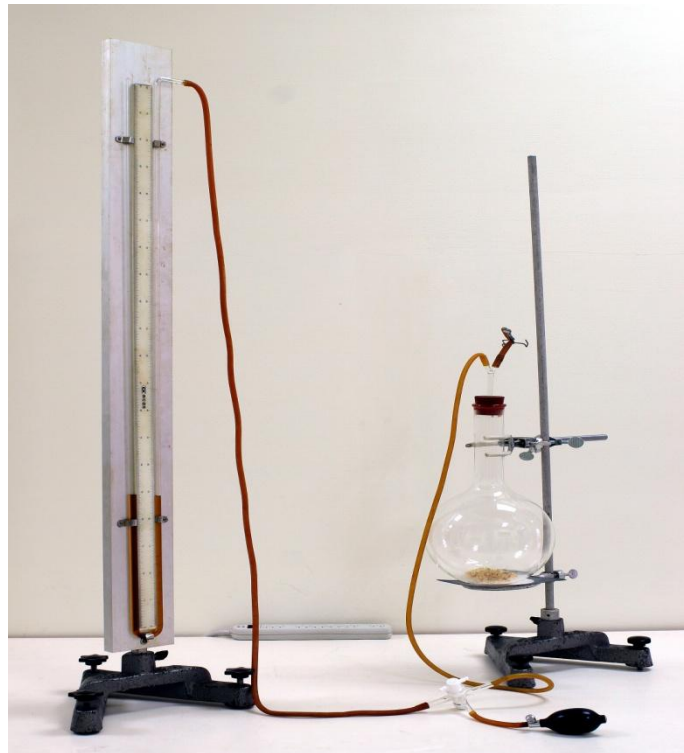


實驗 空氣 γ 值的測定



空氣 γ 值實驗裝置圖

一、目的：

以克雷孟(Clement)和德梭姆(Desorm)的方法測量空氣的 γ 值。

二、原理：

在維持溫度不變的條件下，一定莫耳數的理想氣體被壓縮或膨脹時，壓力 p 和體積 V 的乘積為定值，此稱為波義耳定律。但是氣體不是熱的良好導體，熱平衡的達成需要一段時間。當 p, V 改變過快(如音波的傳導)時，氣體各部分之間可能來不及交換熱量，因此實際發生的過程不可能是等溫變化，而應當作絕熱過程。

絕熱過程和等溫過程的不同處在於：絕熱過程中，氣體如果被壓縮，外界對它所作的功全部變為氣體的內能，因此氣體的壓力和溫度同時升高。氣體如果膨脹，對外界作功而消耗內能，因此氣體的壓力和溫度同時降低。由此可知：在絕熱過程中， p 隨 V 的變化率必定較等溫過程的明顯，即 $p-V$ 曲線必定較陡峭。

現在考慮 1 莫耳理想氣體，由熱力學第一定律知，流入氣體的熱量 dQ ，氣體的內能變化 dU ，和氣體對外界所作的功 pdV 之間有下式的關係：

$$dQ = dU + pdV \quad (1)$$

如果維持體積不變，1 莫耳氣體溫度每升高一度所需的熱量稱為該氣體的莫耳定容熱容量(molar heat capacity at constant volume) C_v ，由(1)式可得(參考資料 1~3)：

$$C_v \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = \frac{dU}{dT} \quad (2)$$

(2)式中，第三個等號成立的原因是理想氣體的內能祇和其絕對溫度有關。如果容許體積改變但維持壓力一定，1 莫耳氣體溫度每升高一度所需的熱量稱為莫耳定壓熱容量(molar heat capacity at constant pressure) C_p ，由(1)式可得(參考資料 1~3)：

$$C_p \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

由於理想氣體的內能祇和其絕對溫度有關，因此 $(\partial U / \partial T)_p = dU / dT = C_v$ 。另外，由理想氣體方程式 $pV = RT$ (在此,莫耳數 $n=1$)，可得(參考資料 1~3)：

$$p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \frac{RT}{p}}{\partial T}\right)_p = R$$

因此

$$C_p = C_v + R \quad (3)$$

所謂 γ 值即是 C_p 和 C_v 件的比值，也就是 $(C_v + R) / C_v$ 。我們將發現它和絕熱過程關係密切，因此 γ 是氣體動力學上一個很重要的常數。

現在考慮絕熱過程，令(1)式中的 $dQ=0$ ，可以得到：

$$dU = -pdV \quad (4)$$

但由(2)式也可得到：

$$dU = C_v dT \quad (5)$$

將理想氣體方程式 $pV = RT$ 兩邊微分，可以得到：

$$pdV = Vdp + RdT \quad (6)$$

由(5)、(6)式消去 dT ，可以得到：

$$dU = \frac{C_v}{R}(pdV + VdP) \quad (7)$$

比較(4)與(7)式，再加以整理，可以得到：

$$\frac{C_v}{R}Vdp = -\frac{C_v+R}{R}pdV$$

因此

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

將兩邊積分，可得

$$\ln p = -\gamma \ln V + \text{常數} \quad (8)$$

因此

$$pV^\gamma = \text{常數}$$

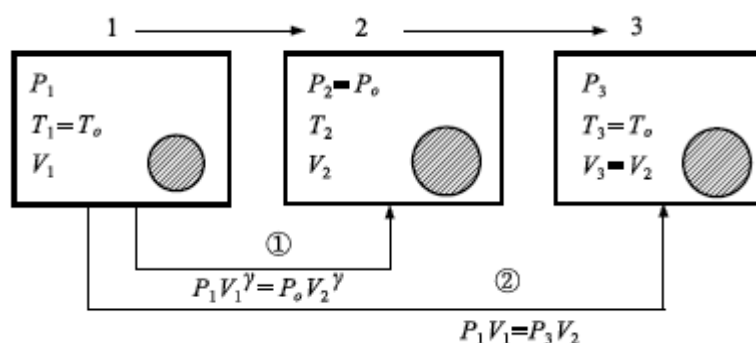


圖 1 克雷孟和德梭姆所設計實驗的示意圖：①絕熱膨脹 ②等溫膨脹

由上式可知 γ 守值可以由絕熱過程中求得，克雷孟和德梭姆設計了一個實驗以求空氣的 γ 守值：

假設大氣壓力為 p_0 ，室溫為 T_0 ，實驗的步驟如下(參考圖 1):

1. 先將空氣打入一個容器，使其壓力略高於大氣壓力 p_0 。等幾分鐘，讓容器內空氣的溫度回到室溫 T_0 ，測量其壓力 p_1 。
2. 將容器打開瞬間立即將容器再蓋好。在這瞬間，容器內空氣經過絕熱膨脹，壓力下降到大氣壓力 p_0 ，溫度則降到 T_2 。
3. 容器再封閉經數分鐘後，容器內空氣的溫度回到室溫 T_0 ，壓力上昇到 p_3 ，測量這個壓力 (p_3) 的大小。

現在考慮容器內某一小體積 V_1 的氣體(圖 1 中以圓圈加斜線部份代表)，從 1→2 是絕熱膨脹過程，由(8)式知：

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma \quad (9)$$

因為從 1→3 的過程中，溫度不變，所以由波義耳定律知：

$$p_1 V_1 = p_3 V_2 \quad (10)$$

將(10)式兩邊各自乘 γ 次和(9)式相除消去 V_1 及 V_2 ，得到：

$$p_1^{\gamma-1} = \frac{p_3^\gamma}{p_0} \quad (11)$$

我們的實驗裝置如圖 2 所示，壓力的測量是靠 U 型管內液面的高度差 h 而得到的，設液體密度為 ρ 則：

$$p_1 = p_0 + h_1 \rho g \quad (12)$$

$$p_3 = p_0 + h_3 \rho g \quad (13)$$

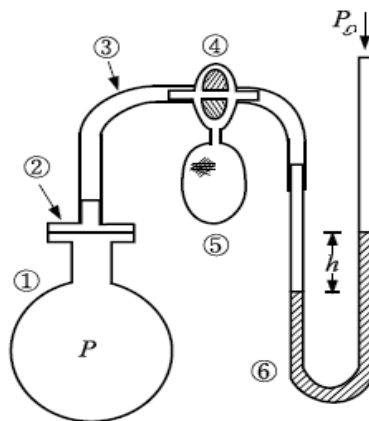


圖 2 克雷孟-德梭姆實驗裝置：①玻璃瓶②銅蓋(可沿瓶口水平方向滑動)

③橡皮管④玻璃氣閥⑤打氣球⑥U 型管(內裝測氣體壓力的液體)

將(12)及(13)式代入(11)式，可以得到：

$$(p_0 + h_1 \rho g)^{\gamma-1} = \frac{1}{p_0} (p_0 + h_3 \rho g)^\gamma$$

兩邊除以 $p_0^{\gamma-1}$ ，可得：

$$\left(1 + \frac{h_1 \rho g}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(1 + \frac{h_3 \rho g}{p_0}\right)^\gamma \quad (14)$$

因為 $h_1, h_3 \approx 10 \sim 20 \text{cm}$ ，且 $\rho \leq 1 \text{g/cm}^3$ ，而 p_0 約為 76cmHg ，故 $(h_1 \rho g / p_0) \ll 1$ ， $(h_3 \rho g / p_0) \ll 1$ ，因此可以將上式兩邊作二項式展開，只保留一次項：

$$1 + \frac{(\gamma-1)h_1 \rho g}{p_0} = 1 + \frac{\gamma h_3 \rho g}{p_0}$$

因此得到一個很簡單的結果：

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (15)$$

γ 值可以由古典統計力學算出，古典統計力學告訴我們每一個自由度每一莫耳的平均能量為 $\frac{1}{2}RT$ ，空氣中的分子大都為雙原子分子，質心的移動有 3 個自由度，轉動有 2 個自由度，一共有 5 個自由度(振動自由度在常溫下可以忽略)。因此 1 莫耳空氣的內能為 $\frac{5}{2}RT$ 。 $C_v = \frac{5}{2}R$ ， $C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R$ ，故 $\gamma = \frac{7}{2}R / (\frac{5}{2}R) = 1.4$ 。

三、儀器：

含瓶蓋之大玻璃瓶，U 型管壓力計，玻璃閥，橡皮管打氣的球，橡皮管夾。

四、步驟：

1. 將玻璃閥轉到玻璃瓶、壓力計及打氣球互通的方向。緩緩^{†1}打入空氣，直到壓力計內兩邊的液面高度差約為 10~20cm。
2. 等待約 5 分鐘，記錄液面高度差 h_1 。
3. 鬆開夾子，使瓶內空氣溢出而達到內外壓力相等，時間只要約半秒鐘，立即將夾子夾住橡皮管封閉瓶口。
4. 等待約 5 分鐘，記錄液面高度差 h_3 。
5. 由(15)式算出空氣的 γ 值。
6. 重覆步驟 1~5 (h_1 及 h_3 的值不一定都要調到同一值)至少三次。
7. 計算步驟 1~6 所得數個守值的平均值及平均標準差，並與理論值做比較。
8. 改變打開夾子的時間(例如：1/4 秒、1/2 秒、1 秒、2 秒或 5 秒)，重覆步驟 1~7；畫出“ γ 值與瓶蓋打開時間的關係圖”，並說明由此圖可以得到什麼結論。

^{†1} 注意：打氣不可太快，否則 U 型管內液體會由圖 2 中 U 形管右臂上端開口冒出來。最好的方式是將打氣的球先捏兩、三下，等 U 形管內液體高度差穩定，若 h 值不夠大，再按一、二下，再等穩定，如此直到 h 值達到企望的值(約 10~20 cm)

五、問題：

1. 為何量取 h_1 及 h_3 時要等待一段時間(如 5 分鐘)?
2. 如果知道 U 型管內液體密度 ρ 和大氣壓力 p_0 ，由(14) 式直接計算 γ 值，和由(15)式算出者相差多少?
3. 夾子打開時間的長短對實驗結果有何影響?
4. 在步驟 3 的過程中，可能漏掉多少氣體?試估計之。

六、參考資料：

1.D.Halliday & R.Resnick : Fundamentals of Physics , 6th ed , ext. version (John Wiley & Sons Inc , New York , 2001),chap.20,p.454~ p.476.

2.M.W.Zemansky : Heat and Thermodynamics , 5th ed . (McGraw-Hill Inc., 1968) ,
chap . 5 , p.126.

3. .H . Benson : University Physics, revised ed . (John Wiley & Sons Inc., New York, 1995),§ 19-4
~§ 19-7 , p.383~ p. 390 ; chap.20,p.401~p . 413.