

## 週期性結構的電路

### 一、目的：

觀察訊號在週期性結構上傳遞的現象，以了解傳輸線與延遲線的原理。

### 二、原理：

#### (一) LC 週期性結構：

在耦合振盪電路實驗(參看圖 1(a))中，我們知道能量會在兩個耦合的振盪器之間來回轉移。這個實驗要觀察波動在無限長的 LC 週期性結構中傳遞的現象。

圖 1(b)是一組 N 個 LC 迴路中的一段。當第 n-1 個電容器被充電而電壓升高時，這個電壓會驅使電流流過第 n 個電感，向第 n 個電容器充電，因此電壓或電流的波動會由第 n-1 個迴路傳到第 n 個迴路(或謂由第 n-1 級傳向第 n 級)。

從電壓的環路定理和電流的節點定理可以導出這個結構的微分方程式：

$$i_n - i_{n+1} = \frac{dq_n}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{q_{n-1}}{C} - \frac{q_n}{C} = L \frac{di_n}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{q_n}{C} - \frac{q_{n-1}}{C} = L \frac{di_{n+1}}{dt} \quad (3)$$

將(1)式微分，再把(2)式和(3)式的  $di_n/dt$ 、 $di_{n+1}/dt$  代入可得

$$L \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{1}{C} (q_{n-1} + q_{n+1} - 2q_n) \quad (4)$$

讀者可自行練習找出力學的對應系統與方程式。

我們可以試著找一個從左往右傳遞的行進波的解，假設它的基本形式為

$$q = q_0 \cos(\omega t - n\beta)$$

這裡的  $\beta$  是相鄰兩電容之間的相位差。將上式代入(4)式，得

$$\begin{aligned} & -L\omega q_0 \cos(\omega t - n\beta) \\ &= \frac{1}{C} q_0 \{ \cos[\omega t - (n-1)\beta] + \cos[\omega t - (n+1)\beta] - 2(\omega t - n\beta) \} \end{aligned}$$

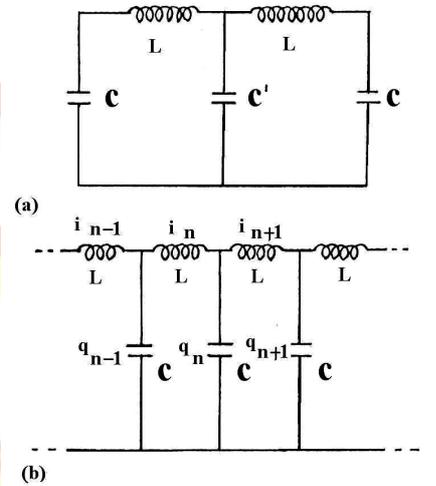


圖 1(a) 耦合振盪器。

(b) 週期性結構。

利用三角學恆等式化簡，可得

$$L\omega^2 = 2\frac{1}{C}(1 - \cos\beta)$$

$$= 4\frac{1}{C}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

如此得知頻率為，

$$\omega = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}\sin\frac{\beta}{2} \quad (5)$$

$\beta$  表示頻率為  $\omega$  的正弦波，經過一段延遲時間  $T$  (指一個迴路) 之後所產生的相位差，因此

$$\beta = \omega T \quad (6)$$

把(6)式代入(5)式，可以得到

$$\sin\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2}\sqrt{LC} \quad (7)$$

因此，每一級的延遲時間  $T$  和頻率有關，如圖 2 所示。因為  $\sin(\omega T/2) \leq 1$ ，因此頻率是有上限的，必須在下面條件下

$$\omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

才有行進波的解存在，角頻率高於  $2/\sqrt{LC}$  的波無法在圖 1(b) 的結構中傳遞，因此圖 2 的曲線在  $\omega = 2/\sqrt{LC}$  處中止，而截止頻率  $f_c$  為

$$f_c \equiv \frac{\omega_c}{2\pi} \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

延遲時間的下限為

$$T_c \equiv \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} \quad (9)$$

在實驗當中一般會選窄脈波來觀察傳遞的現象。一個脈波又可看成由很多正弦波所組成，(各正弦波之振幅可用傅立葉分析求得)，既然不同頻率的正弦波有不同的延遲時間，在這種傳輸系統上傳過一些距離後，脈波一定會產生變形。當然，如果這個脈波可以用一些低頻率的正弦波組合出來，各頻率的延遲時間都很相近，脈波的變形就會較少。這時"低頻率"的條件是

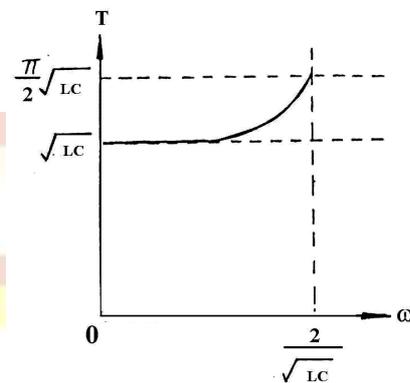


圖 2 延遲時間與信號頻率的關係。

$$\omega \ll \omega_c, \quad \sin \frac{\omega T}{2} \ll 1$$

我們可以取近似值，得到

$$\sin \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega}{2} \sqrt{LC}$$

因此，這類脈波經每一級 LC 電路的延遲時間為

$$T \approx \sqrt{LC}$$

以上是利用解微分方程的方法，導出截止頻率和延遲時間。我們也可以利用複變方法來得到這些結果。把電壓的環路定理和電流的節點定理應用於圖 3 的電路，記住每次碰到電感器時其阻抗為  $j\omega L$ ，碰到電容器時其阻抗為  $1/(j\omega C)$ ，可以得到

$$v_{n-1} - v_n = j\omega L i_n \quad (10)$$

$$v_n - v_{n+1} = j\omega L i_{n+1} \quad (11)$$

$$i_n - i_{n+1} = j\omega C v_n \quad (12)$$

用(10)式和(11)式取代(12)式的  $i_n$ 、 $i_{n+1}$ ，可以得到

$$v_{n-1} + v_{n+1} = 2v_n \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right) \quad (13)$$

我們試著求傳遞形式的解，令  $v_n$  的基本形式為

$$v_n = V_0 e^{j\omega t} e^{-n\gamma}$$

代入(13)式中，並消去  $V_0 e^{j\omega t} e^{-n\gamma}$ ，得到

$$e^{-\gamma} + e^{\gamma} = 2 \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right)$$

$\gamma$  不一定是實數，可以令  $\gamma = \alpha + j\beta$ ， $\alpha$ 、 $\beta$  為實數，代回上式得到

$$(e^{-\alpha} + e^{\alpha}) \cos \beta + j(e^{-\alpha} - e^{\alpha}) \sin \beta = 2 \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right) \quad (14)$$

因為等號右邊是實數，所以等號左邊也必須是實數，令虛數部分為零，則

$$\alpha = 0 \quad \text{或} \quad \beta = n\pi \quad (n \text{ 為整數})$$

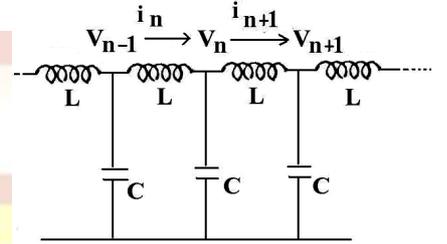


圖 3

(14)式成立的情況之一是  $\alpha = 0$ ，即

$$\cos \beta = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}$$

由於  $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ ， $\omega \leq 2/\sqrt{LC}$ ，也可以推得  $\omega$  有上限的結論。而被傳遞的波所具有的形式為

$$\begin{aligned} v_n &= V_0 e^{j\omega t} e^{-n\gamma} \\ &= V_0 e^{j(\omega t - n\beta)} \end{aligned}$$

這和前面解過的基本形式是相同的。

至於  $\alpha \neq 0$ ， $\sin \beta = 0$  則分為  $\cos \beta = 1$  與  $\cos \beta = -1$  兩種來討論，其中  $\cos \beta = 1$  者會導致不合理的結論。因為  $\alpha \neq 0$ ，所以

$$e^{-\alpha} + e^{\alpha} > 2$$

在(14)式中，

$$2 \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right) = e^{-\alpha} + e^{\alpha} > 2$$

經化簡得到

$$\frac{\omega^2 LC}{2} < 0$$

這是不可能的事情

$\alpha \neq 0$ ， $\sin \beta = 0$  的另一種可能性是  $\cos \beta = -1$ 。

(14)式變成

$$-(e^{-\alpha} + e^{\alpha}) = 2 \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right)$$

因為  $e^{-\alpha} + e^{\alpha} > 2$ ，因此

$$2 \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right) > 2$$

化簡後得到

$$\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

這是在截止頻率以上的情況。這些高頻訊號在傳遞時會有什麼現象發生呢？由(14)式知

$$e^{-\alpha} + e^{\alpha} = 2 \left( \frac{\omega^2 LC}{2} - 1 \right) = 2 \left[ 2 \left( \frac{f}{f_c} \right)^2 - 1 \right]$$

解此方程式可以得到

$$e^{-\alpha} = \left[ 2 \left( \frac{f}{f_c} \right)^2 - 1 \right] \pm \sqrt{\left[ 2 \left( \frac{f}{f_c} \right)^2 - 1 \right]^2 - 1} \quad (15)$$

因為能量守恆的關係，在傳遞過程中訊號只能越來越小，因此，上式取負號。(如果取正號， $e^{-\alpha} > 1$ ，振幅會愈來愈大)。因此， $f > f_c$ 時，

$$v_n = V_0 (-1)^n e^{-n\alpha} e^{j\omega t}$$

這個解不是行進波的解，而是駐波的解，其振幅作指數衰減，而且相鄰兩點的相位差為  $180^\circ$  當  $f \gg f_c$  時，將(15)式取近似值，可以得到

$$e^{-\alpha} \approx \frac{1}{4} \left( \frac{f}{f_c} \right)^2 \ll 1$$

此表示振幅隨頻率作急速的衰減，如圖 4 所示。

## (二)特性阻抗：

前面討論的都是無限長的週期性結構，在電路上行進的波，永遠不會碰到盡頭，因此沒有反射波。事實上，一般所使用的週期性結構都是有限長的，脈波到達端點應該會反射回來。

如果在端點接上一個阻抗  $Z_0$  (如圖 5)，使波察覺不出與無限長有何不同，所有的能量都被  $Z_0$  消耗掉，波就不會反射。這個阻抗  $Z_0$ ，稱為這個週期性結構電路的「特性阻抗」。既然接上特性阻抗後，波察覺不出和無限長有何不同，則自端點的前一級看進去的阻抗和在端點一樣都是  $Z_0$ ，因此

$$Z_0 = \frac{j\omega L}{2} + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\frac{j\omega L}{2} + Z_0}}$$

可以解出  $Z_0$  為

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left( \frac{f}{f_c} \right)^2} \quad (16)$$

當  $f \leq f_c$  時， $Z_0$  是一個電阻(實數)，這個電阻剛好可以把入射波的能量消耗掉，沒有反射波產生。

當  $f \geq f_c$  時， $Z_0$  是一個電抗(純虛數)，純粹的電抗是不消

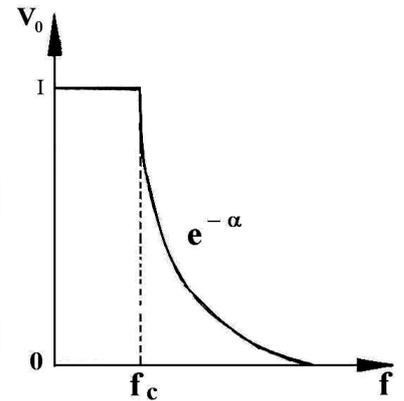


圖 4 在傳遞截止頻率以上的波時，振幅急速衰減。

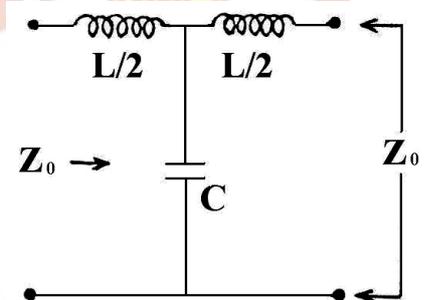


圖 5 特性阻抗  $Z_0$ 。

耗能量的，這個結果再度告訴我們  $f > f_c$  時，此週期結構上沒有行進波(即無能量傳遞)。

因為特性阻抗隨頻率而變，因此頻率範圍較寬的阻抗匹配有時不易達到。

### (三)反射波：

如果端點的阻抗  $Z$  (圖 6) 不等於特性阻抗  $Z_0$ ，則入射波的能量無法完全消耗掉，會有反射波產生。假設入射波的電壓振幅為  $A$ ，電流的振幅為  $A/Z_0$ ；反射波的電壓振幅為  $B$ ，電流振幅為  $-B/Z_0$ ，因此

$$v = A + B$$

$$i = \frac{1}{Z_0}(A - B)$$

但是在端點， $v/i = Z$ ，故

$$\frac{A + B}{A - B} = \frac{Z}{Z_0}$$

由此可得

$$\frac{B}{A} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (17)$$

如果  $Z$  為電阻性，當  $Z > Z_0$  時，反射波和入射波同相位；當  $Z < Z_0$  時，反射波和入射波極性相反。

在高頻率或窄脈波的情形，反射波常會干擾待測信號，有時來回反射的能量會聚集起來被壞儀器，因此終端的阻抗應盡量接近特性阻抗。

### (四)同軸電纜：

同軸電纜的橫截面如圖 7 所示，其特色是外導體形成鞘狀包住內導體，兩者之間以絕緣層隔開，最外面再覆以保護層。使用同軸電纜可以減少外界的干擾，使用在高頻率的情況還可以減少能量的輻射。同時它有一定的特性阻抗，可以在端點做阻抗匹配，避免反射波。

同軸電纜的電感和電容是連續分佈的，但觀念上我們還是可以把它當作由許多很小的電感和電容連接成的(文獻 1)。假設同軸電纜的內導體半徑為  $a$ 。外導體的半徑為  $b$ ，絕緣層的介電係數為  $\epsilon$ ，導磁係數為  $\mu$ ，則每單位長度的電容值為

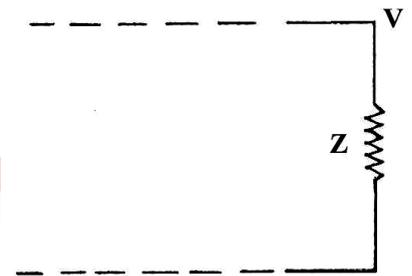


圖 6

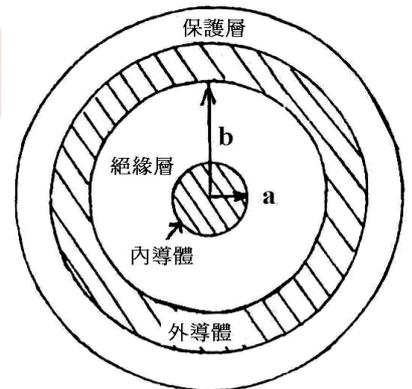


圖 7 同軸電纜的橫截面圖，斜線部份為導體。

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{a}{b}} \quad (18)$$

每單位長度的電感值為

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{a}{b} \quad (19)$$

同軸電纜可看成圖 8 的結構。套用前面的公式

$$\begin{aligned} \sin \frac{\omega T}{2} &= \frac{\omega}{2} \sqrt{L\Delta x \cdot C\Delta x} \\ &= \frac{\omega}{2} \sqrt{LC\Delta x} \end{aligned}$$

因  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\omega T/2 \rightarrow 0$  故可將上式展開，而只取第一項得

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2} \sqrt{LC\Delta x}$$

每經過時間  $T$ ，信號向前傳遞  $\Delta x$ ，傳遞速率為

$$\frac{\Delta x}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu'\epsilon'}}$$

因此，在同軸電纜內，波速  $u = c/\sqrt{\mu'\epsilon'}$ ，很接近光速，並不適合當作延遲線使用。但因為傳遞速度和頻率無關，可保持波形不變，是很好的傳輸線。

利用(16)式，可以求出同軸電纜的特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L\Delta x}{C\Delta x}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC\Delta x^2}{4}}$$

令  $\Delta x \rightarrow 0$

$$Z_0 \rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$Z_0$  和頻率無關，在阻抗匹配時較容易。同軸電纜的截止頻率亦可套用前面的公式

$$f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{L\Delta x C\Delta x}} = \frac{1}{\pi\Delta x\sqrt{LC}} \rightarrow \infty$$

所以沒有截止頻率。

事實上，在高頻率時，同軸電纜有電阻性的損失，如因集膚效應，大多數電流集中在導體表層而增加了電阻。絕緣用的介電質在高頻率時會吸收電場的能量，相當於在內外導體之間有漏電的電阻，使電纜的等效電路變成圖 9 的情形。

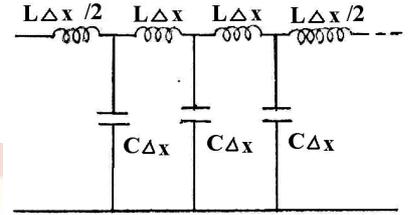


圖 8 把同軸電纜視為多級週期性結構。

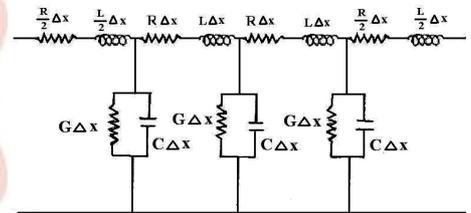


圖 9

把這些電阻性損失都考慮進去後，各個量都變得和頻率有關。

通常所使用的電纜的特性阻抗值有  $50\Omega$  附近， $70\Omega$  附近，及  $90\Omega$  附近三種，可由其編號識別。一般電視天線所用的扁形饋線特性阻抗約  $300\Omega$ 。

### 三、儀器與配件：

波形產生器，示波器， $20\text{nH}$  電感 40 個， $0.01\mu\text{F}$  電容 40 個， $10\text{k}\Omega$  可變電阻 2 個，脈波產生器， $75\Omega$  電纜 10m， $50\Omega$  電纜 5m， $500\Omega$  可變電阻 1 個。

### 四、步驟：

#### [注意事項]

本實驗所用的零件很多，接電路之前應先想好零件的安排方式，務必求整齊劃一。相鄰的電感之間會有磁場的耦合，要注意不可彼此太靠近。零件接腳可先用鉗子整直，較容易插在麵包板上。

#### (一)特性阻抗：

- 1.接電路如圖 10。使波形產生器的輸出為方波，頻率約為  $3\text{kHz}$ ，調節 Ramp/Pulse 旋鈕(要抽出)，僅可能調出最窄的脈波。若將 DC OFF-SET 鈕抽出，可調整基線位置到 GND，得到負極性脈波。
- 2.將左端的  $10\text{k}\Omega$  可變電阻的電阻調到最小，(為什麼?)，從示波器上觀察入射波和反射波的波形。調節右端的  $10\text{k}\Omega$  可變電阻的電阻，使反射波消失，將它取下來，用電表測其電阻，這就是特性阻抗。
- 3.將右端  $10\text{k}\Omega$  可變電阻接回。將此  $10\text{k}\Omega$  可變電阻調大或調小，觀察反射波極性的變化，和理論預測的結果是否一致?

#### (二)延遲時間：

從示波器上讀出入射波和反射波的時間差，這個時間就是脈波在此週期性結構來回一次的時間。這個時間

除以 60 就是每級的延遲時間，和  $\sqrt{LC}$  是否相近?

#### (三)截止頻率：

- 1.將左右兩邊的  $10\text{k}\Omega$  可變電阻的電阻調到特性阻抗值。

2. 波形產生器的輸出改為正弦波<sup>#1</sup>。
3. 改變正弦波的頻率，觀察右總的波形隨頻率變化的情形，找出截止頻率。和理論值作比較。
4. 將頻率再略為調高，記錄左邊幾級的波形衰減的情形，它們是否呈指數衰減？並注意相鄰兩級的波形，極性是否相反？
5. 與鄰組合作，記錄步驟(一)、(二)、(三)中，使用 60 級與 30 級的結果有何不同。

#1 Ramp/Pulse 旋鈕應壓回去(才能得到對稱的波形)

#2 本實驗器材只有二套，各組應協調使用時間，以避免擁擠。

#### (四) 同軸電纜<sup>#2</sup>

1. 同軸電纜的特性阻抗：  
依圖 11 方式接電路。脈波產生器將極窄的脈波輸入長 10 公尺的  $75\Omega$  電纜，同時輸入示波器。從示波器上可以看到入射波和反射波。
2. 讀出入射波和反射波的時間差。這就是脈波在電纜內走 20m 所需時間。由此算出脈波的速度，並計算電纜內介電質的介電常數(假設介電質無磁性)。
3. 改變  $500\Omega$  可變電阻器的電阻，觀察反射波極性的變化。
4. 調節  $500\Omega$  可變電阻的電阻使反射波消失。取下  $500\Omega$  可變電阻，測量其電阻值。此值是否和  $75\Omega$  相近？
5. 將  $500\Omega$  可變電阻取下，接上  $50\Omega$  電纜。觀察因阻抗不同在接點產生的反射。

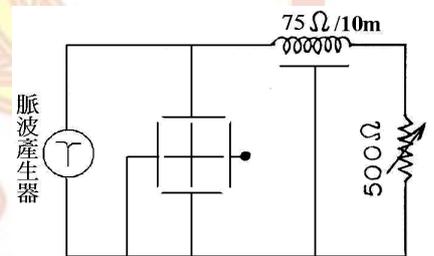


圖 11

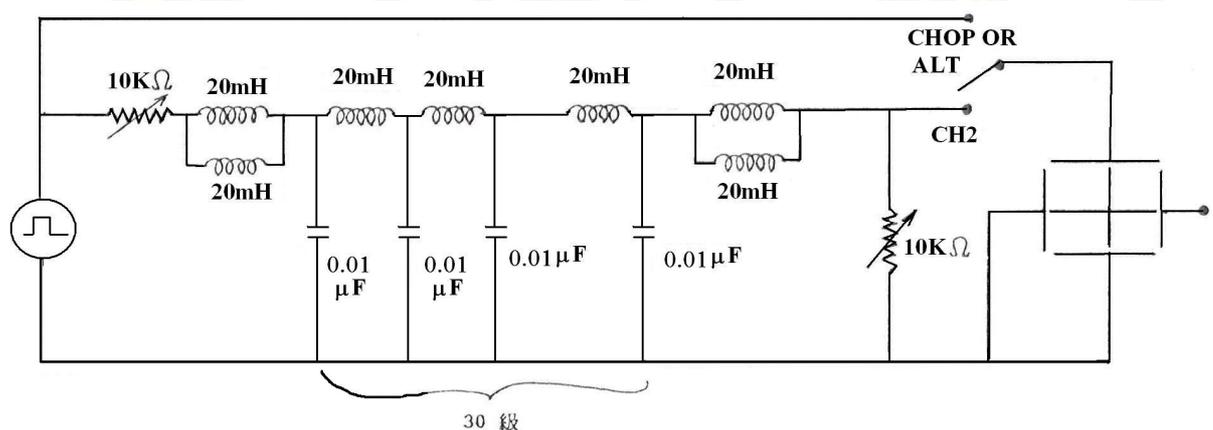


圖 10

6. 將  $500\Omega$  可變電阻接回  $50\Omega$  電纜末端，如圖 12 所示。  
調節  $500\Omega$  可變電阻的電阻直到反射波消失，只剩一個  $75\Omega$  和  $50\Omega$  接點的反射波。紀錄  $500\Omega$  可變電阻的電阻值。

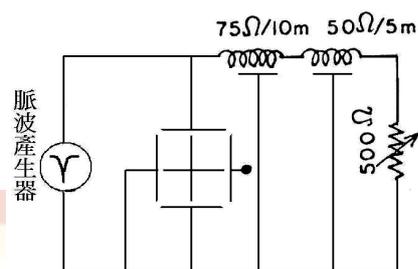


圖 12

### 五、問題：

1. 本實驗所用的 LC 週期性結構是低通濾波器。圖 13 的 LC 週期性結構則是高通濾波器。試仿原理一的方法，求出每級的延遲時間以及截止頻率。
2. 圖 14 的電路中，電源在時間  $t = 0^+$  時，輸出一個階梯波，其高度為  $V_0$ 。如果電源的輸出阻抗和電纜的特性阻抗相匹配，試說明電纜輸入端的波形  $V_i$ 。圖 15 中的  $t_d$  是電纜的延遲時間。用這個方法可以產生極寬的脈波。

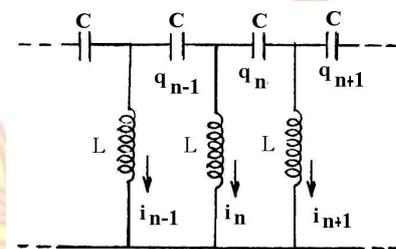


圖 13

### 六、參考文獻：

1. J. B. Marion : Classical dynamics of Particles and Systems, 2ne ed., (歐亞書局台灣版, 1985), §13-10, p.439, §15-5, p. 496。
2. K. U. Ingard : Fnnamentals of Waves and Oscilla-tions (Cambridge University press, 1988), Chap. 14, p.381~ p.408。

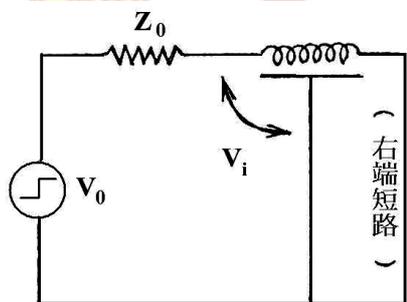


圖 14

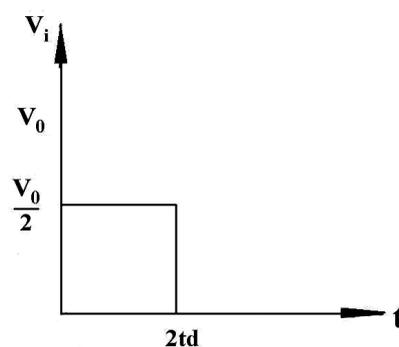


圖 15

