\omega_z$而已了，還會多出其他分量來。第一個問題留待(7)中討論。先討論第二個問題:z軸以角頻率Ω對z′進動，假設在某一瞬間，$\Omega=\omega_z\hat{z}+\omega_x\hat{x}$ ，由於Ω與z軸夾角為θ，而$\omega_z=\Omega\cos\theta$，$\omega_x=\Omega\sin\theta$，因此，總角動量為

$$L = I_x \omega_x \hat{x} + I_z \omega_z \hat{z}$$

$$= I_x \Omega \sin\theta \ \hat{x} + I_z \omega_z \hat{z}$$

現在L繞z軸以Ω角頻率進動。由(8)式得到

$$\Omega = (\Omega \sin\theta \ \hat{x} + \Omega\omega \ \theta \ \hat{z}) \times (I_x \Omega \sin\theta \ \hat{x} + I_z \omega_z \hat{z})$$

$$= -mgr \sin\theta \ \hat{y}$$

化簡後，得到

$$\Omega(I_z \ \omega_z - I_x \Omega \cos\theta) = mgr \qquad (11)$$

我們發現(11)式與(9)式確實略有不同，似乎(9)式還需要做一些修正。不過，這裡r是指質心與球心的距離，目前情況下r非常小，因此$\Omega \ll \omega_z$，(9)式還是可以成立。

(七)章動:

既然方程式容許一個繞z′軸進動的解存在，(9)、(10)式是合理的，只是起始條件必須合乎要求。這裡的要求是一放手，z軸就以Ω的角頻率進動。可是假如我們把z軸從靜止釋放，此時起始條件當然不合上面要求，這時的運動是怎樣的呢?實際上，z軸從靜止釋放時，進動角頻率是漸漸增加的，不可能一下子就到Ω，這段時間內z軸位置會下降。如圖9 所示，z軸到了最低點後又會上升，這種週期性的運動稱為章動。圖9表示三個主軸進動和章動的軌跡，(a)是z軸從靜止釋放，(b)是z軸釋放時有一個前進的進動角頻率，(c)是z軸釋放時有一個反向的進動角頻率的情形。

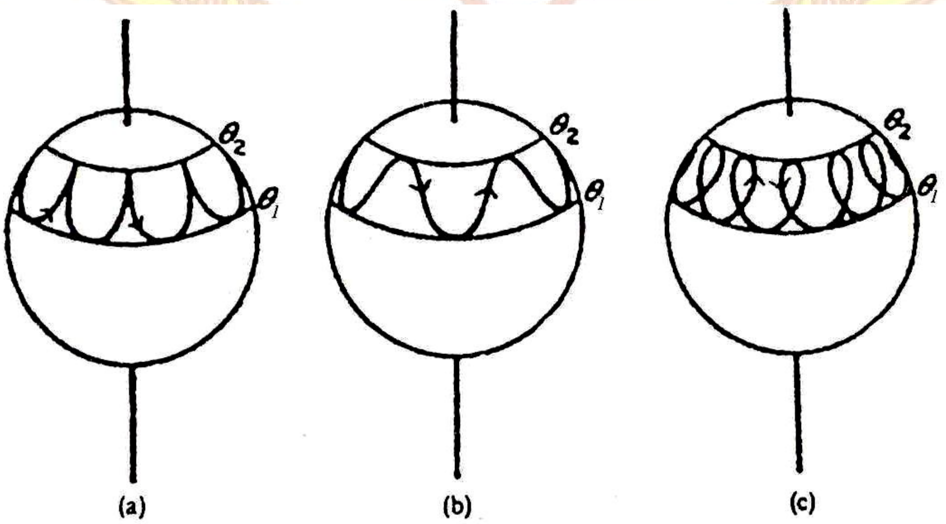

圖9章動時　的頂點所形成軌跡。

當z軸角頻率較高時，章動的幅度會隨時間急速變小。因此，這時章動很容易因摩擦力而消失，只留下進動。進動的角頻率約為

$$\Omega = mgr / I_z\omega_z$$

這個結果又回到(8)式。因此我們知道，在z軸角頻率大時，(六)的處理是合理的。要觀察章動時，z軸轉速不可太大。

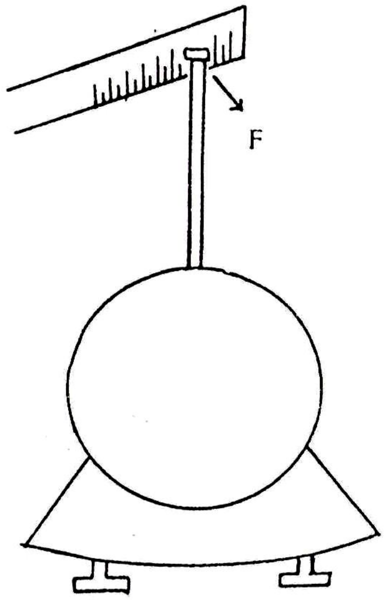

圖 10

三、儀器與配件:

球形槽底座、銅球、粗細主軸各一、吹風機(兩組共用)、轉速計、塑膠尺、小夾子、反光二色片、反光三色片。

四、步驟:

(一)先開吹風機。用雙手捧起銅球，輕輕放到底座的凹槽#1兩組的銅球都要(同時)放入凹槽以免氣流從空的凹槽流失太多。

#1 注意:切不可由主軸提起，以免銅球鬆落。

(二)力矩和進動方向的觀察:

1.將末端附有軸承的主軸轉入銅球的螺絲孔。一手拿住軸承，一手轉動主軸使銅球旋轉。

2.以塑膠尺施一穩定壓力於軸承，觀察主軸運動的情形，如圖10所示。驗證其進動方向是否符合力矩方程式#2。

#2 因螺紋方向的關係，主軸只能順時針方向轉動。逆時針方向轉動會鬆脫。

(三)等速進動的觀察：

1.將主軸換成另一支附有反光片和三色片者。使主軸在水平方向(圖11)。用食指和姆指搓主軸末端，使銅球轉速到達每分鐘幾百轉。

2.放手後即可看到銅球因受到重力的力矩而作等速運動。注意其進動方向，是否合於力矩方程式。

3.用光電式轉速計測主軸的轉速(需要練習一段時間才能熟練轉速計的使用)。轉速可換算成角頻率ω_z。同時由另一同學以馬表直接測主軸進動1/4圓周所需的時間。這段時間可以換算為Ω。

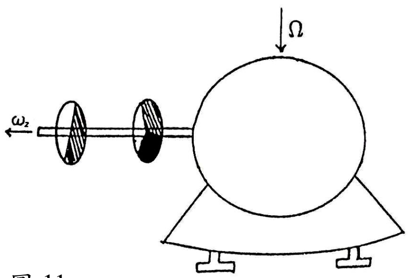

圖 11。

4.改變銅球的轉速，同上述方法測出ω_z和Ω。多取幾個轉速的數據。

5.由(10)式知: $\Omega\omega_z = mgr/I_z = mgr/I$。你的結果如圖2中的數據是否符合?

(四)章動的觀察:

1.將銅球轉速降低，可以觀察到章動。主軸的軌跡隨放手時的狀態而分三種，你能否做出這三種軌跡?

2.將銅球轉速提高,觀察章動頻率提高及振幅減少的情形。

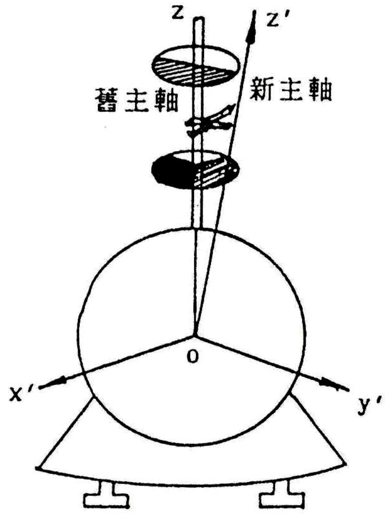

圖 12

(五)轉軸的自由進動:

1.將銅球主軸轉到鉛直方向，如圖12所示。使銅球繞主軸轉動。以塑膠尺輕拍主軸末端，使銅球具有非主軸方向的角速度。可看到三色片的三種顏色輪流顯現。由出現次序推論轉軸進動方向。以馬表測輪流顯現的週期，換算成角頻率Ω。

2.以光電式轉速計測主軸方向的轉速，換算成角頻率ω_z。

由(7)式知:

$$\Omega = \frac{\Delta I}{I + \Delta I}\omega_z$$

故

$$\frac{\Omega}{\omega_z} = \frac{\Delta I}{I + \Delta I} \approx \frac{\Delta I}{I}$$

ΔI和I的值在可以由圖2查出，你的結果符合上式嗎?

3.改用其它轉速，測Ω和ω_z，多取幾組數據。

(六)主軸移動的觀察:

1.以一小夾子夾在主軸上,使主軸向右偏移,如圖13所示。

2.使銅球繞舊主軸旋轉，然後放手。觀察舊主軸運動的情形。

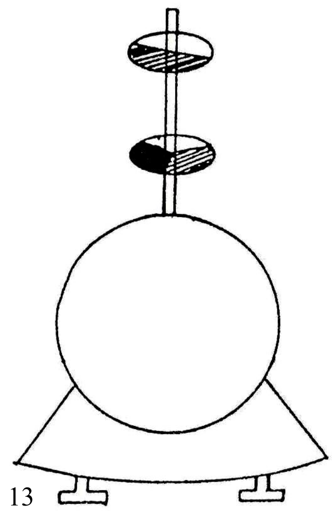

圖 13

五、問題:

六、參考文獻:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles & systems, 2nd ed. (歐亞書局，台灣版，1985), §12.2~§12.4, p360~p.371, §12.8~§12.10, p.387~p.399. 3rd ed. §10-2~§10-4, p.357~p.369, §10-8~§10-10, p.386~p.400.

2. D. Halliday & R. Resnick: Fundamentals of Physics, extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, In c., New York 1988),§12-11, p.272.
3. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics, 2nd ed. vol.1 (美亞、台灣版，1981) §10.6, p.282~p.288.
4. 李怡嚴:大學物理學，第一冊，十五版(東華書局，民國76年), §5-3~§5-7, p.314~ p.342。