

實驗 26：一維駐波與二維共振的克拉尼圖案

Lab. 26 One-dimensional Standing Waves and Two dimensional Chladni Resonance Patterns

編者：國立清華大學物理系戴明鳳
第一版：97.02.06/第一次修正：97.02.24

一、目的

自然界的波主要分為力學波(mechanical wave)、電磁波(electromagnetic wave)和物質波(matter wave)等三大類。在自然界中很容易觀察到力學波的存在和其各種現象，但卻不易觀察到電磁波和物質波的存在及其各種現象。本實驗將藉由探究力學波動在不同傳播介質中的波動和共振現象，並將對力學波的了解延伸至對電磁波和物質波的認識。在實驗中將觀測繩線、金屬環及彈簧的共振現象，及力學波在不同形狀之金屬平板上的駐波行為，並觀測著名的克拉尼共振圖形(Chladni resonance patterns)。更探討產生駐波共振所需的條件。實驗中所有觀測到的現象和結果，可延伸至對電磁波和物質波現象的探討。

二、簡介

自然界所有的波主要分為三類：力學波、電磁波和物質波，這三類波動大量地圍繞在我們周遭，並充分應用在我們日常生活上。一般人雖然可以很容易地在自然界中觀察到各種力學波的存在和其有趣且有用的波動現象，但卻很不容易直接觀察到電磁波和物質波的存在和各種現象，以致於一般大眾對此兩類波動通常較為陌生，許多人甚至因為對之不理解而產生了許多錯誤的認識，並對之產生嚴重的懼怕和排斥心態。雖然不易藉由直接觀測到電磁波和物質波的存在與否，使我們深入認識這兩類型的波動，但我們可藉由對力學波動的瞭解，以延伸對電磁波和物質波動的認識。

各種波根據其波動之物理量的振盪方向和波動傳遞方向間的關係，又可分為橫波(transverse wave)和縱波(longitudinal wave)兩種波動模態。另根據波動的行進狀態，又可分為行進波(traveling wave)和駐波(standing wave)兩類型。有關波的各種分類方式和定義請自行參考一般普通物理課本有關波、聲波和電磁波等章節的介紹，或至相關物理教學網路上查詢。本實驗中主要將探究力學波的共振現象與駐波圖形。

本實驗將觀察在各式不同材質和形狀的物體內力學波的共振現象，測量不同共振模態時，波動所對應的共振頻率及其各種對稱且有趣的駐波圖案。並探究使波動達成共振現象的決定因素和條件，更進一步探討共振效應的優缺點和各種應用。本實驗內容根據不同的波動傳遞介質和介質形狀共分為下列五個子實驗。

- A. **一維橫波弦振盪與其駐波共振**：觀察在繩線上的橫波運動和共振現象，並探討波的傳播速率與繩線張力及繩線之線密度間的關係，及產生駐波共振的條件。
- B. **金屬長條片的橫波振盪**：觀察不同長度之金屬長條片的橫波振盪，用以說明條狀材料上的駐波和諧波現象，以及探討金屬條的長度、共振頻率和共振圖形間的關係。此實驗可用以

驗證細長之懸臂樑之長度和振盪頻率與波長間的關係，此即是片條狀發音體之樂器的基本工作原理，如鋼琴、木琴、鐵琴等樂器。並可藉此探討一般人眼和顯微鏡無法直接觀測得的奈米級與微米級之懸臂樑(Nano- and micro-scale cantilevered beam)上的力學波振盪現象，故亦可藉此實驗，瞭解懸臂樑的設計原理和工作原理。

- C. **環形駐波振盪與電子軌道運動**：觀察環形的力學駐波現象和產生共振的條件。此實驗除可用以探討環形樂器或其他相關共振系統的現象、工作原理和應用。更可根據此古典力學的駐波振盪現象，簡單地說明原子內之電子為何必須在一定的軌道半徑上繞原子核運轉，進而說明原子中電子能階必須不連續的原因，使得以深入了解量子力學中的波爾原子模型(Bohr's model of atom)。
- D. **彈簧縱波振盪**：觀察彈簧的縱波振盪和其共振現象，並探討決定其共振頻率主要因素。藉以明瞭空氣中的波動現象、聲波的共振和管狀樂器的發生原理。
- E. **二維共振之克拉尼圖案(Chladni patterns)**：觀察不同形狀之平板的二維駐波振盪和共振圖案，此即著名的克拉尼圖案。此實驗之現象和簡易的實驗步驟，常用以說明平面式樂器、鼓器和小提琴等樂器的工作原理，目前並被大量應用在這些相關樂器的設計和共振頻率的測量上。類似的實驗技巧更被用以檢測物體表面密度分佈、表面應力分佈的情形和尋找人眼無法觀測到的物體缺陷所在處等等。更被藉以延伸對電磁波在物質中傳播時的瞭解，並探討電磁波共振情形，瞭解傳播物質之邊界條件對電磁波共振的影響。

三、實驗器材

1. 振動儀：使用圖 1(a)所示之 PASCO 型號 SF-9324 力學波驅動器(mechanical wave driver)。
2. 信號產生器(signal function generator)：使用圖 1(b)所示之 PASCO WA9867 正弦波產生器(Sine wave generator)，可提供之信號的頻率範圍 0 - 800Hz，頻率解析度 0.1 Hz，具有 1 Hz 及 0.1 Hz 兩組頻率變化調整鈕。
3. 彈簧：使用圖 2(a)所示之 PASCO WA-9401 縱波振盪實驗用之彈簧，一條。彈簧未拉伸或受壓縮時的自然長度為 13 公分，可拉伸的長度範圍為 30-60 公分。
4. 不同長度之鋁製金屬長片組：PASCO SF-9404 鋁製金屬片組一組，每片金屬的寬度和密度相同，但長度不同，見圖 2(b)。
5. 鋁製金屬線環(wire loop)：PASCO SF-9405 的鋁製金屬共振環一個，環的直徑 29 公分，見圖 2(c)。
6. 24 x 24 cm² 正方形鋁製平板：PASCO WA-9607 方形克拉尼平板，見圖 3(a)。
7. 直徑 24 cm 圓形鋁製平板：PASCO WA-9607 圓形克拉尼平板，見圖 3(b)。
8. 鋁製小提琴形平板：PASCO SE-7319 小提琴形克拉尼平板，長約 40 cm，見圖 3(c)。
9. 桌邊支撐夾具 1 組：一維弦振盪實驗用。
10. 滑輪含支架 1 組：一維弦振盪實驗用。
11. L-型支撐架：固定振動儀用。

12. 專用細沙(砂)：一瓶，觀察二維克拉尼共振圖案用。因細砂量有限，請小心並節省使用；盡量避免細砂流失，每次做完實驗，請務必回收。
13. 灑砂瓶：一個，觀察二維克拉尼圖形共振用。
14. 精密天平(共用)
15. 一般電子天平(共用)
16. 黑色擋板：環形駐波實驗觀察用
17. 細砂收集箱
18. 數位相機：自備，實驗共振圖形記錄用。
19. 數位攝影機：自備，實驗駐波現象之結果記錄用。



(a) 振動儀



(b) 正弦波信號產生器

圖1 (a)振動儀：PASCO SF-9324力學波振動驅器(mechanical wave driver)，(b)信號產生器：PASCO WA9867正弦波產生器(Sine wave generator)。



(a) 彈簧



(b) 金屬長條片組



(c) 金屬環

圖2 (a)自然長度 13 cm 長的鋁製彈簧，(b)六片寬度和密度相同，但長度不同之鋁製金屬長條片組，(c)直徑 29 公分鋁製金屬環。

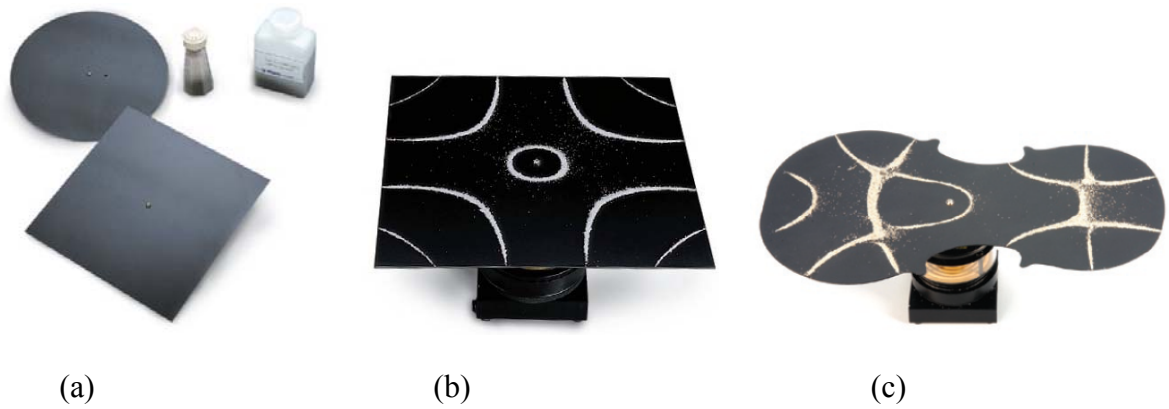
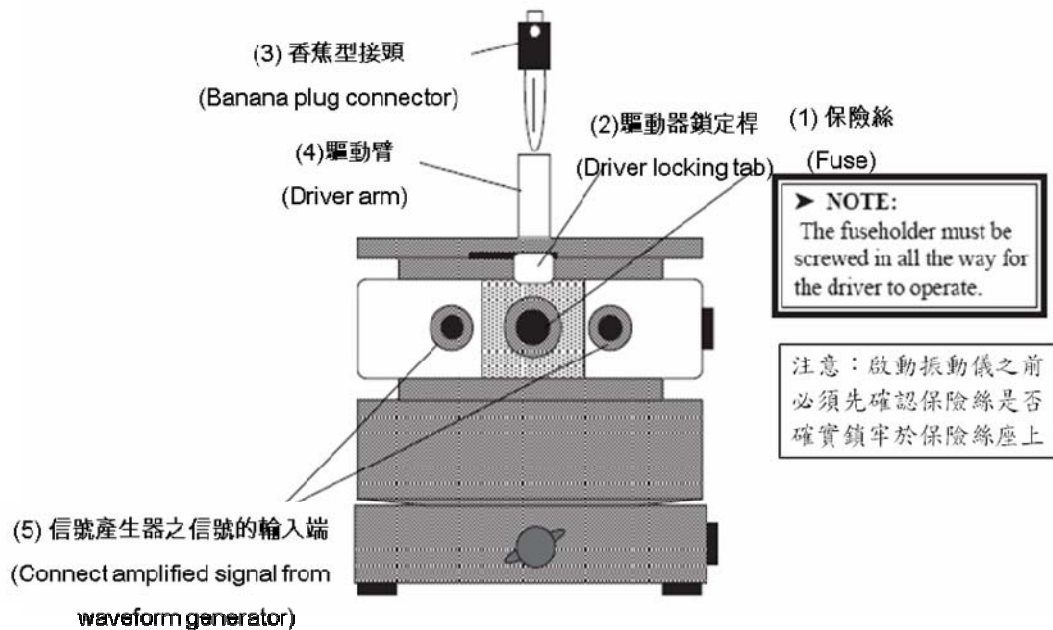


圖 3 (a) $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 正方形和直徑 24 cm 圓形鋁製平板，及專用細砂與灑砂瓶；(b) $24 \times 24 \text{ cm}^2$ 正方形鋁製平板及 $(n, m) = (2, 2)$ 力學共振模態的典型克拉尼共振圖形；(c) 鋁製小提琴形平板及某一特定共振頻率時的典型克拉尼共振圖形。

四、振動儀使用簡要說明和注意事項：(詳細說明請見附錄一)

(1) 振動儀和信號產生器簡介



PASCO SF-9324 可變頻力學驅動器結構圖

圖4 PASCO SF-9324 可變頻力學波驅動器(簡稱振動儀)之結構圖：(1)保險絲(Fuse), (2)驅動器鎖定桿(Driver locking tab), (3)香蕉型接頭(Banana plug connector), (4)驅動臂(Driver arm), (5)連接信號產生器之放大信號的輸入端(Connect amplified signal from waveform generator)。注意：啟動振動儀之前，必須先確認保險絲是否確實鎖緊於保險絲座上。

Sine Wave Generator

WA-9867

- ▶ Sine Wave Output up to 800 Hz
- ▶ Ideal for Driving Speakers and Wave Drivers
- ▶ Auto-Scan of Resonant Frequencies

The Sine Wave Generator is an effective tool for generating waves with speakers or wave drivers. It enables users to change both the frequency (0-800 Hz) and amplitude of the sine wave output. Both fine and coarse frequency controls are included and the digital display features a 0.1 Hz resolution. In addition, the generator can "learn" the fundamental frequency for a particular configuration. Students can observe the quantum nature of standing wave patterns as the Sine Wave Generator jumps from one resonant frequency to the next.

② 信號輸出端

Power Output
Standard banana jacks allow the Sine Wave Generator to be easily connected to other devices

⑥ 頻率增加量設定鈕

Frequency Increments
Use these buttons to store a frequency increment and scan through a frequency range by this increment.

① 電源開關

Power switch

③ 頻率顯示幕

LED Display
Red LEDs make the display easy to read with 0.1 Hz resolution.

⑤ 振幅調整鈕

Amplitude
Vary the amplitude of the sine wave.



Frequency Adjustment
Change the frequency by 1 Hz or 0.1 Hz increments.

④ 頻率設定鈕

圖6 PASCO WA9867正弦波產生器，信號頻率範圍為0 - 800 Hz。①Power switch: 電源開關；②Power Output：信號輸出端，使用標準的香蕉型插頭將所設定的正弦信號輸出至振動儀。③ LED Display：輸出信號之頻率顯示面板；④ Frequency Adjustment：信號頻率調整設定鈕，左邊旋鈕為 x 1 Hz 的頻率增加量，右邊旋鈕為 x 0.1 Hz 的頻率增加量。⑤ Amplitude：信號振幅調整旋鈕；⑥ Frequency Increments：此兩按鈕用以儲存頻率的增加量和頻率掃描的範圍。

(3) 待驅動體與振動儀連接或拆卸時的標準安裝程序

1. 先將位於振動儀頂端的驅動臂鎖桿切到「鎖定(Lock)」的位置，以使驅動臂保持在鎖定狀態，此時外部香蕉插座會和內部驅動軸脫離，使兩者處於互不相連通的分離狀態。如此當驅動臂在連接其他裝置時，可保護揚聲器內部的驅動軸免於因外部連接的動作過大而使之受損傷。
2. 將待振動的實驗裝置插接到振動儀的驅動臂上。
3. 將驅動臂鎖桿切換至「未鎖定(Unlock)」狀態。
若信號開始輸入振動儀，但鎖定滑桿未先切換到「未鎖定(Unlock)」狀態，則振動儀會產生非常吵雜的噪音，且起振後振盪儀的中心軸在上下跳動，物體也會呈現不規則的亂振現象，這些都是錯誤的現象。此時請立即關閉信號產生器的信號輸出，並將驅動臂鎖桿重新切換至「未鎖定(Unlock)」狀態後，再啟動信號輸入。
4. 將信號產生器的輸出信號連接到振動儀前端的香蕉型插座上。
5. 先將信號產生器的信號頻率和振幅調到最小值，觀察物體的振動，然後才因需要逐漸調振幅的量到可適當的量。振幅太大，對實驗的觀察不見得有幫助。
6. 當擬拆卸被振物體時，請將驅動臂鎖桿再切回「鎖定(Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。

7. 若擬另接一個物體到振動儀上，請再仔細地重複 1-6 的安裝步驟。

(4) 振動信號設定時需注意之事項

1. 駐波的模態、駐波圖案和形狀取決於振動體的材質、形狀、大小和密度分佈，以及振動信號的頻率。**和振動信號波的振幅大小無關**，故請適當地調整信號振幅的大小。通常低頻時，才需要較大的振幅，因低頻信號的波長比較長，單位長度的振動較不明顯，所以需要較大的振幅量。但高頻時，波長短，不需太大的振幅，且太大的振幅加以高頻率的振盪，易使振盪物體吸收太多的共振能量，導致振盪物體容易斷裂。當調至高頻時，記得將振幅隨之調小，只要調到能夠清楚觀察到波動現象即可。
2. 先從低頻開始起振，再慢慢改變信號頻率。頻率改變不能太快，被振物體需要足夠的時間調整其最後停留的位置。且通常共振頻率的頻寬範圍很窄，若頻率調變太快，容易錯過一些應會出現駐波的共振頻率，也無法獲得穩定且清晰的駐波圖案。
3. 二維駐波實驗中，使用細砂觀察駐波圖形。駐波圖案的型態雖僅和信號頻率及平板的大小和形狀有關，與細砂的特性沒有太大關係。但圖案形成的難易程度和清晰度則與振動波的振幅大小、細砂粒徑的大小、細砂粒徑的均勻度和細砂量則有密切的關係。欲得清楚穩定的共振圖案，除細砂的粒徑需夠細、粒徑需盡量均一外，細砂的量也需適量，過多或過少均不易得到清晰的駐波圖案。開始時細砂量不要多，實驗中可因需要逐漸添加細砂量。
4. 振動信號的振幅要適當。振幅太小，平板的振動振幅有限，細砂不易跳動。但振幅若太大，則細砂跳動幅度太大，不易穩定地停留在節點和節線上，導使駐波圖形不易穩定成形。開始時先使用小振幅，然後再逐漸調整波動振幅的量，使細砂得到平穩的跳動，形成穩定清晰的駐波圖案。不同頻率範圍，波動所需的適當振幅也不同，故隨頻率改變，隨時調整適當的振幅量。
5. 觀察克拉尼共振圖案時，因細砂量有限，請節省使用避免細砂流失，做完實驗請務必回收。

五、振動儀儀器使用注意事項

振動儀是本實驗中所有器材中最昂貴的部份，價格不菲，請小心使用。若發現振動儀無法振動或有異樣時，請檢查下列兩項事項：

- (1) 首先檢查保險絲。如果保險絲被燒斷，請務必更換相同規格的保險絲，保險絲規格為1安培，250伏特。且在替換後，請確認保險絲座已被完全鎖緊。
- (2) 若保險絲並未燒斷，則檢查保險絲座是否完全旋牢。

若以上兩步驟的檢查均沒問題的話，請向助教、老師或普物實驗室技術員報告，絕對不可自行拆卸振動儀。

因振動儀的振動傳動軸非常精細且敏銳，所以當在連接其他相關組件到振動儀的驅動臂上，以使之和驅動軸連接時；或擬將連接於驅動臂上的組件拆除時，很容易因過大的外力，而使驅動軸受傷。因此，請切記下列兩事項：

- (1) 不論是要連接配件到驅動臂上或擬從驅動臂上拆除配件時，請務必將振動儀上的**驅動臂鎖定桿(Driver arm lock/unlock tab)**裝置設定到「**鎖定(Lock)**」狀態，以使驅動臂上的連接插座與傳動軸被隔離，使傳動軸被鎖定，避免外力作用，以保護傳動軸使之避免於連接或

拆裝其他組件時受傷害。

- (2) 振盪信號開始輸入振動儀之前，也需注意振動儀上的**驅動臂鎖桿**裝置是否已轉「**未鎖定 (Unlock)**」狀態，若未切換到此狀態，則當啟動振動儀開關時，會產生非常吵雜的噪音。

實驗 26A：一維橫波弦振盪與其駐波共振

一、目的：

觀察在繩線上的橫波運動和共振現象，及產生駐波共振的條件，並探討波的傳播速率與繩線張力及繩線之線密度間的關係。

二、理論簡介(Theory)

In this experiment we study standing waves on a long rubber band stretched between fixed supports. These standing waves are similar to those produced in a guitar string when it is plucked, except that in the present experiment, we will continuously drive them so that they will not die out.

If one end of a long rubber band is subjected to forced periodic vibrations, traveling waves will propagate down the rubber band with velocity

$$v = (T/\mu)^{1/2}$$

where T is the tension in the rubber band and μ is the mass per unit (stretched) length of the rubber band. The wavelength λ is related to the frequency f of the driving force and the velocity of propagation v as $\lambda = v/f$.

Waves reflecting off the far end of the rubber band interfere with incident waves, and for certain driving frequencies a stable pattern emerges, characterized by fixed points of destructive interference (nodes) and constructive interference (anti-nodes). The condition for this to occur is

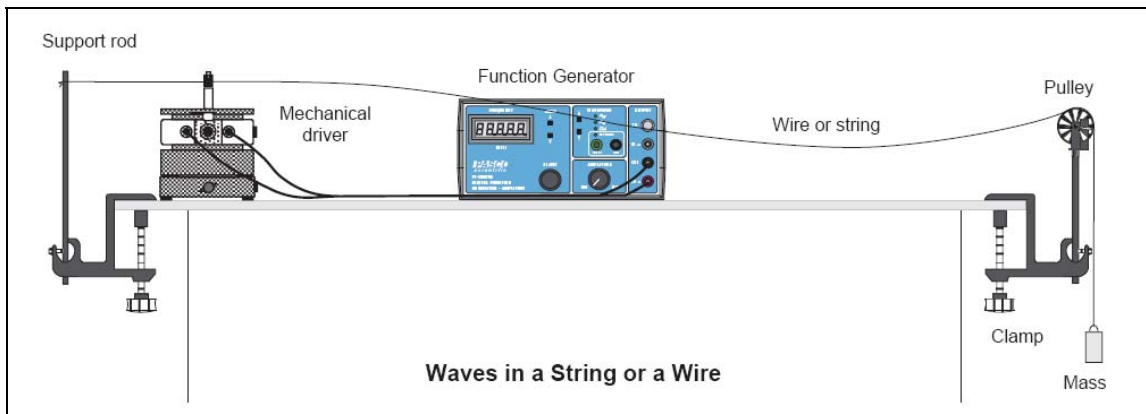
$$L = n \lambda/2, \text{ with } n = 1, 2, 3, \dots (\text{integer})$$

This tells us that only certain wavelengths (and thus only certain frequencies) can exist as stable patterns of excitation. These stable patterns are known as the “normal modes” of vibration of the system. We say that the system is “quantized.” [This happens all the time in the atomic world, described by quantum mechanics, where particles have wave properties.]

三、器材

1. 力波驅動儀(mechanical wave driver，簡稱振動儀)：一台
2. 正弦波產生器(Sine wave generator)：一台
3. 滑輪(Pulley)：一組
4. 桌邊固定支撐架(Support rods for being fixed on table sides)：兩組
5. 掛鉤(hanger)：兩個
6. 砝碼(Weights)：一盒
7. 不同線密度的繩線(Strings with various linear density)：數條

四、實驗裝置圖



(a) 一維弦振動實驗裝置示意圖



(b) 一維線性弦振動的儀器配置圖和其中一種典型的駐波現象

圖 9 一維線性弦振動：(a)實驗裝置示意圖，(b)實體照片和典型的共振現象。

五、實驗步驟

A. 使用相同的線，測量波速 v 與繩線所受之張力 T 間的關係

1. 取一段線密度均勻的繩線，測量繩線的總長度，並以精密天平稱量繩線的質量，並根據此兩數據，計算繩線的線密度(linear density) μ 。
2. 依圖 9 所示的實驗裝置圖，將繩線與振盪儀、信號產生器、滑輪和支撐架等實驗器材架構在實驗桌上。切記欲將繩線安裝到振動儀的驅動臂上之前，務必**先將振動儀頂端的驅動臂鎖桿切到「鎖定(Lock)」位置**，以使驅動臂保持在鎖定狀態。
3. 參考圖 8 所示和注意事項，將繩線繫於香蕉型插式接頭上，然後將香蕉插頭插入驅動臂上的插座內，使弦線連接至振動儀的驅動臂上。**注意：需避免有任何側向力(sideways force)作用在驅動臂上，故如果擬驅動含有張力的細線或繩子振盪，建議如圖 9(a)所示，將弦線的尾端水平地繫在堅固的支撐裝置上。**
4. 繩線的另一端經過一個幾乎無摩擦力的滑輪，使之由水平方向轉成垂直方向。在弦線的垂直尾端懸掛上一質量約 300 g 的砝碼。砝碼掛上之前，先以天平測量砝碼的實際重量，並根據此重量求算繩線所承受的張力(Tension) T 大小。
5. 將驅動臂的鎖定滑桿切換至「非鎖定狀態(Unlock position)」。

- 打開信號產生器的電源開關，選擇正弦波信號，並調整信號的振幅大小到適當值。信號頻率則從低頻開始啟動，然後慢慢增加頻率。仔細觀察繩線隨正弦波信號頻率改變，所發生的變化。
- 慢慢調整正弦波信號的頻率，找出至少四個不同的共振頻率，並紀錄因共振效應所產生的駐波圖形。分別紀錄下駐波的節點數目、節點位置、波腹位置、駐波的波長 λ 和共振頻率 f 。可參用表 1 的表格紀錄測量得的實驗數據，亦可自己設計實驗紀錄表格。
- 根據上述所得的實驗數據，計算振動波的傳遞波速 v 。
- 增加 50 克的砝碼重量，重複 4-8 步驟。
- 再重複步驟 9 三次，但每次增加 50 克的砝碼重量。
- 請繪出「波速 v 」和與「繩線之張力 T 」間的各种可能關係圖，如 v vs T 、 v^2 vs T 、 v vs T^1 或 v^2 vs T^1 等圖。您認為哪一個圖形最適合用來表示波速與繩之張力間的關係圖。
- 根據 11 步驟所得的圖形，找出 v 對 T 的關係式。同時並用 MS Excel 軟體中的最小平方誤差迴歸法(Least-square-fitting regression method)求算此關係式。比較兩種方式所得的結果。
- 另取一條線密度不同的繩線，重複 1-12 的實驗步驟。

表 1 繩線之線長：_____ m，線重：_____ kg，線密度 μ ：_____ kg/m。

順次 #	砝碼總重量 (g)	線之張力 T (nt)	節點數目 (#)	兩節點間距 (cm)	駐波波長 λ (cm)	共振頻率 f (Hz)	波速 v (m/s)	備註
1								
2								
3								
4								
5								

B. 保持張力 T 一定，測量波速 v 與振盪繩線之線密度 μ 間的關係

- 取一段線密度均勻的繩線，測量繩線的總長度，並以精密天平稱量繩線的質量，以此兩數據，計算繩線的線密度(linear density) μ 。
- 仍依圖 9 所示，將繩線與所需實驗器材組裝在實驗桌上。切記將繩線安裝到驅動臂之前，務必**先將振動儀上的驅動臂鎖定滑桿切滑到鎖定的位置("Lock" position)**。
- 懸掛質量約 500 g 的砝碼在繩線的垂直尾端。砝碼掛上之前，先以天平測量砝碼的實際重量，並根據此重量求算繩線所承受的張力(Tension) T 大小。
- 將驅動臂的鎖定滑桿切換至「非鎖定狀態(Unlock position)」。
- 開啟正弦波產生器，調整適當的信號振幅。信號頻率從低頻開始啟動，然後慢慢增加頻率，找出至少三個不同駐波的共振頻率，並紀錄因共振效應所產生的駐波圖形。分別紀錄下駐波的節點數目、節點位置、波腹位置、駐波的波長 λ 和共振頻率 f 。可參用表 2 的表格紀錄所測得的實驗數據，亦可自己設計實驗紀錄表格。

- 根據所得之數據，計算振動波的波速。
- 更換四種不同線密度的線，重複上述 1-6 的實驗步驟。
- 請繪出「波速 v 」與「繩之線密度 μ 」間之各種關係圖，如 v vs μ ， v^2 vs μ ， v vs $1/\mu$ 和， v^2 vs $1/\mu$ 等圖。您認為哪一個圖形是表示波速與繩之線密度間最佳的關係圖。
- 根據 11 步驟所得的圖形，找出 v 對 T 的關係式。同時並用 MS Excel 軟體中的最小平方誤差迴歸法求算此關係式。比較兩種方式所得的結果。
- 另取一條線密度不同的繩線，重複 1-12 的實驗步驟。

表 2 砝碼總重量：_____ g，線的張力 T ：_____ N。

順次 #	線長 (m)	線重 (g)	線密度 μ (kg/m)	節點數目 (#)	兩節點間距 (cm)	駐波波長 λ (cm)	共振頻率 f (Hz)	波速 v (m/s)	備註
1									
2									
3									
4									
5									

六、問題

- 為何細線不能直接繫在振動儀上，而一定要留一小段繩線使之與擬被振盪的部份水平地繫於桌邊的支撐架上？
- 請比較此實驗和上學期的弦振動實驗之間的差異。
- 本實驗中所用的振動物體均是線密度均勻的繩線，若繩線的線密度不均勻的話，請問會產生什麼樣的結果？
- 請列舉相關此實驗的應用，至少兩個以上？

七、參考資料

- 黃勝良、吳秀錦：「普通物理實驗課本」，實驗 10：弦振動實驗，10-1 至 10-7 頁，國立清華大學出版社，93 年 9 月出版。

實驗 26B 金屬長條片的橫波振盪

一、目的：

觀察不同長度之金屬長條片的橫波振盪，用以說明條狀材料上的駐波和諧波現象，以及探討金屬條的長度、共振頻率和共振圖形間的關係。此實驗可用以驗證細長之懸臂樑之長度和振盪頻率與波長間的關係，此即是以片條狀物體發音之樂器的基本工作原理，如鋼琴、木琴、鐵琴等樂器。並可藉此探討一般人眼和一般顯微鏡無法直接觀測得的奈米級與微米級之懸臂樑(Nano- and micro-scale cantilevered beam)的力學波振盪現象，故亦可藉此實驗，以瞭解懸臂樑的設計原理和工作原理。

二、器材

1. 力波驅動儀 (mechanical wave driver, 簡稱振動儀)：一台
2. 正弦波產生器(Sine wave generator)：一台
3. 金屬共振條(片)：使用PASCO SF-9404鋁製金屬片一組，此裝置中包含了六條長度不同，但單位長度之質量相同(即線密度相同)的長條金屬片。

三、實驗裝置圖

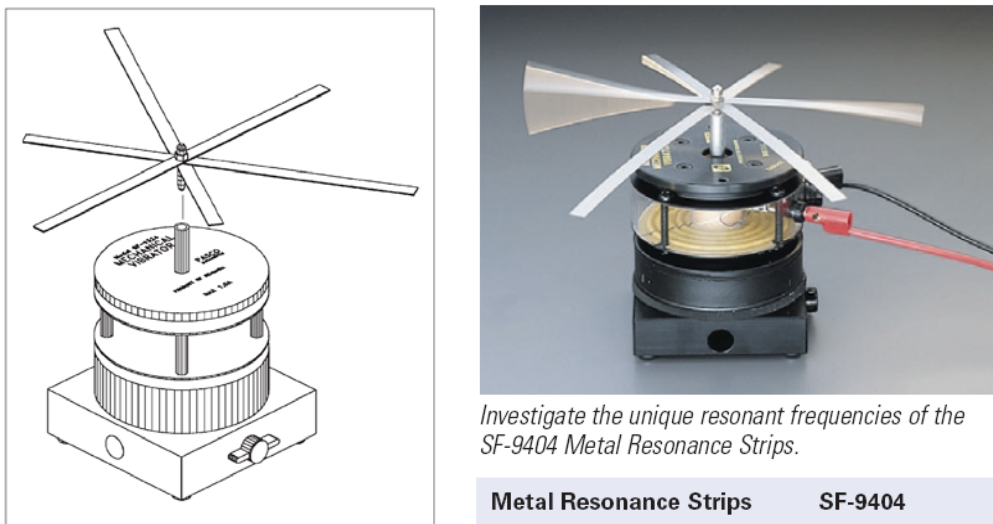


圖10 金屬共振條(片)與波動振動器的組裝圖和實體照片。

四、實驗步驟

1. 測量PASCO SF-9404金屬共振條(片)組上每一片金屬片的精確長度和寬度。
2. 旋轉六條金屬共振條的角度，使它們彼此之間的角度相同，如上圖10所示。
3. **將振動儀上的驅動臂鎖定滑桿切滑到鎖定的位置("Lock" position)後**，才如圖10所示，將金屬共振片組底部的香蕉形插頭插入振動儀之驅動臂上的香蕉插座內。然後，再將驅動臂的鎖定滑桿切換至「非鎖定狀態(Unlock position)」。
4. 將波形信號產生器的信號輸出端連接至振動儀的信號輸入。

- 以約5 Hz頻率的正弦信號啟動振動儀，然後緩慢地增加振動信號的頻率。觀察每一金屬片未固定之尾端隨信號振盪的情形，記錄下當尾端振盪振幅最大時的頻率，如圖10右側實體照片中左邊金屬條振盪振幅最大者所呈現的現象，此即該金屬片的共振頻率。共振達成時，可能必需調低驅動振幅的大小，以免驅動強度太強。可參用表3的實驗紀錄表格。
- 根據所測得的數據，畫出金屬共振片的長度和共振頻率的關係圖，並推導兩物理量間的關係式。探討實驗所得的關係圖和關係式。
- 改變六條金屬共振片彼此之間的角度，使它們彼此之間不再具有相同的角度，觀察角度對共振現象的影響。

表3 金屬片長度和共振頻率之關係測量實驗紀錄表

次序 #	金屬片長度 (m)	共振頻率-尾端振幅最大時之振盪頻率 (Hz)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

八、問題

- 請說明金屬共振片彼此之間的角度對共振現象的影響，並解釋其原因。
- 以此實驗的結果，說明以片條狀物體發音之樂器的基本工作原理，如鋼琴、木琴、鐵琴等樂器。
- 何謂懸臂樑？請根據此實驗結果解釋懸臂樑的設計原理和工作原理。
- 請列舉幾個奈/微米級懸臂樑的應用？

實驗 26C 環型駐波振盪與電子軌道運動

一、目的

觀察環形的力學駐波現象和產生共振的條件。此實驗除可用以探討環形樂器或其他相關共振系統的現象、工作原理和應用，如環形樂器的發音原理。更可根據此古典力學的駐波振盪現象，簡單地說明原子內之電子為何必須在一定的軌道半徑上繞原子核運轉，進而說明原子中電子能階必須不連續的原因，使同學得以深入了解量子力學中的波爾原子模型(Bohr's model of atom)。觀察環形的力學駐波現象，並根據此古典力學的駐波振盪現象，闡明波爾的量子原子模型，進而說明不連續之原子能階的原因。並用以研究其他有趣的共振系統。

二、理論

1913年，波爾(Bohr)提出著名的原子行星軌道模型。在這個模型裡，說明一個距原子核較遠的電子軌域的能量會比距原子核較近的軌域高。所以，當電子從較高能量的軌域躍遷至較低能量的軌域時，會放出輻射光。此模型揭開了原子光譜的秘密。

然而，原子僅會佔據某些能階的事實使得波爾與其他研究者感到困惑。在此之前，認為電子是一可以以任意半徑繞著原子核旋轉的粒子(依電子的速度或動能的大小決定繞行的軌道半徑)。但是事實並不是如此。若將電子當作一物質波(matter wave)，而不將之視為一個粒子來考慮的話，可說明電子為何僅能佔據不連續之特定能階的奧秘。

路易士·德布洛伊(Louis de Broglie)在1924年提出此物質波的構想。他認為每一物質皆有附有一波的存在，稱為物質波。物質波的波長反比於物質粒子的動量。波爾軌道存在於電子的物質波產生建設性增強的位置。從這個觀點看，電子被視為它的質量與電量分佈於環繞在原子核四周的一個駐波上。物質波的波長必須剛好滿足與軌道周長的特定關係，最內層軌域的周長為電子物質波的波長，第二層軌域的周長則為物質波波長的兩倍，以此類推。因每一個軌域的電子有其特定的速度，因此，物質波也擁有特定的波長。波爾的量子原子模型(Bohr's model of an atom)請參考附錄二。

PASCO 金屬線環在特定頻率下振動，則會產生圓形駐波，每一特定頻率對應一特定波長。環形的圓周和振盪信號的波長成整數關係時，才會產生共振現象，而在環上形成駐波。

三、器材

1. 力波驅動儀 (mechanical wave driver，簡稱振動儀)：PASCO SF-9324 一台
2. 正弦波產生器(Sine wave generator)：PASCO PI-9598 一台
3. 金屬環(wire loop)：PASCO SF-9405 直徑29 cm的鋁製金屬環一個。
4. L-型支撐架：一個，如圖11左圖所示，可用以將振動儀架離實驗桌面40公分高。

四、實驗裝置圖



圖11 金屬環圓共振實驗架設圖，圖中並顯示具有五個節點的典型駐波結果。

五、步驟

1. 將驅動臂的鎖定桿切到「鎖定(Lock)」態，然後如圖11所示，將金屬環上的香蕉型插頭插入振動儀的驅動臂上，使與驅動軸連接。
2. 將信號產生器的輸出信號連接到波動驅動器的信號輸入端接頭。
3. 驅動臂的鎖定桿切換至「未鎖定(Unlock)」態，使振盪的波動透過香蕉接頭傳送至金屬環。
4. 以約5 Hz的頻率與振幅為0.1公分的振動波啟動振動儀，並且慢慢增加振動頻率。仔細觀察金屬環上的振動隨振動信號之頻率改變的情形。
5. 當頻率逐漸增加時，金屬環會開始以不同的形式振動。在特定頻率時，會在金屬環上產生駐波現象，並可觀察到數個波腹(反節點, antinodes)和節點(nodes)，如圖11中照片所示。記錄下所有可以觀察到之駐波的共振頻率、對應的節點數目、兩節點間的距離或弧角。
6. 畫出節點數和共振頻率間的關係圖，並推導兩物理量間的關係式。
7. 金屬環上的駐波和節點觀察，可作為電子以不同半徑的球形軌道繞原子核做球體圓周運動，而產生共振頻率和具有特定之不連續能階的最佳圖解與說明。請試著說明兩者之間的對應關係。

實驗 26D 彈簧縱波振盪

一、目的

觀察彈簧的縱波振盪和其共振現象，並探討決定其共振頻率主要因素。

二、簡介

Features of standing waves such as nodes and antinodes can also be observed in a spring that is fixed at one end and vibrated at the other end. A longitudinal wave sent down the length of a spring can be seen as a zone of compression followed by a zone of rarefaction. The wave will eventually reflect off of the other end of the spring and travel back.

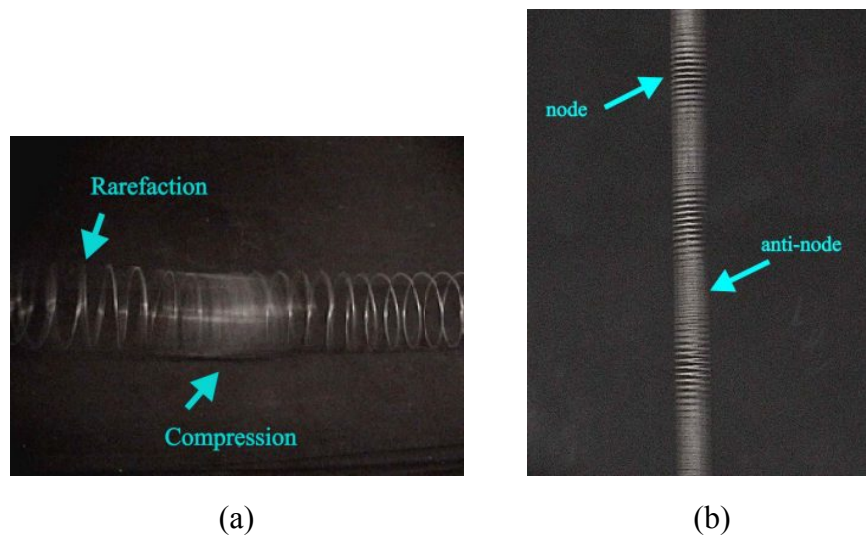


Fig. 12 Longitudinal standing wave in a spring

If a second wave is travelling out as the first wave is travelling back, the two waves will interfere with one another. If one end of the spring is oscillated at certain frequencies, a **standing wave** (or **resonance**) appears in the spring as shown in Fig.12. One then sees points on the spring which are standing still (**nodes**) and other points which are oscillating vigorously (**antinodes**).

Increasing the frequency of oscillation of the spring will make the spring oscillate chaotically. As the frequency of oscillation approaches another resonant frequency, standing waves again appear on the spring. This new oscillation mode (or standing wave pattern) has one more node than the previous one.

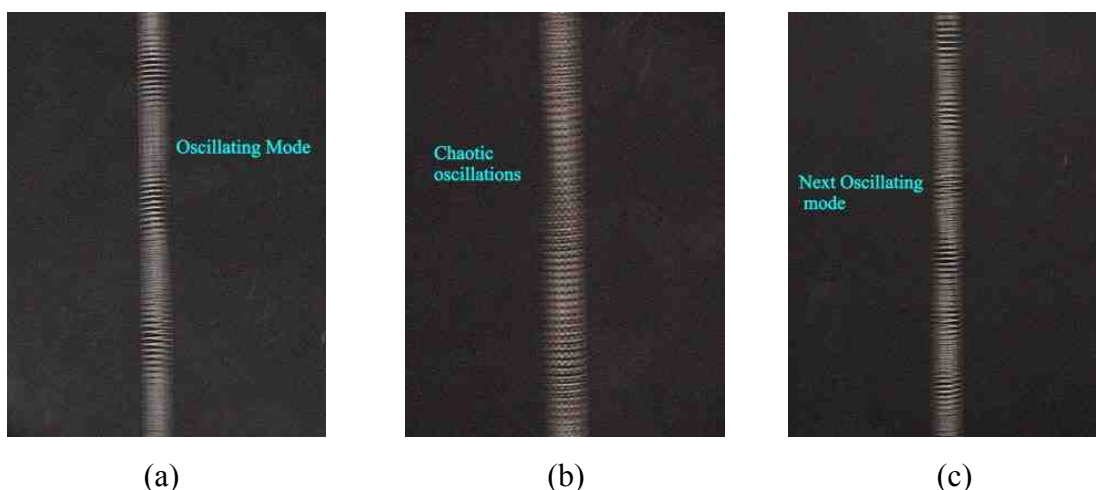


Fig. 13 The vibrating motion of the spring varies with the oscillating frequency increasing: (a) Resonance with a lower-order oscillating mode, (b) Chaotic oscillation, (c) The other resonance with a higher-order oscillating mode than that in (a).

三、器材

1. 力波驅動儀 (mechanical wave driver, 簡稱振動儀) : PASCO SF-9324 一台
2. 正弦波產生器 (Sine wave generator) : PASCO PI-9598 一台
3. 彈簧 (spring) : PASCO Model WA-9401 彈簧一個, 自然長度為 13 cm, 伸長量可達 30-60 cm。
4. L-型支撐架 : 一個, 如圖 14(a) 所示, 可用以將振動儀架離實驗桌面 40 公分高。

四、實驗裝置圖

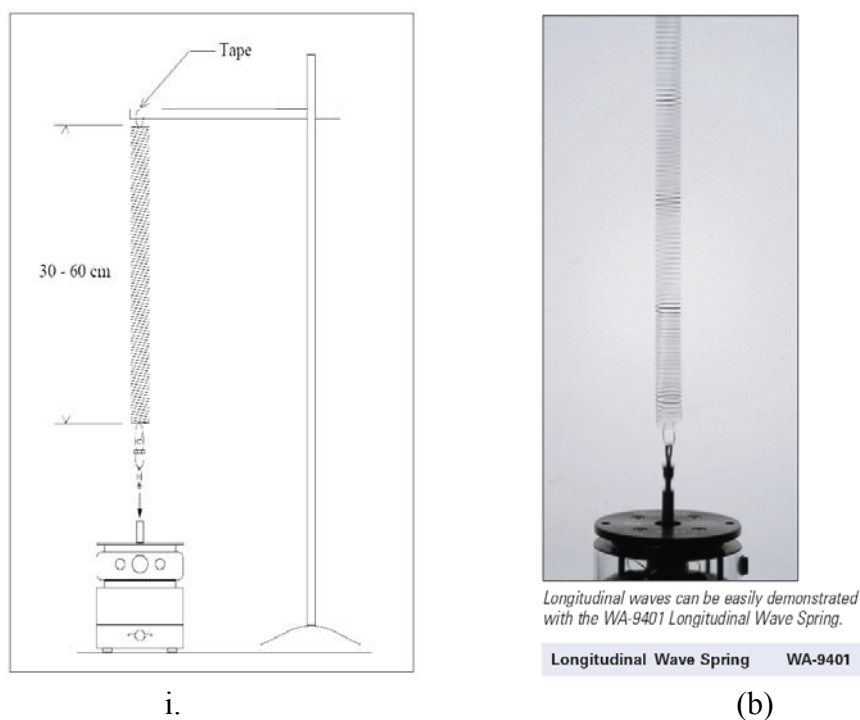


圖 14 (a) 彈簧縱波實驗儀器裝置圖, (b) 典型的縱波共振情形。

五、安裝及實驗步驟

1. 將彈簧的一端穿過香蕉型接頭上的洞口，使之鉤掛在香蕉接頭上。
2. 驅動臂的鎖定桿切到「鎖定(Lock)」態，將上一步驟接好彈簧的香蕉型接頭插入振動儀的驅動軸插座上。
3. 將彈簧的另一端以環狀支撐物或其他支撐物上，使彈簧如圖14(a)所示，垂直地懸掛起來，並使彈簧繩長約30~60公分。(為使彈簧一達到共振時，能夠保持穩定不晃動，則可能須將吊環與彈簧終端點用膠布黏牢。)
4. 將信號產生器的輸出信號連接到波動驅動器的信號輸入端接頭，並將驅動臂的鎖定桿切換至「未鎖定(Unlock)」態。
5. 以約10 Hz的頻率與約0.1公分的振幅信號開始啟動振動儀，然後再慢慢增加頻率。在不同的頻率下，會發現到彈簧的部分地方似乎是靜止的(此即節點)，有些卻是振動得很劇烈(此即波腹點)。當頻率增加，節點數與腹點數也隨之增加，而節點和波腹點之間的距離則隨之變短。當彈簧達到共振現象時，可能需要調低驅動波的振幅。**注意：在觀察節點與腹點時，最好是有空曠明亮的背景，如以淡色的牆壁或淡色的壓克力平板作為實驗觀察的背景。**
6. 畫出節點數與共振頻率的關係圖，將所得之結果與理論作詳細的比較與分析。
7. 驅動臂的鎖定桿切到「鎖定(Lock)」態，改變四次不同的彈簧長度(也就是改變彈簧的張力)，分別重複1-6的實驗步驟，觀察產生相同節點數時，共振頻率是否不同。記錄實驗數據。
8. 繪出產生固定不同節點數時，彈簧長度和共振頻率間的變化圖，將所得之結果與理論作詳細的比較與分析。

實驗 26E 二維共振之克拉尼圖形

一、目的

觀察不同形狀之平板的二維駐波振盪和共振圖案，此即著名的克拉尼圖案。此實驗之現象和簡易的實驗步驟，常用以說明平面式樂器、鼓器和小提琴等樂器的工作原理，目前並被大量應用在這些相關樂器的設計和共振頻率的測量上。類似的實驗技巧更被用以檢測物體表面密度分佈、表面應力分佈的情形和尋找人眼無法觀測到的物體缺陷所在處等等。更被藉以延伸對電磁波在物質中傳播時的瞭解，並探討無法直接以肉眼觀察的電磁波共振情形，瞭解傳播物質之邊界條件對電磁波共振的影響。

二、簡介

一條弦在共振頻率振動時，會在弦上固定的等間隔處產生節點與波腹點，而形成駐波。波動在二維介質中傳播，所產生的振盪可製造出更多樣化複雜的二維駐波圖案，例如金屬平板或鼓皮振盪所產生的多樣化駐波圖案。

十九世紀初期，克拉尼(Ernst Chladni)發展出一種可以觀察二維振動波形的簡易技術。他將均勻的細砂撒在一片平板上，然後以小提琴的弓在平板的邊緣拉彈，以使平板產生特定頻率的振動。此時可觀察到細砂會停留在沒有振動產生的節線(nodal lines, 節點的集合)上。不在節線上的細砂會隨著波動的振盪持續跳動，直到細砂彈跳到節線處，並停留在不會振動的節線上。若振動的平板具有均勻的密度且對稱的形狀，則當施予的波動頻率改變，共振圖案會隨之立即跟著變化，而呈現各種不同的對稱圖案。

三、二維克拉尼圖形(2D Chladni Patterns, Written by [Paul Bourke, March 2003](#))

Ernest Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827) performed many experiments to study the nodes of vibration of circular and square plates, generally fixed in the center and driven with a violin bow. The modes of vibration were identified by scattering salt or sand on the plate, these small particles end up in the places of zero vibration. Ernst Chladni first demonstrated this at the French Academy of Science in 1808, it caused such interest that the Emperor offered a kilogram of gold to the first person who could explain the patterns. Fig. 15 is a drawing from Chladni's original publication for the resonance patterns of a square plate and violin-shape plate. Fig. 16 is the Chladni patterns of a square plate published by John Tyndall in 1869.

Chladni patterns are a classic resonance demonstration in a 2 dimensional plate. You can visualize the nodal lines of a vibrating elastic plate by sprinkling sand on it: the sand is thrown off the moving regions and piles up at the nodes. Normally, the plate is set vibrating by bowing it like a violin. It helps to put your fingers on the edge to select the mode you want, much like fingering the strings of a violin. This takes some practice.

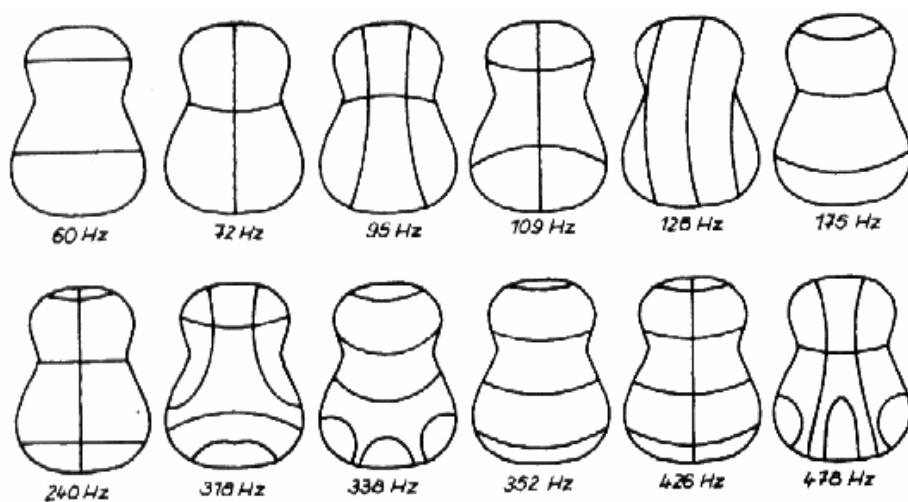
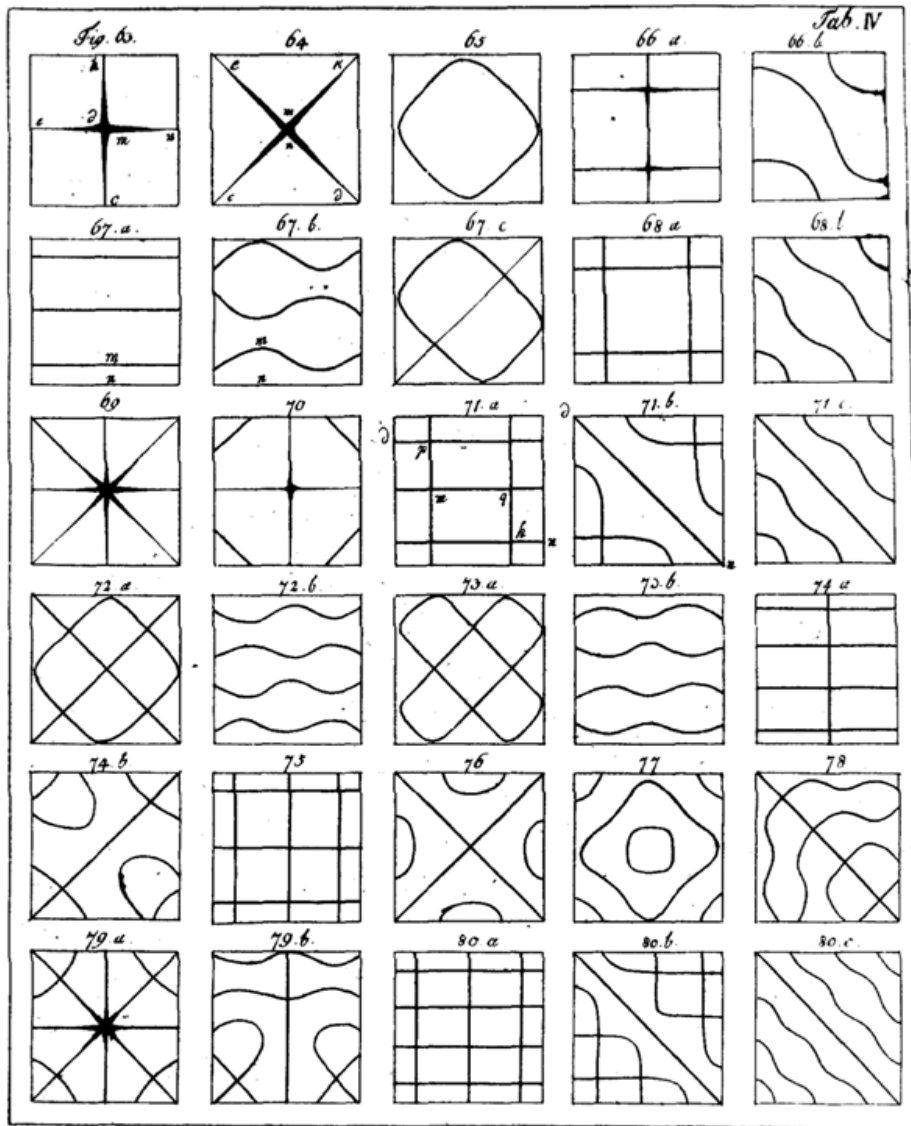


Fig. 15 The resonance patterns of a violin-shape plate and a square plate were drawn from Chladni's original publication.

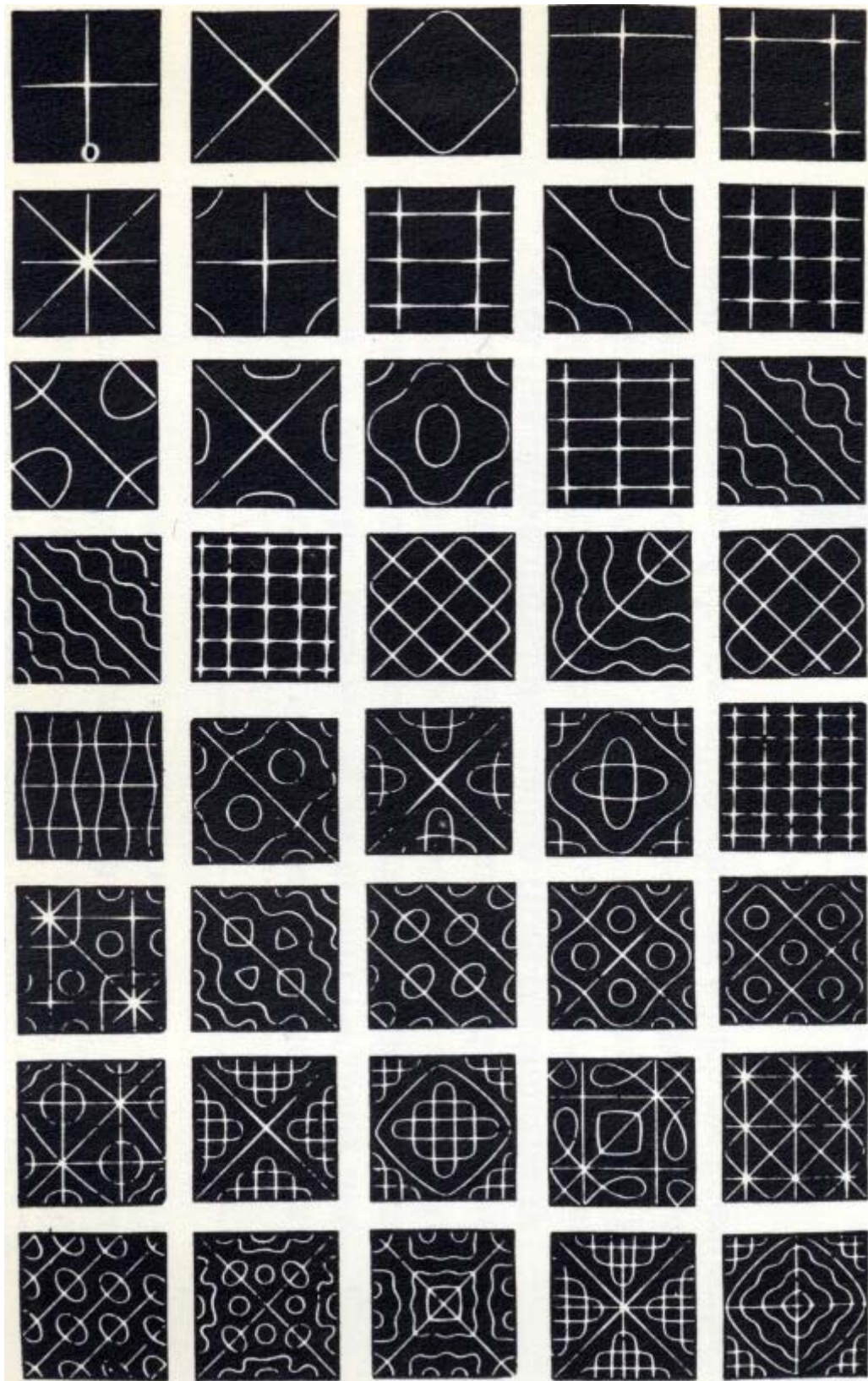


Fig. 16 Chladni patterns published by John Tyndall in 1869.

The basic experiment that is given the name "Chladni" consists of a plate or drum of some shape, possibly constrained at the edges or at a point in the center, and forced to vibrate historically

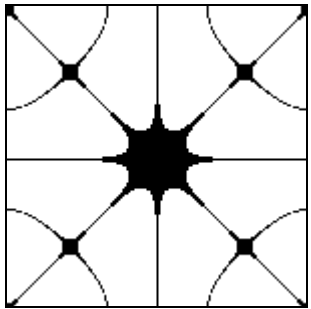
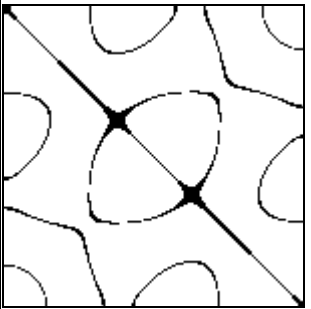
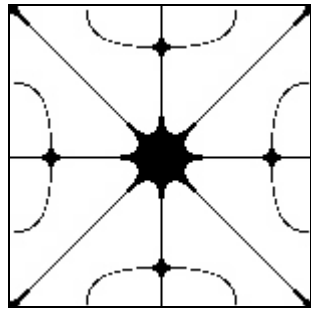
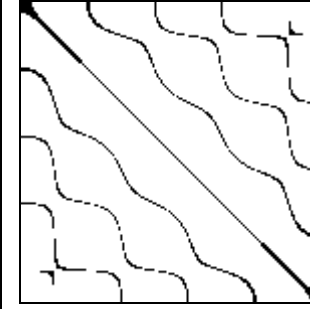
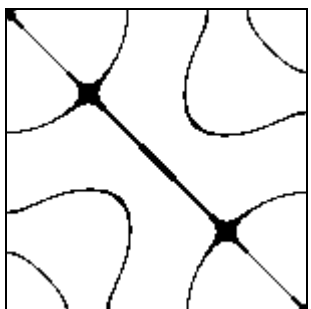
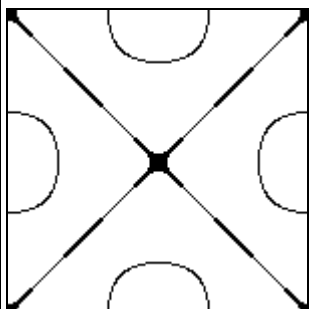
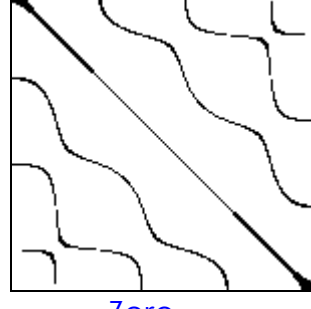
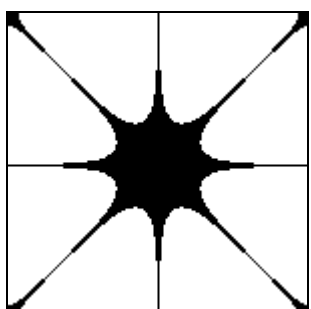
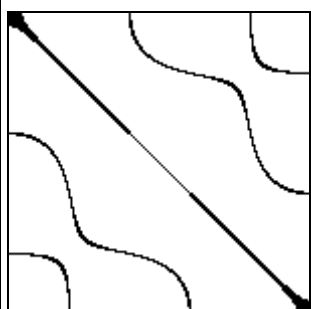
with a violin bow or more recently with a speaker. A fine sand or powder is sprinkled on the surface and it is allowed to settle. It will do so at those parts of the surface that are not vibrating, namely at the nodes of vibration.

(1) Standing wave on a square Chladni plate (side length L)

The equation for the zeros of the standing wave on a square Chladni plate (side length L) constrained at the center is given by the following.

$$\cos(n\pi x/L) \cdot \cos(m\pi y/L) - \cos(m\pi x/L) \cdot \cos(n\pi y/L) = 0$$

where n and m are integers. The Chladni patterns for n, m between 1 and 5 are shown in Fig. 17, click on the image for a larger version or click on the "continuous" link for the standing wave amplitude maps. Note that the solution is uninteresting for $n = m$ and the lower half of the table is the same as the upper half, namely $(n_1, m_2) = (n_2, m_1)$.

m	1	2	3	4
N = 5	 <p>Zero -- Continuous</p>	 <p>Zero -- Continuous</p>	 <p>Zero -- Continuous</p>	 <p>Zero -- Continuous</p>
4	 <p>Zero -- Continuous</p>	 <p>Zero -- Continuous</p>	 <p>Zero -- Continuous</p>	
3				

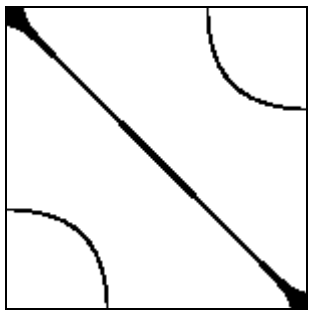
	Zero -- Continuous	Zero -- Continuous		
2				
	Zero -- Continuous			

Fig. 17 Various Chladna patterns on a square plate. (圖 17 正方形平板的各種克拉尼圖案)

Without the constraint in the center the modes are somewhat less interesting, the results are shown in Fig. 18 for $m = 1$ and $n = 1$ to 4. The solution is given by:

$$\sin(n\pi x/L_x) \cdot \sin(n\pi y/L_y) = 0$$

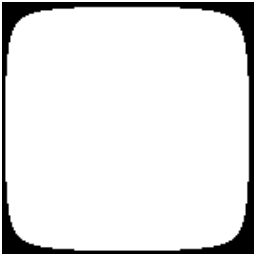
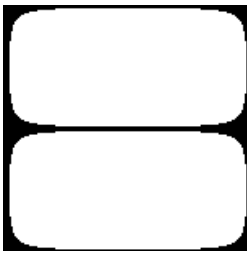
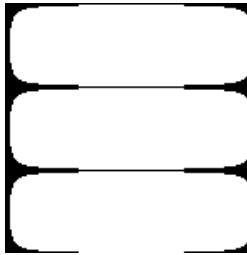
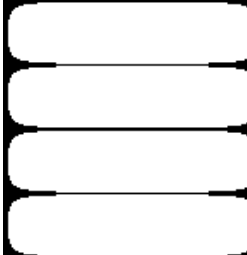
m	1	2	3	4
n / 1				
	Zero -- Continuous	Zero -- Continuous	Zero -- Continuous	Zero -- Continuous

Fig. 18 The Chladna patterns on a square plate for $m = 1$ and $n = 1$ to 4.

(2) Circular plate

For a circular plate with radius R the solution is given in terms of polar coordinates (r, θ) by

$$J_n(Kr) [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)]$$

Where J_n is the n 'th order Bessel function. If the plate is fixed around the rim (eg: a drum) then $K = Z_{nm} / R$, Z_{nm} is the m 'th zero of the n 'th order Bessel function. The term " $Z_{nm} r / R$ " means the Bessel function term goes to zero at the rim as required by the constraint of the rim being fixed.

Some examples of the node of a circular plate are given in Fig. 18.

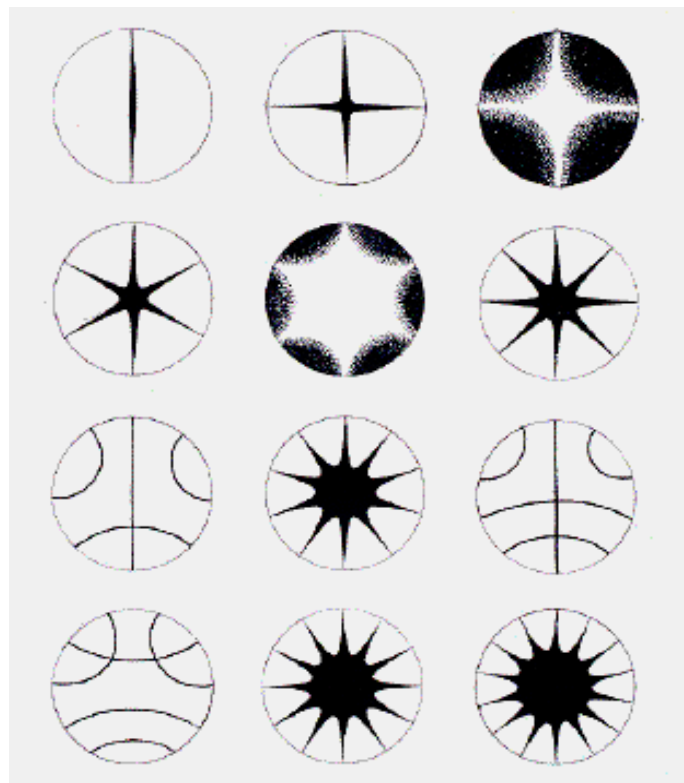
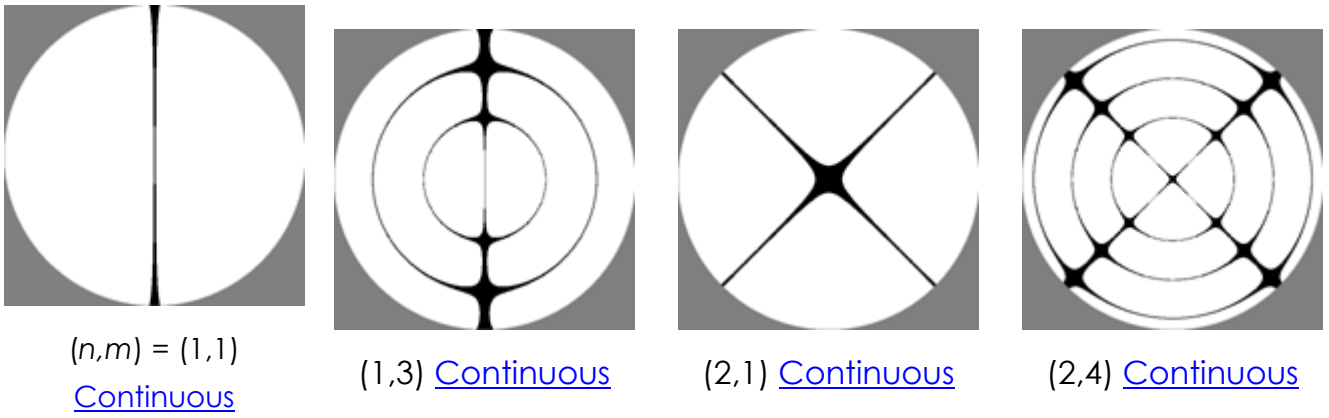


Fig. 18 The Chladni patterns and the nodes of a circular plate

You can make a nice modernized version of this demonstration using an electromagnetic shaker, essentially a powerful speaker. Chladni patterns can also be formed by using circular or rectangular metal plates on a mechanical driver controlled by a signal generator. This method avoids having to practice your bowing. The patterns are now different since they have antinodes at the center (which is being vibrated) rather than nodes with the center rigidly attached and the edge bowed.

Using electromagnetic shaker you can vibrate much larger plates to much higher and purer modes. The shape of the plate is important. The usual demonstrations are round and square plates. Here are some sample patterns: all the plates were 0.125 inch thick Aluminum, painted black.

(1) Round plate (70 cm across, held at centre, bowed): [10 spoke pattern](#), [14 spoke pattern](#)

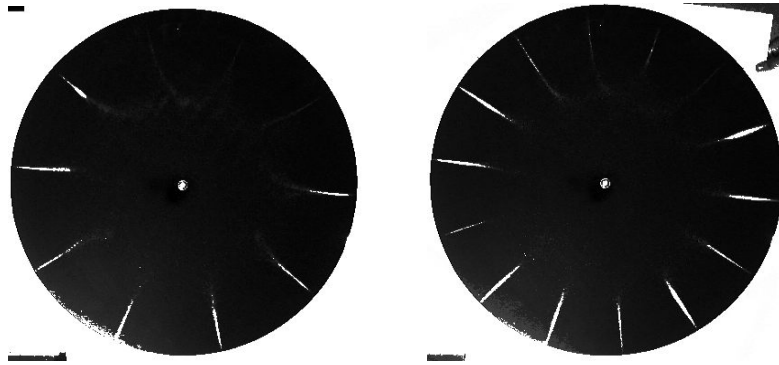


Fig. 19

(2) Square plate (70cm on a side, driven from centre with shaker, frequencies in Hz):

(a) [142.2 Hz](#), (b) [225.0 Hz](#), (c) [1450.2 Hz](#), (d) [3139.7 Hz](#), (e) [3678.1 Hz](#), (f) [5875.5 Hz](#).

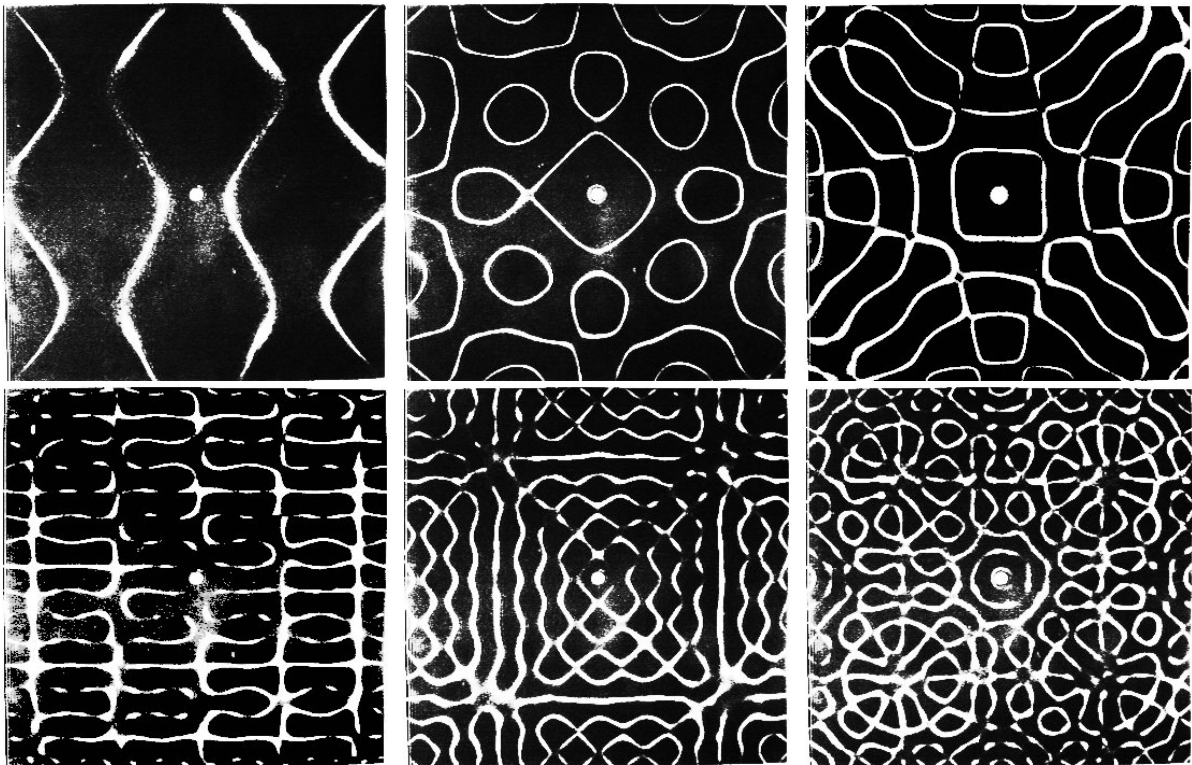


Fig. 20

A more interesting shape is a *stadium*: a square with rounded endcaps.

(3) **Stadium plate** -70cm across, driven from centre with shaker, frequencies in Hz)

[387.8](#) , [519.1](#) , [649.6](#) , [2667.3](#) , [2845.0](#) ("superscar") , [3215.0](#) , [4583.0](#) , [6005.3](#) , [7770.0](#) ("bow tie mode").

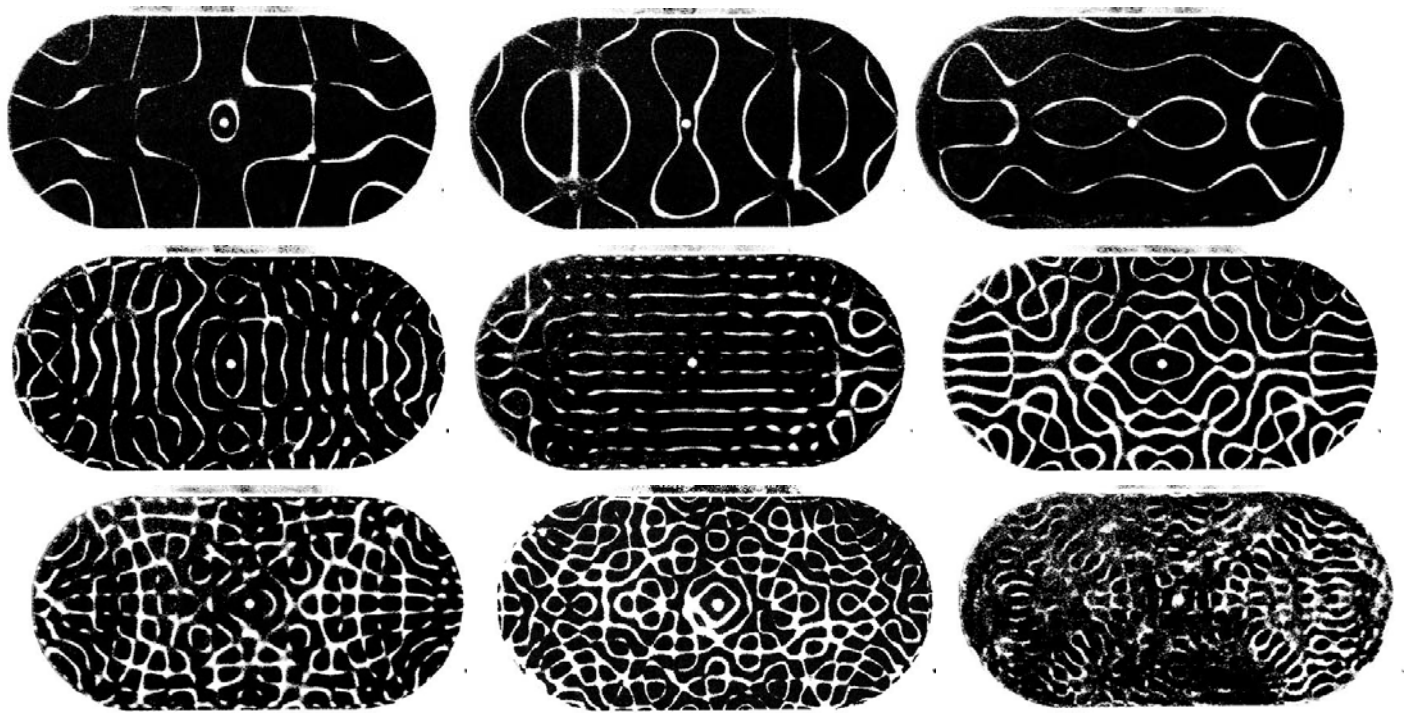


Fig. 21

(4) Finally, getting back to our musical roots, we built a plate in the shape of a large violin. Here are some patterns:

- **Violin shaped plate** (120cm long, driven from centre with shaker, frequencies in Hz)
[145.2](#) , [268.0](#) , [762.4](#) , [954.1](#) , [1452.3](#) , [1743.5](#) , [2238.6](#) .

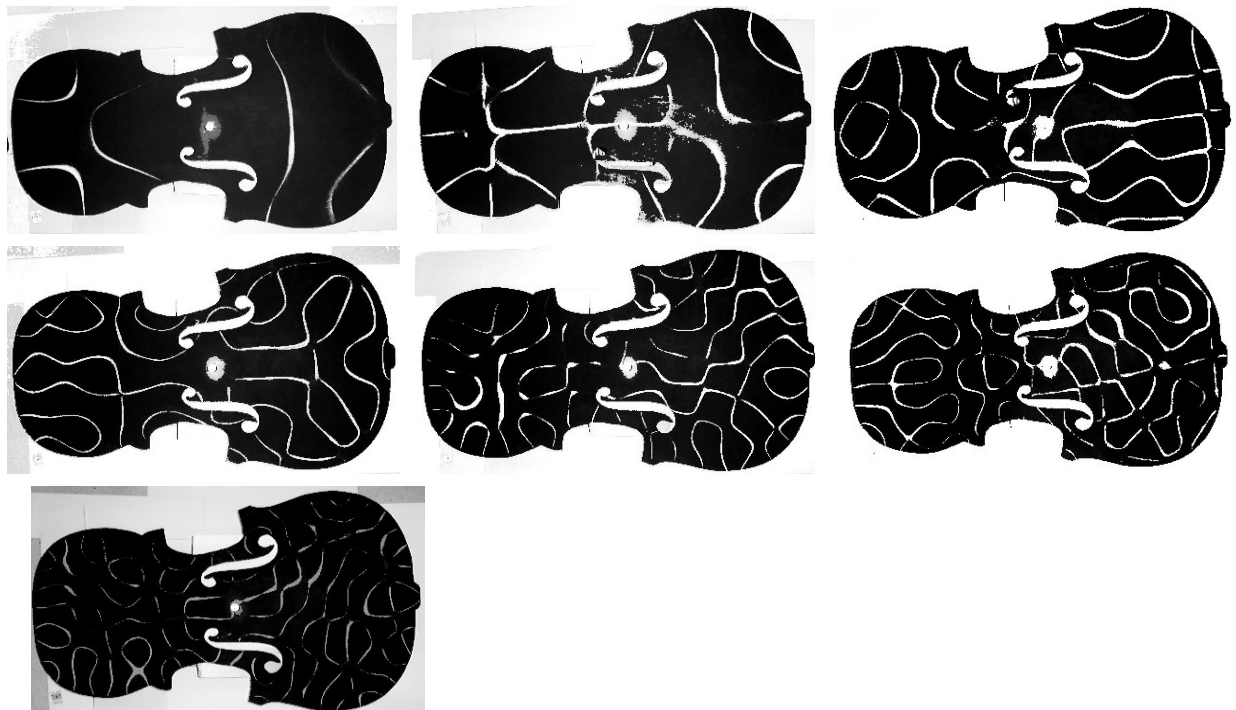


Fig. 22

四、實驗器材

1. 振動儀：PASCO SF-9324力波驅動儀一台
2. 正弦波產生器(Sine wave generator)：PASCO PI-9598一台
3. 24 x 24 cm² 正方形鋁製平板：PASCO WA-9607 方形克拉尼平板，見圖 3(a)或圖 15(a)。
4. 直徑 24 cm 圓形鋁製平板：PASCO WA-9607 圓形克拉尼平板，見圖 3(b)。
5. 小提琴形鋁製平板：PASCO SE-7319 小提琴形平板，長約 40 cm，見圖 3(c)或圖 15(a)。
6. 專用細沙：觀察二維克拉尼圖形共振用
7. 灑(撒)砂瓶：一個，觀察二維克拉尼圖形共振用

五、實驗裝置圖

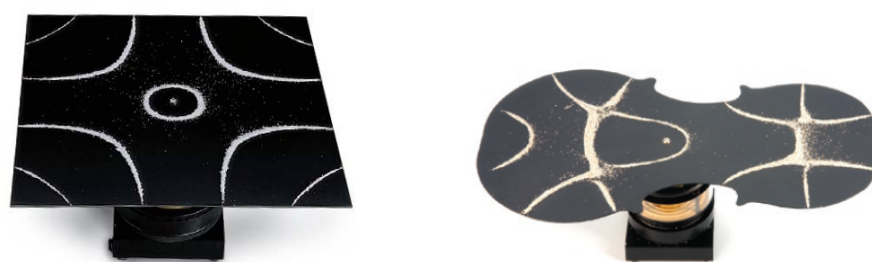


圖 23 二維克拉尼共振實驗裝置圖。

六、實驗步驟

1. 將振動儀器上的驅動臂鎖定搖桿(driver arm lock tab)切到「鎖定(Lock)」狀態。
2. 如圖23的實驗裝置圖所示，將24 x 24 cm²正方形鋁製平板上的香蕉插座直接插入位於驅動器上之驅動臂的香蕉型接頭上，使克拉里尼平板連接到驅動器的傳動軸上。
3. 以水準儀校正克拉里尼平板的水平，克拉里尼平板必須盡量處於水平狀態。若水平情況太差的話，則在平板尚未開始振動之前，撒上細砂，細砂便會往較低的一側滑動。若有一點不水平的話，則在開始振動後，即使會有駐波圖案形成，但細砂會因重力作用，而容易往較低的一側跳動，以致僅能顯示一部份的駐波圖案，使得所觀測到的駐波圖案不完整、不對稱、不均勻。
4. 使用撒砂瓶將細砂均勻地撒於克拉里尼平板上，剛開始時，不需要灑太多，當金屬平板開始振動後，可因需要再陸續撒一些細砂於平板上。細砂量的多寡以能清楚地觀察到駐波圖案來決定。太多細砂，否則不易形成駐波圖案，或所呈現的駐波圖案不明顯、不清晰。
5. 將振動儀上的驅動臂鎖定搖桿切換到「未鎖定(Unlock)」狀態。
6. 將信號產生器的輸出信號連接至振動儀，並開始啟動信號產生器送出信號，實驗過程中請注意下列幾件事項：
 - (1) 駐波圖案的形狀決定於平板的形狀、大小、振動的頻率和平板的密度分佈。和振動的

振幅大小及細砂的量無關。

- (2) 但駐波圖案形成的難易程度和圖形的清晰度則和振動波的振幅、細砂的粒徑大小、細砂粒徑的均勻度和細砂量則有密切的關係。除細砂的粒徑需夠細、粒徑需盡量均一外，細砂的量需適量，過多或過少均不容易得到清晰的駐波圖案。所以，一開始細砂的量不要多，在實驗過程中，因需要再逐漸添加細砂的量即可。
 - (3) 振動信號的振幅也要適當。振幅太小，平板的振動振幅有限，細砂不易跳動。但振幅若太大，則細砂跳動幅度太大，不易穩定地停留在節點和節線上，導致駐波圖形不容易穩定成行。所以，一開始先使用小振幅，然後再再慢慢調整波動振幅的量，使細砂能得到平穩的跳動，且能夠形成穩定清晰的駐波圖案為準。另也要注意，不同的頻率範圍，波動所需的適當振幅也不同，故隨頻率的改變，也需隨時重新調整適當的振幅量。
 - (4) 本實驗中所使用的三種克拉里尼平板的適當振動頻率範圍均在100 Hz 至5 kHz，更高頻率範圍當然也會有共振現象產生，但太高頻的共振，所獲得的共振節線將會太密或太複雜，以致在此三個平板尚無法呈現明顯清晰的共振圖案。每一金屬平板，因其面積大小不同和形狀不同，而會有不同的最低共振頻率，稱之為基本頻率(fundamental frequency or base frequency，或簡稱基頻)。
 - (5) 實驗開始之前，請先估計各金屬平板的最低共振頻率。實驗開始之際，先從低頻開始起振，至少需低於基頻的頻率。然後慢慢地改變振動信號的頻率，將會發現金屬平板因不同的共振模態，而產生各種不同形狀的共振駐波圖形。
 - (6) 切記頻率的改變不能太快，因細砂受平板振動，需要足夠的時間跳動到節點或節線上，並調整其最後停留的位置。且通常共振頻率的頻寬範圍很窄。所以，若頻率調變的太快的話，很容易錯過一些原本應該會出現駐波的共振頻率。此外，也無法獲得穩定且清晰的駐波圖案。
7. 請就本實驗所用的正方形金屬鋁板的共振實驗結果，紀錄下如圖15-17中所繪出之各種克拉尼圖形的共振頻率。可直接將數據記錄在圖15-17的空白處。
 8. 另取圓形金屬平板和小提琴型平板，重複1-7步驟。
 9. 方形金屬平板上不均勻的受力點或定點的特殊張力對共振頻率與駐波圖形的影響觀測：
(以下以手指之力所提供的作用力，可改以作用力勁足夠的小鋼夾取代之)
 - (1) 先選擇一具特定共振模態的共振頻率，並記錄下此共振頻率時的駐波圖案。最好先選擇駐波圖案簡單且對稱高的共振頻率和模態。
 - (2) 用手指抓緊金屬平板其中一個邊緣的中心點，觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
 - (3) 改變金屬平板的受指力的位置，使受力位置離邊緣的兩端點分別為1/4和3/4的位置，再度觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
 - (4) 以手指之力，在金屬平板的任一邊上的任一位置受力，觀察此共振頻率與駐波圖形的受此指力影響情形。

- (5) 以手指抓緊平板內部不同的位置，再度觀察共振頻率和圖形的變化情形。
- (6) 另選擇三種不同共振模式的共振頻率，重複(1)至(5)實驗步驟的觀察。
10. 觀測圓形金屬平板上不均勻的受力點或定點的特殊張力對共振頻率與駐波圖形的影響：
(以下以手指之力所提供的作用力，可改以作用力勁足夠的小鋼夾取代之)
- (1) 同樣先選擇一具特定共振模式的共振頻率，並記錄下此共振頻率時的駐波圖案。盡量選擇駐波圖案簡單且對稱高的共振頻率和模式。
- (2) 用手指抓緊圓形金屬平板邊緣的任一點位置，觀察此一定點作用力對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
- (3) 一位同學用兩隻手在圓形金屬平板一直徑兩端的邊緣，以手指緊夾之力使之分別受力，再度觀察此兩定點受力後對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
- (4) 讓手指之力作用在圓形金屬平板內部的任一位置點，觀察此共振頻率與駐波圖形的受此指力影響情形。
- (5) 以手指抓緊圓形平板內部，距離圓心不同遠近時的位置，再度觀察共振頻率和圖形的變化情形，並觀察距圓心距離不同時，對共振頻率和駐波圖形的影響變化又如何。
- (6) 一位同學用兩隻手在圓形金屬平板一直徑兩端的邊緣，以手指緊夾之力使之分別受力，再度觀察此兩定點受力後對共振頻率的影響，並觀察駐波圖形如何改變。
- (7) 移動兩受力點的相對位置，觀察共振頻率的影響，及駐波圖形變化的情形
- (8) 另選擇三種不同共振模式的共振頻率，重複(1)至(7)實驗步驟的觀察。
11. 當振盪波動係經由偏離圓心的位置(off-center position)傳送到圓形金屬平板時，觀測圓形金屬平板之共振頻率與駐波圖形的變化，鬆開原鎖定在圓形金屬平板圓心上的香蕉插座，然後將香蕉插座鎖定於偏離圓形平板中心的小洞上，將可觀察到非圓中心對稱性的駐波圖形。

七、問題

- 請利用日常生活中容易取得的物品，自己設計一個簡單型且可在家自己組裝的克拉尼圖形實驗裝置。請仔細說明您所使用的器材、組裝結構、實驗步驟和所量測到的實驗結果，並與本實驗之結果作比較。
- 請利用本實驗中不同長度之金屬長條片的橫波振盪實驗，(a) 解釋鋼琴的工作原理；(b) 說明目前熱門之奈米懸臂樑的設計原理和工作方式。(c) 列舉懸臂樑的應用。
- 請探討本實驗中的每一個子實驗的應用，每一實驗至少需提出一項應用，並說明如何應用。可上網查詢。

九、參考資料與網站

- 參考 <http://www.ziped.org/index2.php?&file=cool.salt.wmv> 網站，並連接至影片檔案播放，即可觀賞到在方形金屬板上之 Chladni Patterns 隨外加振動頻率變化所產生的一連串圖形

變化。是一部非常完整的實驗紀錄影片。

2. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces_curves/chladni/index.html
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni,
4. <http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html>: Examples with round, square, stadium plates and violin shapes
5. http://www.physics.montana.edu/demonstrations/video/3_oscillationandwaves/demos/chladniplates.html: Chladni plates
6. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces_curves/chladni/index.html: Chladni Plate Mathematics by Paul Bourke
7. <http://www.fas.harvard.edu/~scidemos/OscillationsWaves/BigChladniPlate/BigChladniPlate.html>: Electromagnetically driven Chladni plate
8. <http://www.violin-maker.co.uk/construction.html>: Use of Chladni patterns in the construction of violins
9. http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni_engl.html: Chladni patterns for guitar plates
10. <http://www.zipped.org/index2.php?&file=cool.salt.wmv>: A vibrating table, sprinkled with salt, forming Chladni patterns.
11. Rossing T.D. (1982) *Chladni's Law for Vibrating Plates*, American Journal of Physics 50, 271–274.
12. William C. Elmore and Mark A. Heald. *Physics of Waves*. New York: Dover Publications.
13. Hutchins, C.M., The acoustics of violin plates. *Scientific American*, Oct.1981, 170-176.
14. Fletcher, N.H. & Rossing, T.D., *The Physics of Musical Instruments.*, Springer-Verlag, New York, 1991.
15. Marvin U.B. (1996) *Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756–1827) and the origins of modern meteorite research*, *Meteoritics & Planetary Science* 31, 545–588

九、備註

為了更深入的探究克拉里尼圖形，你可能會想自行製作屬於自己的克拉里尼平板。們建議可以從厚度大約0.035" (= 0.0889 cm, 1" = 2.54 cm)的鋁片開始著手，但您可能會發現使用其它材質所製作的平板作實驗會可能更有趣。亦可以自製不同形狀的平板，如長方形、橢圓形、骨頭形、等等。記住厚度不宜太厚，否則振不起來。面積也不宜太大片，以免中心的振動振幅較大，但傳到邊緣，振動振幅會衰減太多，以致波動消失了。也平板厚度不宜太薄，面積也不宜太小，以免能夠觀察到的節點和節線有限，且駐波的圖案也有限。

附錄一：振動儀的使用說明

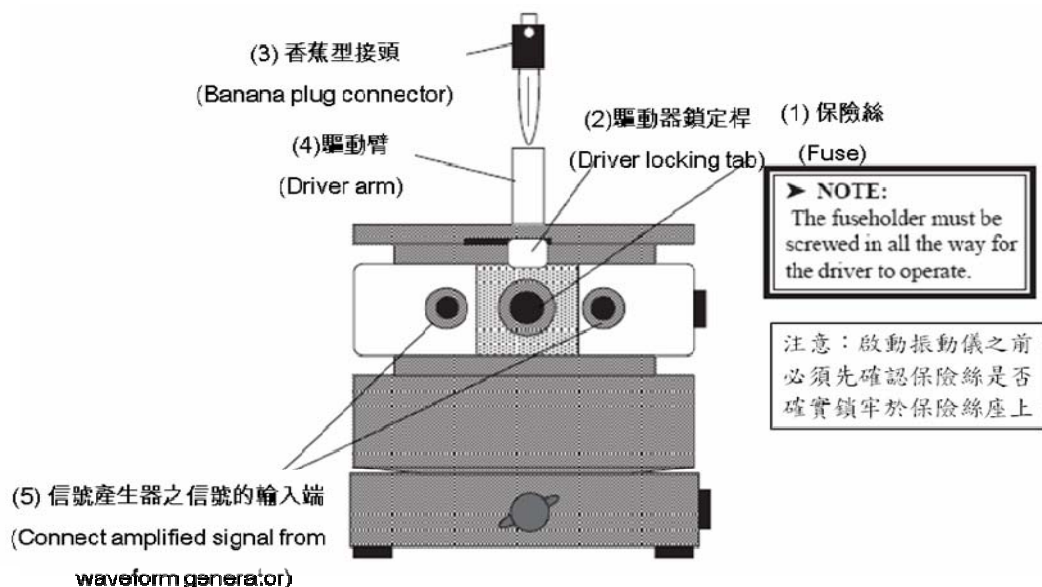
一、振動儀簡介

PASCO SF-9324 可變頻力學波驅動器(以下簡稱振動儀)的實體照片和結構圖分別顯示於圖A1。圖1至圖3則顯示本實驗中將使用之各種振盪物體與振動儀間的實際連接方式。

振動儀的主要部份是一個可提供大強度震波且可將震波遠傳的揚聲器裝置，並附有一個驅動臂(Driver arm)。儀器本身並不具有信號振動源，所需振動源來自外接的信號產生器。透過信號產生器輸出的交流信號，能簡易地使振動儀提供不同波形、不同頻率和不同振幅的力學振盪波。再透過振動儀將振動波傳送給其他物體(透過如圖 5 所示的香蕉型接頭連接)，以進行在不同物體上的波動實驗。振動儀的振動頻率範圍為 0.1 Hz 到 5 kHz。當振動頻率在最低頻率(~ 1 Hz)時，峰對峰的振動幅度(peak-to-peak vibrating amplitude)可達 7 mm。振動儀可接收正弦波、方波、三角波或是鋸齒波等各種不同波形的波源，但本實驗僅使用正弦波。此一類似揚聲器的振動裝置之儀器規格如下：

- (1) 可接受的信號振動頻率範圍：0.1 Hz - 5 kHz
- (2) 可提供的波峰對波峰振幅(peak-to-peak amplitude)：頻率 1 Hz 時，為 7 mm。振動振幅會隨頻率遞增而遞減。
- (3) 輸入阻抗(input impedance)：8 Ω (8 歐姆)
- (4) 最大承受電流(maximum current)：1 A (安培)，受限於保險絲。
- (5) 標定電流(Rate current)：< 0.25 A
- (6) 最大輸入電壓(maximum input voltage)：0.8 A 電流時，為 6 V。

信號產生器需附有電流輸出值可達1安培以上之放大裝置。本實驗使用如圖A2所示的 PASCO WA9867 正弦波產生器(Sine wave generator)，儀器的使用說明見圖說。



PASCO SF-9324 可變頻力學驅動器結構圖

圖A1 PASCO SF-9324 可變頻力學波驅動器(簡稱振動儀)之結構圖：(1)保險絲(Fuse), (2)驅

動器鎖定桿(Driver locking tab), (3)香蕉型接頭(Banana plug connector), (4)驅動臂(Driver arm), (5)連接信號產生器之放大信號的輸入端(Connect amplified signal from waveform generator)。注意：啟動振動儀之前，必須先確認保險絲是否確實鎖緊於保險絲座上。



圖A2 香蕉型插入式接頭(banana plug connectors)，俗稱喇叭端子(speaker terminals)。

Sine Wave Generator

WA-9867

- ▶ Sine Wave Output up to 800 Hz
- ▶ Ideal for Driving Speakers and Wave Drivers
- ▶ Auto-Scan of Resonant Frequencies

The Sine Wave Generator is an effective tool for generating waves with speakers or wave drivers. It enables users to change both the frequency (0-800 Hz) and amplitude of the sine wave output. Both fine and coarse frequency controls are included and the digital display features a 0.1 Hz resolution. In addition, the generator can "learn" the fundamental frequency for a particular configuration. Students can observe the quantum nature of standing wave patterns as the Sine Wave Generator jumps from one resonant frequency to the next.

② 信號輸出端

Power Output
Standard banana jacks allow the Sine Wave Generator to be easily connected to other devices

⑥ 頻率增加量設定鈕

Frequency Increments
Use these buttons to store a frequency increment and scan through a frequency range by this increment.

① 電源開關

Power switch

⑤ 振幅調整鈕

Amplitude
Vary the amplitude of the sine wave.

③ 頻率顯示幕

LED Display
Red LEDs make the display easy to read with 0.1 Hz resolution.

④ 頻率設定鈕

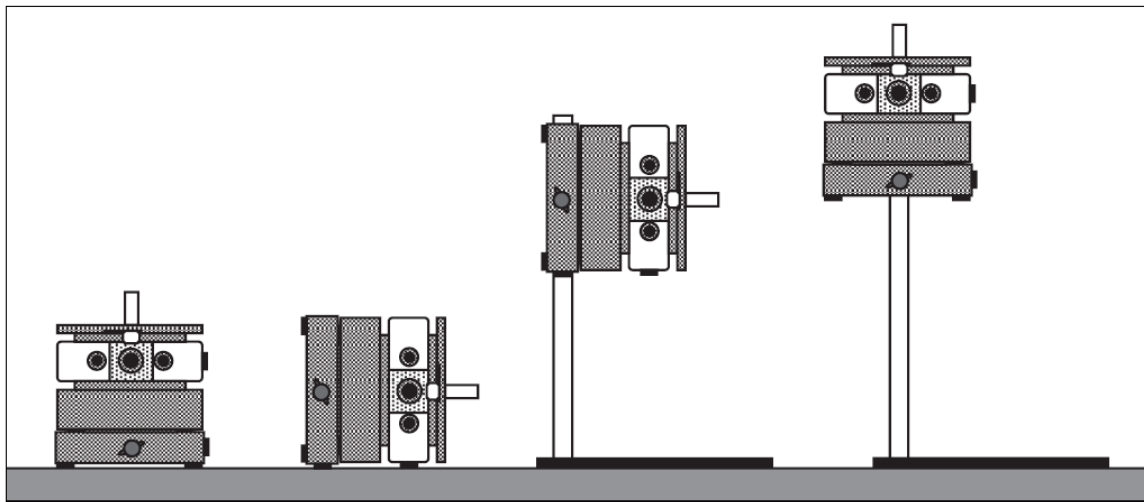
Frequency Adjustment
Change the frequency by 1 Hz or 0.1 Hz increments.



圖6 PASCO WA9867正弦波產生器，信號頻率範圍為0 - 800 Hz。①Power switch: 電源開關；②Power Output：信號輸出端，使用標準的香蕉型插頭將所設定的正弦信號輸出至振動儀。③ LED Display：輸出信號之頻率顯示面板；④ Frequency Adjustment：信號頻率調整設定鈕，左邊旋鈕為 x 1 Hz 的頻率增加量，右邊旋鈕為 x 0.1 Hz 的頻率增加量。⑤ Amplitude：信號振幅調整旋鈕；⑥ Frequency Increments：此兩按鈕用以儲存頻率的增加量和頻率掃描的範圍。

二、振動儀架設方式

振動儀的架設方式如圖A3所示，可直立放置，或轉90度側面置放(在底座和側面都裝有止滑的橡膠腳墊，以防高強度振動時，振動儀產生移動)；也可將之架設在直徑1/2英吋的金屬棒上，使之騰空側向架設，或使之可騰空直立放置。

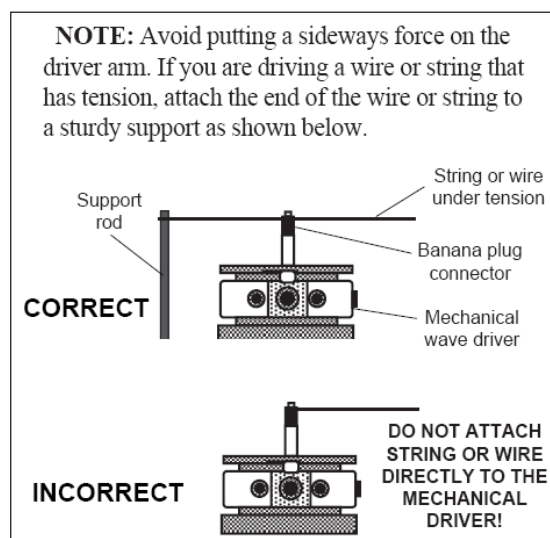


Mounting the Mechanical Wave Driver

圖 A3 振動儀的各種架設方式。

三、與擬振動之物體間的連接方式

可將不同材質的繩線繫牢在香蕉型接頭上，然後再將香蕉型接頭插入驅動臂(Driver arm) (4)中，使和振動儀連接。圖A4顯示繩線連接至振動儀的正確接法和錯誤的接法。也可以設計適合實驗用的連接頭，譬如其中一種方式是將一段鋼硬的金屬線(金屬片)焊接於香蕉接頭上，然後將鋼硬的金屬線(片)依實驗需求彎成所需的角或形狀。**注意：需避免任何側向力(sideways force)作用在驅動臂上。如果擬驅動含有張力的細線或繩子振盪，建議如圖所示，將細線或繩子的尾端水平地繫在一個堅固的支撐裝置上或牆壁上。**



圖A4 繩線連接到振動儀之驅動臂上的正確接法和錯誤接法的示意圖。注意：避免任何側向力(sideways force)作用在驅動臂上。如果擬驅動含有張力的細線或繩子振盪，建議如圖所示，

將繩線的尾端水平地繫在一個堅固的支撐裝置上或牆壁上。

四、待驅動體與振動儀連接或拆卸時的標準安裝程序

1. 先將位於振動儀頂端的**驅動臂鎖桿**切到「**鎖定(Lock)**」的位置，以使驅動臂保持在鎖定狀態，此時外部香蕉插座會和內部驅動軸脫離，使兩者處於互不相連通的分離狀態。如此當驅動臂在連接其他裝置時，可保護揚聲器內部的驅動軸免於因外部連接的動作過大而使之受損傷。
2. 使用如圖 5 所示或振動儀所附的香蕉型插式接頭，將擬被振動的實驗裝置牢固地插接到振動儀的驅動臂上。
3. 使用兩條兩端均為香蕉型接頭的導線將信號產生器的輸出信號連接到振動儀前端的香蕉型插座上。
4. **將驅動臂鎖桿切換至「未鎖定(Unlock)」狀態。**
5. 調整信號產生器之輸出信號的頻率和振幅，以製造振動波所需之振動頻率和振幅。**波動振動器的輸入電流(意即信號產生器的輸出電流)切勿超過 1.0 A。**
6. 若信號開始輸入振動儀，但鎖定滑桿尚未切換到「未鎖定(Unlock)」狀態，則此時振動儀會產生非常吵雜的噪音，且物體會呈現不規則的亂振現象。此時請立即關閉信號產生器的信號輸出，並將驅動臂鎖桿切換至「未鎖定(Unlock)」狀態，再啟動信號輸入。
7. 做完一個實驗，**擬拆卸被振物體時，請將驅動臂鎖桿再切回「鎖定(Lock)」位置，才可將香蕉插頭從驅動臂的插座上拆離。**
8. 若擬另接一個物體到振動儀上，請再仔細地重複 1-7 的安裝步驟。

五、振動信號設定時需注意之事項

設定信號產生器之輸出信號時，請注意下列幾件事項：

1. 駐波的模態、共振現象、駐波圖案和形狀取決於振動體的材質、形狀、大小和密度分佈，以及振動信號的頻率。但和振動信號波的振幅大小無關，故請適當地調整信號振幅的大小。通常低頻時，才需要較大的振幅，因低頻信號的波長比較長，單位長度的振動較不明顯，所以需要較大的振幅量。但高頻時，波長短，不需太大的振幅，且太大的振幅加以高頻率的振盪，易使振盪物體吸收太多的共振能量，進而容易導致振盪物體斷裂。故通常信號調至高頻時，記得要將振幅隨之調小，只要調到能夠清楚觀察到波動現象即可。
2. 在二維克拉尼駐波圖案的實驗中，使用細砂觀察駐波圖形。駐波圖案的型態雖僅和信號頻率及平板的大小和形狀有關，與細砂的特性沒有很大的關係。但駐波圖案形成的難易程度和圖形的清晰度則與振動波的振幅大小、細砂粒徑的大小、細砂粒徑的均勻度和細砂量則有密切的關係。欲得清楚穩定的共振圖案，除細砂的粒徑需夠細、粒徑需盡量均一外，細砂的量也需適量，過多或過少均不容易得到清晰的駐波圖案。所以，一開始細砂的量不要多，在實驗過程中，可因需要再逐漸添加細砂的量即可。
3. 振動信號的振幅也要適當。振幅太小，平板的振動振幅有限，細砂不易跳動。但振幅

若太大，則細砂跳動幅度太大，不易穩定地停留在節點和節線上，導致駐波圖形不容易穩定成行。所以，一開始先使用小振幅，然後再再慢慢調整波動振幅的量，使細砂能得到平穩的跳動，且能夠形成穩定清晰的駐波圖案為準。另也要注意，不同的頻率範圍，波動所需的適當振幅也不同，故需隨頻率的改變，也需隨時重新調整適當的振幅量。

4. 本實驗 E 部份中所使用的三種克拉尼平板的適當振動頻率範圍均在100 Hz 至5 kHz，更高頻率範圍當然也會有共振現象產生，但太高頻的共振，所獲得的共振節線將會太密或太複雜，以致在此三個平板尚無法呈現明顯清晰的共振圖案。每一金屬平板，因其面積大小不同和形狀不同，而會有不同的最低共振頻率，稱之為基本頻率 (fundamental frequency or base frequency，或簡稱基頻)。
5. 實驗開始之前，請先估計各金屬平板的最低共振頻率。實驗開始之際，先從低頻開始起振，至少需從低於基頻的頻率開始。然後慢慢地改變振動信號的頻率，將會發現金屬平板因不同的共振模態，而產生各種不同形狀的共振駐波圖形。
6. 切記頻率的改變不能太快，因被振物體或細砂受平板振動，需要足夠的時間跳動到節點或節線上，並調整其最後停留的位置，且通常共振頻率的頻寬範圍很窄，所以，若頻率調變太快的話，很容易錯過一些原本應該會出現駐波的共振頻率。此外，也無法獲得穩定且清晰的駐波圖案。
7. 觀察二維克拉尼共振圖案時，因所用的細砂量有限，請小心並節省使用；盡量避免細砂流失，每次做完實驗，請務必回收。

六、振動儀儀器使用注意事項

振動儀是本實驗中所有器材中最昂貴的部份，價格不菲，請小心使用。若發現振動儀無法振動或有異樣時，請檢查下列兩項事項：

- (3) 首先檢查保險絲。如果保險絲被燒斷，請務必更換相同規格的保險絲，保險絲規格為1安培，250伏特。且在替換後，請確認保險絲座已被完全鎖緊。
- (4) 若保險絲並未燒斷，則檢查保險絲座是否完全旋牢。

若以上兩步驟的檢查均沒問題的話，請向助教、老師或普物實驗室技術員報告，絕對不可自行拆卸振動儀。

因振動儀的振動傳動軸非常精細且敏銳，所以當在連接其他相關組件到振動儀的驅動臂上，以使之和驅動軸連接時；或擬將連接於驅動臂上的組件拆除時，很容易因過大的外力，而使驅動軸受傷。因此，請切記下列兩事項：

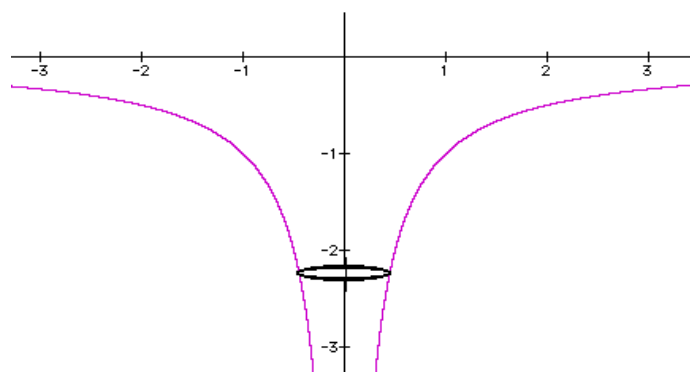
- (3) 不論是要連接配件到驅動臂上或擬從驅動臂上拆除配件時，請勿必將振動儀上的**驅動臂鎖定桿(Driver arm lock/unlock tab)**裝置設定到「**鎖定(Lock)**」狀態，以使驅動臂上的連接插座與傳動軸被隔離，使傳動軸被鎖定，避免外力作用，以保護傳動軸使之避免於連接或拆裝其他組件時受傷害。
- (4) 振盪信號開始輸入振動儀之前，也需注意振動儀上的**驅動臂鎖桿**裝置是否已轉「**未鎖定(Unlock)**」狀態，若未切換到此狀態，則當啟動振動儀開關時，會產生非常吵雜的噪音。

附錄二：波爾的量子原子模型(Bohr's model of an atom)

資料來源網站：<http://www.exo.net/~pauld/activities/energylevelmodel/bohratom.html>

Did you ever wonder why the negatively charged electron doesn't just fall toward the positively charged proton in a hydrogen atom?

The answer to this question using classical physics from the 19'th century is that the electron does fall toward the nucleus. But it misses! This is the essence of an orbit. Just as the moon falls toward the earth because of gravity, and yet is moving to the side so that it never strikes the earth, so the electron orbits the proton.



The potential energy curve for an electron orbiting a proton.

Plus a circle representing an orbit.

However, there was another question, when an electron orbits in a circle it emits electromagnetic radiation. This radiation removes energy from the orbiting electron causing it to spiral into the proton in a millisecond or so.

The Bohr model used the quantum mechanical concept that an electron travels as a probability wave. The wavelength of the electron wave depends on the velocity (and so the kinetic energy) of the electron, higher energy electrons have shorter wavelengths. If the electron orbits an atom as a wave, then something special happens when one wave exactly fits around an orbit.

This standing wave does not lose energy by radiation. The same thing happens when two, three or any integer number of waves fit around the atom. These standing waves define the energy levels and diameters of the orbits of electrons around protons. The standing wave condition allowed the Bohr model to explain the energy levels in the hydrogen atom.

Math Root

There are several related mathematical bits needed here.

The potential energy, V , of the electron of charge, $-e$, around a nucleus with charge, Ze , as a function of distance, r , is:

$$V = -kZe^2/r, \text{ where } k = 1/4\pi\epsilon_0 \text{ the coulomb constant, } 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2.$$

The smaller the radius the larger the depth of the electrical potential energy is. Cut the radius in half and the depth of the potential energy curve doubles.

For hydrogen where $Z = 1$, we can group all the constant terms together in parentheses and find

$$V = -(kZe^2)/r.$$

The kinetic energy of an electron is

$$KE = (1/2) mv^2$$

where m is the mass of the electron. But in a circular orbit the velocity must have a value so that the centripetal force is provided by electrical attraction. The magnitude of the electric force is the classic inverse square law of Coulomb.

$$F = kZe^2/r^2$$

The magnitude of the centripetal force needed to hold a mass in a circular orbit is, $F = mv^2/r$, set these equal and solve for v^2 then use v^2 to find kinetic energy.

$$F = kZe^2/r^2 = mv^2/r$$

So the kinetic energy as a function of radius is: $KE = (1/2) kZe^2/r$

The kinetic energy is opposite in sign to the potential energy and has half the magnitude. This is true for all circular orbits in inverse square force fields. The total energy as a function of radius is:

$$E = V + KE = -(1/2) kZe^2/r$$

To change radius a particle must gain or lose energy, *i.e.* if r changes then the total energy E must change. **The interesting thing is that there are certain orbital radii which are stable in atoms.** To understand these we must learn about the wave properties of electrons. **An electron travels as a wave, a wave of probability density, that is, a wave in the probability of finding an electron.**

The relationship between the kinetic energy of an electron, K_E , and its wavelength, L

$$L = h/(2mK_E)^{0.5}$$

where h is Planck's constant, 6.6×10^{-34} Js. So the wavelength is inversely proportional to the square root of the energy. If an integer number of waves fit in a circle about the nucleus then $nL = 2\pi r$, substituting for $L = 2\pi r/n$. Then

$$nh/(2mK_E)^{0.5} = 2\pi r \rightarrow K_E = n^2 h^2 / (2m4\pi^2 r^2)$$

Now to find the radius at which there are n wavelengths in the circumference of the orbit, set the two equations for K_E equal and find

$$n^2 h^2 / (8m\pi^2 r^2) = (1/2) kZe^2/r$$

To solve for r

$$r = (h^2/4\pi^2ke^2)n^2/Z$$

To gather all the constant stuff in the parentheses. The neat stuff outside the parentheses shows that the radius increases as the square of the number of wavelengths, n^2 , and decreases inversely with the nuclear charge Z . The energy levels are inversely proportional to r so the potential energy, E_n , of level n is

$$E_n = -(4\pi^2mk^2e^4/2h^2)Z^2/n^2$$

So for hydrogen if we call the energy of the first energy level, with $n = 1$, $E_1 = -1$. Then the next energy level $E_2 = -1/4$ and the next $E_3 = -1/9$. This is close to what is actually observed and was a triumph for the Bohr model.

Going Further

Sine waves are very useful curves. Mr. Fourier discovered that they can be added together to create periodic functions of any shape. However, in three dimensions the basic shapes of nature needed to assemble all rotationally symmetric shapes were more complicated. The spherical Legendre Polynomials. Schrodinger used these basic shapes in three dimensions to more accurately model the wave functions of electrons around atoms. These are the orbitals used to explain energy levels in modern quantum mechanics.