

RLC 電路

一、目的：

觀察 RLC 電路的振盪現象以及對正弦電壓的反應。

二、原理：

(一) LC 振盪器：

假設圖 1 的 LC 串聯電路上沒有電阻存在，而且電容器上帶有電量 Q_0 。在 $t=0$ 時，將開關 S 撥到接通 (ON) 的位置，使電路成為通路。由 KVL 定律，在時間為 t 時，電路方程式為

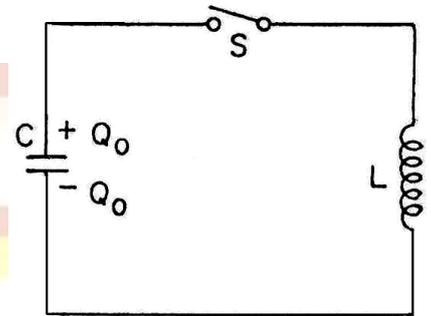


圖 1 LC 電路。

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (1)$$

電容器上的電量 q 為：

$$q = Q_0 \cos \omega_0 t$$

	Simple pendulum	Mass-spring system	LC circuit	K. E.	P. E.
(1) $t=0$				—	■
(2) $t = \frac{T}{8}$				■	■
(3) $t = \frac{T}{4}$				■	—
(4) $t = \frac{3T}{8}$				■	■
(5) $t = \frac{T}{2}$				—	■

圖 2 LC 電路與電壓、彈簧質量系統之比較，及能量轉換情形。

電路上的電流 i 則為

$$i = -I_0 \sin \omega_0 t$$

其中 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 是電路的振盪角頻率， $I_0 = \omega_0 Q_0$ 是電路的最大電流。在這個電路裡，電容器所儲存的能量為 $q^2/2C$ ，電感器所儲存的能量則為 $L_i^2/2$ 。圖 2 表示在 LC 電路上能量轉移的情形，並與力學系統作比較(力學部份請讀者自行練習分析)。

- (1) $t=0$ 時， $q=Q_0$ ， $i=0$ 。因受到電容器上電壓的作用，電感器的電流會逐漸增加。
- (2) $t=T/8$ 時，電流繼續增加，電容器因放電而電壓降低，因此電流增加率就降低^{#1}。
- (3) $t=T/4$ 時，電容器上的電量完全放完，電流增加率為零，這時的電流為最大值。
- (4) $t=3T/8$ 時，電流使電容器反方向充電，電容器上的電壓逐漸增加，電路上的電流則逐漸變小。
- (5) $t=T/2$ 時，電流降到零，電容器的電量達到最大值，但 $q = -Q$ ，此時電荷的正負號與 $t=0$ 時剛好相反。

#1 由(1)式可得。

如此，電路上的能量週而復始地從電場能轉換到磁場能，再從磁場能轉換回電場能。這種情形和簡諧振盪器的能量從彈簧的位能轉換為動能，再從動能轉換回位能的情況相似。

(二) 阻尼振盪器電路：

上面所討論的 LC 振盪電路實際上並不存在，一般的 LC 振盪電路多少都會含有電阻，如圖 3 所示。假設開關未接通時電容器上的電量為 Q_0 ，開關接通後迴路電流為 $i(t)$ ，由 KVL 定律可得

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$$

或

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad (2)$$

由於 $i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ ，把它代入(2)式，可得

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{LC} = 0 \quad (3)$$

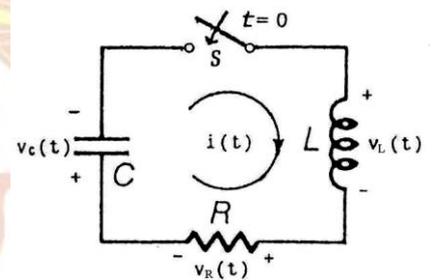


圖 3 實際的振盪電路。

$v_C(t)$ 之通解為

$$v_C(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t} \right] \quad (4)$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, $\beta = \frac{R}{2L}$, A、B 為常數。由於

#2 參考力學振盪實驗。

R、C、L 值的不同，會有三種不同的振盪情形^{#2}。

1. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 時，電路無法振盪 稱為過阻尼(Overdamping)

2. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ 時， $v_C(t)$ 的解為

$$v_C(t) = (A + B t) e^{-\beta t}$$

其中 A、B 為常數。這種情形稱為臨界阻尼(Critical damping)；

3. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 時， $v_C(t)$ 的解為

$$v_C(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

這種情形稱為次阻尼(Underdamping)。

圖 4 是在上述三種 RLC 條件下。 $v_C(t)$ 隨時間變化的情形。

(三)RLC 電路對正弦電壓的反應(強迫振盪)：

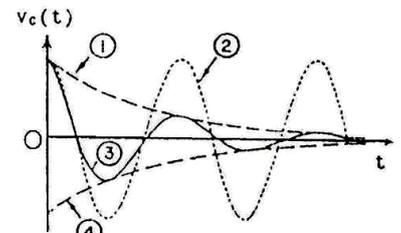
圖 5 是以正弦電壓驅動的 RLC 串聯電路。電路的總阻抗為 $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ ，迴路電流 $i_C(t)$ 為

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{V_m e^{j\omega t}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \right] \\ &= I_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5)$$

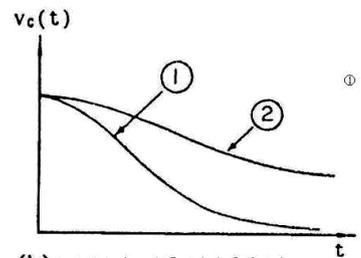
其中

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (6)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (7)$$



(a) 次阻尼振盪: ① $Ae^{-\beta t}$ ② $\beta=0$ ③ $\beta=0.2\omega$ ④ $-Ae^{-\beta t}$



(b) 阻尼過大時，電壓不會有震盪現象：
① 臨界阻尼， $\beta^2=1/LC$
② 過阻尼， $\beta^2>1/LC$

圖 4 RLC 電路之 $V_C(t)$ 圖。

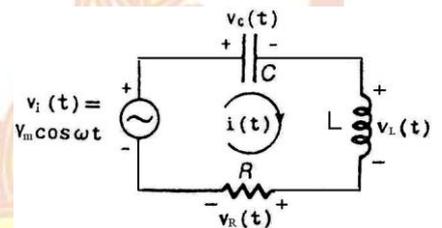


圖 5 RLC 串聯電路。

從(5)-(7)式可以看出，RLC 串聯電路有如下的性質：

1. 電路總阻抗：圖 5 電路的總阻抗 Z 為

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

阻抗的大小為

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

圖 6 表示電路阻抗值隨 ω 而變化的情形。

2. 電流振幅：因為

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

；所以，當 $\omega L - 1/\omega C = 0$ 時， I_m 有極大值 V_m/R ，電路處於共振狀態，這時 $v_C(t)$ 的頻率 $\omega_0 (= 1/\sqrt{LC})$ 稱為此 RLC 串聯電路的自然共振頻率。圖 7 表示 $I_m \omega$ 隨而變化的情形。

3. 電壓方面：在圖 5 的電路中，各元件的電壓如圖 8 所示。電阻器上的電壓 $v_R(t)$ 為

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R_i(t) \\ &= RI_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_{Rm}(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

同理，電容器和電壓器上的電壓 $v_C(t)$ ， $v_L(t)$ 分別為

$$\begin{aligned} v_C(t) &= V_{Cm} \cos \left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2} \right) \\ v_L(t) &= V_{Lm} \cos \left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

當 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 時，電路呈共振狀態， $I_m = V_m/R$ ，因此 $V_{Cm} = V_{Lm} = (V_m/R)\sqrt{L/C}$ 如圖 8 中的共振情形 ($\omega = \omega_0$)，這時候 $v_C(t) + v_L(t) = 0$ ， $v_R(t) = v_i(t)$ ，且 $V_{Rm} = V_m$ 。值得一提的是 V_{Lm} 與 V_{Cm} 達到最大值的頻率 ω_L 和 ω_C 與 ω 並不重合。

圖 8 出現 V_{Cm} 和 V_{Lm} 大於 V_m 的情形，似乎有些奇怪，雖然 KVL 定律為

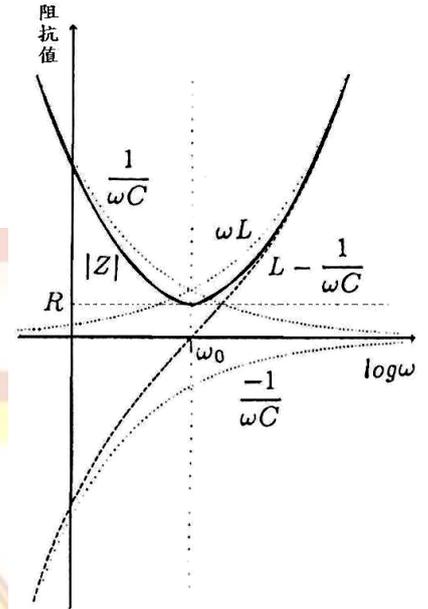


圖 6 阻抗值隨 ω 變化的情形。

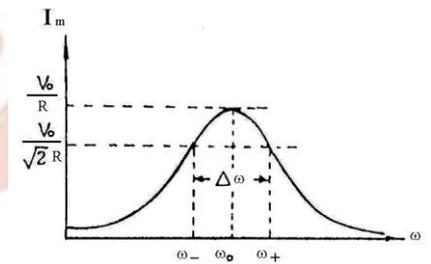


圖 7 $I_m - \omega$ 曲線圖。

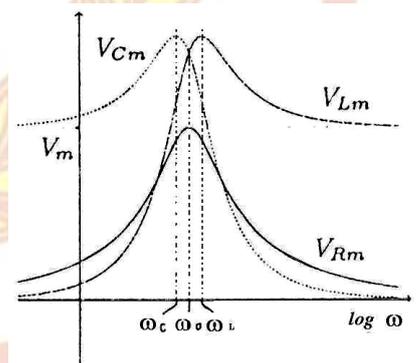


圖 5 V_{Rm} 、 V_{Lm} 、 V_{Cm} 隨 ω 變化的情形。

$$v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) = v_i(t)$$

但此式並不表示 $V_{Rm} + V_{Cm} + V_{Lm} = V_m$ ，這是因為 $v_R(t)$ 、 $v_C(t)$ 和 $v_L(t)$ 之間有相位差，所以 V_{Rm} 、 V_{Cm} 、 V_{Lm} 與 V_m 的真正關係為 $(V_{Cm} - V_{Lm})^2 + V_{Rm}^2 = V_m^2$ #3，由於 V_{Cm} 和 V_{Lm} 是相減的關係，所以即使它們比 V_m 大數倍，也不違反 KVL 定律。

#3 讀者可由電壓的相位關係自行證明此式。

4. 相位差方面： $\omega L - 1/\omega C$ 時， $\phi = 0$ ，電流 $i(t)$ 和電源電壓 $v_i(t)$ 同相。此時電路為一純電阻性電路，圖 5 的電感器和電容器可看成短路，如圖 9 所示。當 $\omega L - 1/\omega C < 0$ 時， $\phi > 0$ ，電流領先電源電壓的相位角為 ϕ ，電路呈電容性；當 $\omega L - 1/\omega C > 0$ 時， $\phi < 0$ ，電流落後電源電壓的相位角為 ϕ ，電路呈電感性。圖 10 表示 ϕ 隨 ω 而變化的情形。

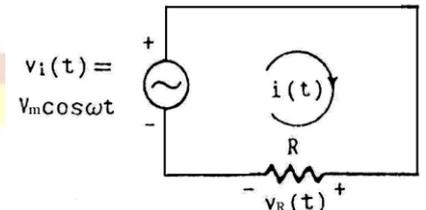


圖 9 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ 時，圖 5 的等效電路。

5. RLC 電路的頻寬：從圖 7 可以看出：在 I_m 的峰值兩側各有一個半功率點 ω_- 及 ω_+ ($\omega_- < \omega_0 < \omega_+$) 因為

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

所以 ω_{\pm} 值滿足下式

$$\frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}R}$$

解出 ω 可得

$$\omega_{\pm} = \frac{\pm R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L}$$

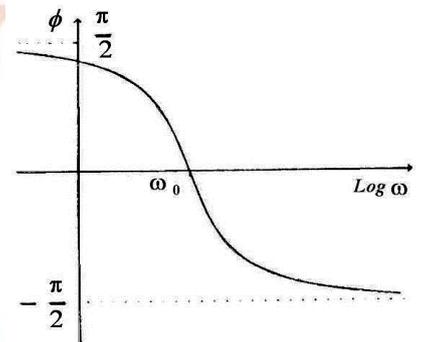


圖 10 ϕ 值隨 ω 變化的情形。

我們把電路的頻寬定義為 $\Delta\omega \equiv \omega_+ - \omega_-$ ，則 RLC 電路的 $\Delta\omega$ 值為

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

因頻率在 ω_0 的附近，LC 幾乎可看成短路，所以 RLC 串聯電路可做為一個簡單的「帶通濾波器」，如圖 11 所示。

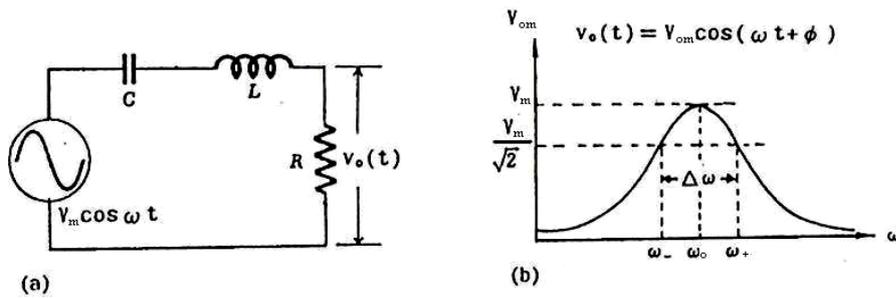


圖 11 (a)帶通濾波器 (b) 帶通濾波器的頻率響應圖。

同理，RLC 串聯電路也可做成在 $\Delta\omega$ 範圍內輸出很小，在 $\Delta\omega$ 以外輸出很大的「帶拒濾波器」，如圖 12 所示。這種濾波器可以用來去掉不要的頻率，稱為「陷波器」。

(四)RLC 並聯共振電路：

RLC 共振電路並聯的方式很多，圖 13 的電路是常見的並聯共振電路之一，其總阻抗 Z 為

$$Z = R - j \frac{L}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \quad (8)$$

從(8)式可知：當 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 時， Z 的虛數項為無窮大，ab 兩端可看成斷路，所以 $v_o(t) = v_i(t)$ ，這種現象正好與 RLC 串聯共振電路相反。

(五)RLC 電路的能量消耗：

在 RLC 串聯(或並聯)電路裡，電容器和電感器分別以電場和磁場的形式儲存能量，只有電阻器會將能量以“熱”的方式消耗掉，因此電源供應器所供應的平均功率(請參考 RL 實驗自行證明) \bar{P}_v 。

$$\begin{aligned} \bar{P}_v &= \frac{-V_m^2}{2\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \phi \\ &= \frac{-V_m^2}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

全部都會消耗在電阻器上。

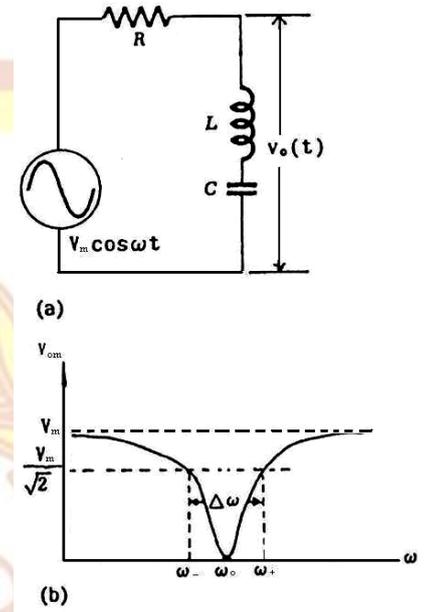


圖 12(a)帶拒濾波器。

(b)帶拒濾波器的頻率響應圖。

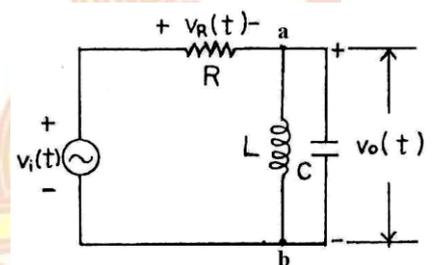


圖 13 RLC 並聯共振電路器。

三、儀器與配件：

示波器，波形產生器， $5\text{k}\Omega$ 可變電阻 $\times 1$ ， 20mH 電感 $\times 1$ ， $0.01\ \mu\text{F}$ 電容 $\times 1$ ，數位三用電表。

四、步驟：

(一) 阻尼振盪：

1. 以方波驅動圖 14 的電路，以 CH1 觀察方波，CH2 觀察電容器兩端的電壓。調整可變電阻的大小，觀察欠阻尼、臨界阻尼和過阻尼的波形。
2. 把可變電阻調整到臨界阻尼條件，取下可變電阻器，量取電阻值，檢驗是否符合 $(R/2L)^2 = 1/LC$ 。
3. 把可變電阻調到數百歐姆，觀察阻尼震盪振幅衰減的情形，由示波器測出 τ ，並 $2L/R$ 相比較^{#4}。
4. 把可變電阻和電容器的位置互換，觀察 $v_R(t)$ 的波形。

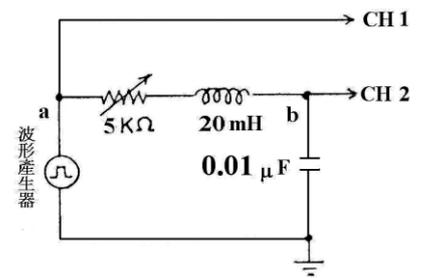


圖 14 RLC 串聯電路。

#4 注意:R 值應包括波形產生器的輸出電阻 50Ω 及電感的內電阻(約 60Ω)。

(二) RLC 電路對正弦電壓的反應：

1. 以正弦波驅動圖 14 以所示的電路，將可變電阻調到 $2.5\text{k}\Omega$ 。
2. 改變正弦波頻率，但不改變振幅及可變電阻的阻值，觀察 V_{Rm} 、 V_{Lm} 及 V_{Cm} 隨頻率而變的情形。描繪頻率響應曲線(參看圖 8)。
3. 由此曲線定出共振頻率 f_0 及頻寬 Δf ，並和計算值作比較。
4. 觀察相位角隨頻率變化的情形，描出相位角和頻率的關係曲線。
5. 將可變電阻調為 $1.25\text{k}\Omega$ 及 $4\text{k}\Omega$ ，重覆上述步驟 2~4。
6. 以圖 15 的電路，觀察 L-C 的電壓隨頻率而變的情形，繪出 L-C 的電壓對頻率的響應圖。
7. 以圖 16 的電路，觀察 $v_o(t)$ 的峰值 V_{Om} 隨頻率而變化的情形，繪出 V_{Om} 的頻率響應圖。

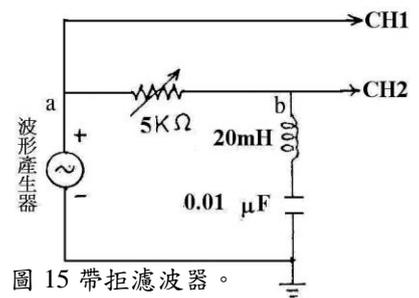


圖 15 帶拒濾波器。

(三) 能量消耗：

1. 以正弦波推動圖 14 的 RLC 電路。
2. 測量電流和波形產生器電壓的相位差，計算波形產生器的消耗功率(注意正、負號)。

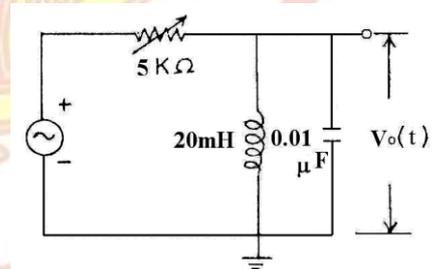


圖 16 RLC 並聯共振電路。

- 3.測量電流與電阻器、電容器及電感器的相位差，計算各元件的消耗功率。
- 4.驗證整個電路的“能量守恆”。

五、問題：

- 1.證明 L/C 的因次和電阻的因次相同。
- 2.進行步驟(一)的實驗時，在波形產生器未接上 RLC 電路前，以示波器觀察波形產生器的輸出波形，示波器上會顯示完整的方波；將 RLC 接成如圖 14 的電路後，再以示波器觀察波形產生器的輸出波形，發現示波器上所顯示的波形不再是完美的方波，請解釋為什麼會有這種現象(提示：考慮波形產生器的內阻)。
- 3.請仔細比較步驟(二)中，不同電阻值的頻率響應曲線。找出這些曲線的相異處，並說明原因。(提示： V_{Lm} 是否有最大值與臨界阻尼條件有關嗎?)
- 4.試推測：如果改變步驟(二)之 6、7 的電阻值，頻率響應曲線將會有什麼變化，請說明其原因。
- 5.在力學振盪實驗的步驟(三)第 2 項特別要求“等振盪穩定後，記錄振幅....”，本實驗的(二)步驟為何不做相同要求?試解釋之。

六、參考文獻：

1. J. B. Marion : Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed.,(歐亞書局，台灣版，1985), § 4-4, p.125 ; (3rd ed. §3-8, p.120)
2. S. Karni : Applied Circuit Analysis (John. Wiley & Sons Inc. 1988), §8-4~§8-5, p.220~ p.233 。